5. L'INTEGRALE DI POISSON.

Se $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$ in Ω e $u = \varphi$ su $\partial\Omega$, allora (R) implica che u si può rappresentare mediante l'<u>integrale di Poisson</u>:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\,\varphi(y)\,dS_y .$$

La funzione $P(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \nu(y)$ si dice anche il <u>nucleo di Poisson di Ω</u>.

Nel caso in cui $\Omega = B(0,R)$, $P(x,y)$ è calcolabile in forma chiusa. Infatti, per $x \in B(0,R)$ sia

$$x^* = \begin{cases} \frac{R^2}{|x|^2}\,x & \text{se } x \neq 0, \\ \infty & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si può verificare facilmente che

$$G(x,y) = \Phi(|x-y|) - \Phi\left(\frac{|y|}{R}\,|x-y^*|\right)$$

dove si intende che $\frac{|y|}{R}\,|x-y^*| = R$ per $y=0$.

Infatti la funzione $h(y) = -\Phi\left(\frac{|y|}{R}\,|x-y^*|\right)$ è armonica in $B(0,R)$ e $G(x,y)=0$ se $y \in \partial B(0,R)$, dato che

$$\frac{|y|^2}{R^2}\,|x-y^*|^2 = \frac{|y|^2}{R^2}\left\{ |x|^2 + \frac{R^4}{|y|^2} - 2R^2\frac{x \cdot y}{|y|^2} \right\} =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 - 2x\cdot y = |x-y|^2 \quad \text{se } |y|^2 = R^2.$$

Inoltre, dato che $\nu(y) = \frac{y}{R}$ per $y \in \partial B(0,R)$, un semplice calcolo ci dà:

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R}\,|x-y|^{-N} \geq 0$$

e quindi la formula di Poisson:

$$(P) \qquad u(x) = \frac{R^2-|x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N}\, ds_y \quad , \; x \in B(0,R),$$

Si noti che, ponendo $x=0$, si riottiene il teorema della media per le funzioni armoniche.

TEOREMA. Sia $\varphi \in C^0(\partial B(0,R))$. Allora la funzione u definita da (P) per $x \in B(0,R)$ e da $\varphi(x)$ per $x \in \partial B(0,R)$ è di classe $C^2(B(0,R)) \cap C^0(\overline{B(0,R)})$ ed è armonica in $B(0,R)$.

Dim. L'armonicità di u segue dal fatto che $x \mapsto \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)$ è armonica in $B(0,R)$ per ogni $y \in \partial B(0,R)$ e dal fatto che si possono scambiare le operazioni di derivazione ed integrazione.

Si noti ora che, ponendo $\varphi \equiv 1$ in (P), si ottiene

$$\int_{\partial B(0,R)} P(x,y)\, ds_y = 1 \quad \text{per ogni } x \in B(0,R),$$

Sia $x_0 \in \partial B(0,R)$; per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che $|\varphi(y)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$ se $y \in \partial B(0,R) \cap B(x_0,\delta)$. Perciò, se $|x-x_0|<\frac{\delta}{2}$, si ha:

$$|u(x)-u(x_0)| = \left| \int_{\partial B(0,R)} P(x,y)\,[\varphi(y)-\varphi(x_0)]\, ds_y \right| \le$$

$$\le \int_{\partial B(0,R)\cap B(x_0,\delta)} P(x,y)\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\, ds_y + \int_{\partial B(0,R)\cap B(x_0,\delta)^c} P(x,y)\,|\varphi(y)-\varphi(x_0)|\, ds_y <$$

$$< \varepsilon + 2\max_{\partial B(0,R)}|\varphi| \int_{\partial B(0,R)\cap B(x_0,\delta)^c} \frac{R^2-|x|^2}{\omega_N R\,|x-y|^N}\, ds_y \le$$

$$\le \varepsilon + 2\max_{\partial B(0,R)}|\varphi| \left(\frac{2}{\delta}\right)^N (R^2-|x|^2)\, R^{N-2},$$

dato che $|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| \geq \frac{\delta}{2}$, essendo $|y-x_0| \geq \delta$.

Dunque

$$\limsup_{x \to x_0} |u(x) - u(x_0)| \leq \varepsilon$$

e, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $\lim_{x \to x_0} |u(x) - u(x_0)| = 0$, cioè $u \in C^0(\overline{B(0,R)})$. $\square$

Si noti che l'argomento qui usato è puramente locale, infatti $u(x) \to \varphi(x_0)$ per $x \to x_0$ anche se φ è continua solo nel punto x_0 e limitata su $\partial B(0,R)$.

TEOREMA (Analiticità delle funzioni armoniche)

Sia $u \in C^2(\Omega)$ armonica in Ω. Allora u è analitica in Ω.

Dim. Dobbiamo mostrare che, fissato $x_0 \in \Omega$, u è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x_0. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $x_0 = 0$ e che $\overline{B(0,R)} \subset \Omega$ per qualche $R > 0$.

Posto $\varphi = u$ su $\partial B(0,R)$, dato che φ è sicuramente continua, per il teorema precedente abbiamo che

$$\text{(P)} \quad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} \, dy.$$

Osserviamo ora che per $y \in \partial B(0,R)$

$$|x-y|^{-N} = \left(|x|^2 - 2x\cdot y + R^2\right)^{-N/2} = R^{-N}\left(1 - \frac{2x\cdot y}{R^2} + \frac{|x|^2}{R^2}\right)^{-N/2}$$

e che per $|x| < \sqrt{2} - 1$ si ha:

$$\left| -\frac{2x\cdot y}{R^2} + \frac{|x|^2}{R^2} \right| < 1.$$

Perciò, dato che $(1+t)^{-N/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n} t^n$ per $|t| < 1$, risulta che

$$\left(1 - \frac{2x\cdot y}{R^2} + \frac{|x|^2}{R^2}\right)^{-N/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n} \left(-\frac{2x\cdot y}{R^2} + \frac{|x|^2}{R^2}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{2x\cdot y}{R^2}\right)^k \left(\frac{|x|^2}{R^2}\right)^{n-k},$$

avendo usato la formula binomiale. In altre parole, per ogni $y \in \partial B(0,R)$, $|x-y|^{-N}$ è sviluppabile in serie di Taylor in $B(0,(\sqrt{2}-1)R)$. Non solo, fissato $x \in B(0,(\sqrt{2}-1)R)$, la serie converge uniformemente a $|x-y|^{-N}$ per $y \in \partial B(0,R)$.

Possiamo allora scambiare l'operazione di serie e quella di integrazione in (P) ed ottenere

$$(S) \quad u(x) = R^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{R^2-|x|^2}{\omega_N R} \left(\frac{|x|^2}{R^2}\right)^{n-k} \int_{\partial B(0,R)} \left(-\frac{2x\cdot y}{R^2}\right)^k \varphi(y)\, dS_y.$$

Si noti che

$$(x\cdot y)^k = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{N} x_{j_1}\cdots x_{j_k}\, y_{j_1}\cdots y_{j_k}$$

cosicché

$$\int_{\partial B(0,R)} (x\cdot y)^k \varphi(y)\, dS_y = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{N} x_{j_1}\cdots x_{j_k} \int_{\partial B(0,R)} y_{j_1}\cdots y_{j_k}\, \varphi(y)\, dS_y,$$

un polinomio in $x_1,\dots,x_N$.

Ogni addendo nella serie (S) risulta allora essere un polinomio in $x_1,\dots,x_N$. Riordinando opportunamente la serie (S), possiamo concludere che $u(x)$ è sviluppabile in serie di potenze in $B(0,(\sqrt{2}-1)R)$. $\square$