2. MEDIE SFERICHE.

TEOREMA 1. Sia $u \in C^2(\Omega)$ tale che $\Delta u \geq 0$ in Ω. Allora, per ogni palla $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$, si ha:

$$(1) \qquad u(x) \leqslant \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y \quad e \quad u(x) \leqslant \fint_{B(x,r)} u(y)\, dS_y .$$

Viceversa, se $u \in C^2(\Omega)$ soddisfa (1) per ogni palla $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$, allora $\Delta u \geq 0$ in Ω.

(Con il segno $\fint$ si indica la media di u sull'insieme e rispetto alla misura in questione.)

DIM. Per il teorema della divergenza,

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \nu(y)\, dS_y$$

e quindi, dato che $\nu(y) = \frac{y-x}{r}$ per ogni $y \in \partial B(x,r)$, risulta:

$$\int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy = \int_{\partial B(x,r)} \nabla u(y) \cdot \frac{y-x}{r}\, dS_y = r^{N-2} \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\, dS_z ,$$

dove si è usato il cambio di variabili $y = x + rz$ con $z \in \partial B(0,1)$.

Perciò, dato che $\Delta u \geq 0$ in Ω, si ha:

$$0 \leqslant \int_{\partial B(0,1)} \nabla u(x+rz) \cdot z\, dS_z = \int_{\partial B(0,1)} \frac{d}{dr} u(x+rz)\, dS_z =$$

$$= \frac{d}{dr} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS_z .$$

Integrando quest'ultima disuguaglianza tra 0 ed r, si ottiene allora

$$0 \leqslant \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS_z - \int_{\partial B(0,1)} u(x)\, dS_z = \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\, dS_z - \omega_N u(x),$$

dove $\omega_N = |\partial B(0,1)|$. La (1) segue allora facilmente. ②

Si noti inoltre che

$$\int_{B(x,r)} u(y)\,dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\,dS_y \right) d\rho \geq \int_0^r u(x)\,\omega_N \rho^{N-1} d\rho =$$

$$= \frac{\omega_N}{N} r^N u(x) = |B(x,r)|\, u(x).$$

Viceversa, se fosse $\Delta u(x) < 0$ in qualche $x \in \Omega$, esisterebbe $r_0 > 0$ tale che $\Delta u < 0$ in $\overline{B(x,r_0)} \subset \Omega$. Perciò

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B(0,1)} u(x+rz)\,dS_z = r^{1-N} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\,dy < 0,$$

per ogni $r \in [0, r_0]$ e quindi sarebbe $u(x) > \fint_{\partial B(0,r_0)} u(y)\,dS_y$. $\square$

TEOREMA 2 Sia $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che

$$(2) \qquad u(x) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS_y$$

per ogni $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$. Allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω.

Dim. Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\,dx = 1$ e $\mathrm{supp}(j) \subseteq B(0,1)$.

Posto $j(x) = \eta(|x|)$ e $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, sappiamo che la funzione $u_\varepsilon = j_\varepsilon * u$ $(= j_\varepsilon * (u \chi_\Omega))$ è una funzione $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Sia $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$; se $x \in \Omega_\varepsilon$ si ha:

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega j_\varepsilon(x-y)\,u(y)\,dy = \varepsilon^{-N} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) u(y)\,dy =$$

$$= \varepsilon^{-N} \int_0^\varepsilon \left[\eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS_y \right] dr = u(x)\,\varepsilon^{-N} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \omega_N r^{N-1} dr$$

$$= u(x) \int_{B(0,\varepsilon)} j_\varepsilon(y)\,dy = u(x).$$

Perciò $u = u_\varepsilon$ in Ω_ε e quindi $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ per ogni $\varepsilon > 0$, ossia $u \in C^\infty(\Omega)$.

Che $\Delta u = 0$ in Ω segue dal teorema precedente. $\square$

Se $u \in C^2(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ in Ω si dice che u è <u>armonica</u> in Ω. Il teorema precedente garantisce che, se u è armonica, u è differenziabile infinite volte.

Un teorema analogo alla proprietà della media per funzioni armoniche vale, in certe situazioni, per le soluzioni dell'<u>equazione del calore</u> $u = u(x,t)$:

$$(3) \qquad u_t = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty).$$

Si dice che $p \in \Omega$ è un <u>punto invariante</u> per una soluzione u di (3) se $u(p,t)$ non dipende da t:

$$(4) \qquad u(p,t) = c \quad \text{per ogni } t > 0.$$

TEOREMA 3. Sia $p \in \Omega$ un punto invariante per u. Allora, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{B(p,r)} \subset \Omega$, risulta che

$$u(p,t) = \fint_{\partial B(p,r)} u(y,t)\, dS_y = \fint_{B(p,r)} u(y,t)\, dy$$

per ogni $t > 0$.

Dim. Sia $r_0 = \mathrm{dist}(p, \partial\Omega)$ e si definisca

$$g(r,t) = \fint_{\partial B(p,r)} u(y,t)\, dS_y .$$

Con argomenti analoghi ai precedenti, otteniamo che

$$g(r,t) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(p + rz, t)\, dS_z$$

e che

$$g_r(r,t) = \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{B(p,r)} \Delta u(y,t)\, dy .$$

Dato che u soddisfa (3) in Ω, abbiamo:

$$\frac{1}{\omega_N} \int_{B(p,r)} u_t(y,t)\, dy = r^{N-1} g_r(r,t).$$

D'altra parte

$$\frac{1}{\omega_N} \int_{B(p,r)} u_t(y,t)\, dy \doteq \int_0^r \rho^{N-1} \left(\frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} u(p+rz,t)\, dS_z \right) d\rho =$$

$$= \int_0^r \rho^{N-1} g_t(\rho,t)\, d\rho$$

e quindi

$$\int_0^r \rho^{N-1} g_t(\rho,t)\, d\rho = r^{N-1} g_r(r,t).$$

Derivando rispetto ad r, dopo semplici calcoli si ottiene:

$$(5) \qquad g_t = g_{rr} + \frac{N-1}{r} g_r \quad \text{in } (0,r_0) \times (0,\infty).$$

La (4) inoltre implica che $g(0,t) = c$ per ogni $t>0$.
E' possibile dimostrare che u è analitica in x; da ciò segue che g è analitica in $r=0$, cioè

$$(6) \qquad g(r,t) = c + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\, r^n$$

e la serie converge in un intorno di $r=0$.
L'equazione (5) e la (6) implicano che

$$g_1(t) = \lim_{r\to 0} g_r(r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{r}{N-1} \left[g_t(r,t) - g_{rr}(r,t) \right] = 0.$$

Ancora, inserendo la (6) nella (5) abbiamo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n'(t)\, r^n = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, g_n(t)\, r^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n(N-1)\, g_n(t)\, r^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+N)\, g_{n+2}(t)\, r^n$$

e dunque $g_2(t) = 0$ e

$$g_{n+2}(t) = \frac{1}{(n+2)(n+N}\, g_n'(t) \quad , \quad n = 1, 2, \dots .$$

Dato che $g_1'(t) = g_2'(t) = 0$, per ricorrenza, otteniamo che $g_n(t) = 0$ per ogni $n = 1, 2, \dots$, e quindi

$$g(r, t) = c = u(p, t) \quad \text{per ogni } (r, t) \in [0, r_0] \times (0, \infty).$$

Infine

$$\fint_{B(p,r)} u(y, t)\, dy = \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1} g(\rho, t)\, d\rho =$$

$$= \frac{N}{r^N} \int_0^r \rho^{N-1} u(p, t)\, d\rho = u(p, t). \ \square$$