3. PRINCIPIO DI MASSIMO E SUE PRIME APPLICAZIONI.

TEOREMA (Il principio di massimo forte)

Sia $\Delta u \geq 0$ in Ω connesso e supponiamo che esista un punto $x \in \Omega$ tale che $u(x) = \sup_{\Omega} u$. Allora u è costante.

Dim: Sia $M = \sup_{\Omega} u$ e sia $\Omega_M = \{ y \in \Omega : u(y) = M \}$; per ipotesi $\Omega_M \neq \phi$. Poichè u è continua, Ω_M è chiuso relativamente ad Ω.

Sia ora $z \in \Omega_M$ e sia $\overline{B(z,r)} \subset \Omega$. Per il teorema della media, si ha che

$$0 = u(z) - M \leq \fint_{B(z,r)} u(y)\, dy - M = \fint_{B(z,r)} [u(y) - M]\, dy \leq 0 ,$$

dato che $u \leq M$. Perciò $\int_{B(z,r)} [u(y)-M]\, dy = 0$ e $u - M \leq 0$ in $B(z,r)$, cioè $u \equiv M$ in $B(z,r)$.

Dunque $B(z,r) \subset \Omega_M$, ossia Ω_M è aperto. Poichè Ω è connesso, $\Omega_M = \Omega$. □

COROLLARIO (Il principio di massimo debole)

Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ con $\Delta u \geq 0$ in Ω. Allora, a patto che Ω sia limitato, risulta:

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u .$$

Dim. Dato che $u \in C^0(\overline{\Omega})$, esiste $x \in \overline{\Omega}$ tale che $u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Se $x \in \Omega$, allora u è costante nella componente connessa di Ω contenente x e quindi comunque $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. □

1.4. TEOREMA (La disuguaglianza di Harnack)

Sia $\Delta u = 0$ in Ω e sia $u \geq 0$ in Ω. Allora per ogni aperto connesso e limitato A con $\overline{A} \subset \Omega$, esiste una costante C, dipendente solo da N, A ed Ω, tale che

$$\sup_A u \leq C \inf_A u .$$

Dim. Sia $x \in \Omega$ e sia $\overline{B(x,4r)} \subset \Omega$. Allora, per ogni scelta di x_1 ed x_2 in $B(x,r)$, si ha:

$$u(x_1) = \fint_{B(x_1,r)} u(y)\,dy \leq \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B(x,2r)} u(y)\,dy \quad \text{e}$$

$$u(x_2) = \fint_{B(x_1,3r)} u(y)\,dy \geq \frac{1}{\omega_N (3r)^N} \int_{B(x,2r)} u(y)\,dy ,$$

dato che $u \geq 0$ e $B(x_1,r) \subseteq B(x,2r) \subseteq B(x_1,3r)$. Perciò

$$u(x_1) \leq 3^N u(x_2)$$

per ogni scelta di x_1 ed x_2 in $B(x,r)$ e quindi

$$(1) \qquad \sup_{B(x,r)} u \leq 3^N \inf_{B(x,r)} u .$$

Scegliamo ora $x_1 \in \overline{A}$ tale che $u(x_1) = \sup_A u$ ed $x_2 \in \overline{A}$ tale che $u(x_2) = \inf_A u$. Sia inoltre γ un arco di curva contenuto in $\overline{A}$ e che unisce x_1 ad x_2, e si scelga r tale che $4r < \mathrm{dist}(\gamma, \partial\Omega)$. Poiché $\overline{A}$ è compatto, possiamo coprire γ con un numero finito n di palle chiuse di raggio r. Siano $c_1 = x_1$, $c_n = x_2$, e c_k, $k = 2, \dots, n-1$, un punto appartenente all'intersezione tra la $(k-1)$-esima e la k-esima palla. Si ha:

$$u(x_1) = u(c_1) \leq 3^N u(c_2) \leq 3^{2N} u(c_3) \leq \dots \leq 3^{nN} u(c_n) = 3^{nN} u(x_2),$$

e dunque $C = 3^{nN}$ è la costante cercata. Si noti che C dipende solo da n e cioè solo da A ed Ω. $\square$

OSSERVAZIONE. Si noti che la disuguaglianza di Harnack è invariante per omotetie e rotazioni.

APPLICAZIONE: UNICITÀ PER IL PROBLEMA DI DIRICHLET.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato e sia $\varphi \in C^0(\overline{\Omega})$. Allora esiste al più una soluzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ del problema di Dirichlet:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Dim. Sia $v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ un'altra soluzione del problema. Se $w = u - v$, si ha:

$$\Delta w = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{e} \quad w = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

Per il principio di massimo

$$\max_{\overline{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = 0,$$
$$\max_{\overline{\Omega}} (-w) = \max_{\partial\Omega} (-w) = 0,$$

e quindi $w \leq 0$ e $w \geq 0$ in $\overline{\Omega}$, ossia $w \equiv 0$ su $\overline{\Omega}$. □

TEOREMA (Liouville) Se u è armonica e limitata in $\mathbb{R}^N$, u è costante.

Dim. Dato che u è limitata, $\inf_{\mathbb{R}^N} u > -\infty$. Sia $v = u - \inf_{\mathbb{R}^N} u$; allora $v \geq 0$ in $\mathbb{R}^N$.

Sia $x \in \mathbb{R}^N$; per la disuguaglianza di Harnack (1), risulta che

$$\sup_{B(x,r)} v \leq 3^N \inf_{B(x,r)} v \quad \text{per ogni } r > 0.$$

Perciò

$$0 \leq \sup_{\mathbb{R}^N} v \leq 3^N \inf_{\mathbb{R}^N} v = 0,$$

cioè $v \equiv 0$ e dunque $u = \inf_{\mathbb{R}^N} u$. □