7. RISOLUZIONE PER SEPARAZIONE DELLE VARIABILI.

1. LAPLACIANO IN COORDINATE POLARI.

Sia dato nel piano il cambiamento di coordinate

(1) $\quad x = r\cos\vartheta \quad , \quad y = r\sin\vartheta \quad , \quad r > 0 \quad , \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi .$

Se u è una funzione di x ed y, avremo allora

$$u_x = u_r \, r_x + u_\vartheta \, \vartheta_x ,$$

$$u_y = u_r \, r_y + u_\vartheta \, \vartheta_y ,$$

$$u_{xx} = u_{rr} \, r_x^2 + 2u_{r\vartheta} \, r_x \vartheta_x + u_{\vartheta\vartheta} \, \vartheta_{xx} + u_r \, r_{xx} + u_\vartheta \, \vartheta_{xx} ,$$

$$u_{yy} = u_{rr} \, r_y^2 + 2u_{r\vartheta} \, r_y \vartheta_y + u_{\vartheta\vartheta} \, \vartheta_{yy} + u_r \, r_{yy} + u_{\vartheta\vartheta} \, \vartheta_{yy} ,$$

e quindi

(2) $\quad \Delta u = |\nabla r|^2 u_{rr} + 2(\nabla r \cdot \nabla\vartheta) \, u_{r\vartheta} + |\nabla\vartheta|^2 u_{\vartheta\vartheta} + \Delta r \, u_r + \Delta\vartheta \, u_\vartheta$

D'altra parte, derivando rispetto ad x le due formule in (1), si ottiene

$$1 = \cos\vartheta \, r_x - r\sin\vartheta \, \vartheta_x ,$$

$$0 = \sin\vartheta \, r_x + r\cos\vartheta \, \vartheta_x ,$$

e quindi

(3) $\quad r_x = \cos\vartheta \quad , \quad \vartheta_x = -\dfrac{\sin\vartheta}{r} .$

In maniera analoga otteniamo:

(4) $\quad r_y = \sin\vartheta \quad , \quad \vartheta_y = \dfrac{\cos\vartheta}{r} .$

Perciò $|\nabla r|^2 = 1$, $\nabla r \cdot \nabla\vartheta = 0$ e $|\nabla\vartheta|^2 = \dfrac{1}{r^2}$. Derivando ancora in (3) e (4), si ha:

$$\Delta r = \frac{1}{r} \quad \text{e} \quad \Delta\vartheta = 0 ,$$

Dunque, la (2) implica che

(5) $\quad \Delta u = u_{rr} + \dfrac{1}{r} u_r + \dfrac{1}{r^2} u_{\vartheta\vartheta} .$

2. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad B(0, r_0),$$
$$u = \varphi \quad \text{su} \quad \partial B(0, r_0).$$

In coordinate polari, tale problema si scrive:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad , \quad 0 < r < r_0 , \; 0 \leq \theta < 2\pi,$$
$$u(r_0, \theta) = \varphi(\theta) , \quad 0 \leq \theta < 2\pi ;$$

Cerchiamo per il momento soluzioni della prima equazione nella forma $u(r, \theta) = R(r)\, \Theta(\theta)$; si ottiene

$$\left(R'' + \frac{1}{r} R'\right) \Theta + \frac{1}{r^2} R\, \Theta'' = 0 .$$

Dividendo per $\frac{1}{r^2} R\, \Theta$, si ha:

$$\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{\frac{1}{r^2} R} = - \frac{\Theta''}{\Theta} .$$

Ambedue i membri di questa equazione devono essere quindi costanti (il primo non dipende da r ed il secondo da θ). Quindi

(6) $$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{\lambda}{r^2} R = 0 \quad \text{e} \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0 ,$$

dove λ è una costante.

Dato che u deve essere regolare in $B(0, R)$, si dovrà avere

(7) $$\Theta(0) = \Theta(2\pi) \quad \text{e} \quad \Theta'(0) = \Theta'(2\pi).$$

Tutte le soluzioni della seconda equazione in (6) si scrivono:

$$\Theta(\theta) = a \cos(\sqrt{-\lambda}\, \theta) + b \sin(\sqrt{-\lambda}\, \theta) \quad , \quad \lambda \neq 0,$$

(se $\lambda < 0$, allora $\sqrt{+\lambda} = \sqrt{-\lambda}\, i$). La (7) implica allora

$$a \left[\cos(2\pi\sqrt{-\lambda}) - 1\right] + b \sin(2\pi\sqrt{-\lambda}) = 0 ,$$
$$- a \sin(2\pi\sqrt{-\lambda}) + b \left[\cos(2\pi\sqrt{-\lambda}) - 1\right] = 0$$

Questo sistema lineare ha soluzioni non banali se e solo se il determinante

$$\left[\cos(2\pi\sqrt{-\lambda})-1\right]^2+\sin(2\pi\sqrt{-\lambda})^2=0$$

e quindi se e solo se $\cos(2\pi\sqrt{-\lambda})=1$, ossia per

$$\lambda=-n^2\,,\quad n=1,2,\dots,$$

Con questa scelta di λ, le sole Θ possibili sono

$$\Theta_n(\vartheta)=a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta\,,\quad n=1,2,\dots,$$

Se infine $\lambda=0$, $\Theta(\vartheta)=b\vartheta+a$ dalla (6) e quindi

$$\Theta_0(\vartheta)=a_0\,,$$

dalla (7). La prima equazione in (6) ora diventa

$$R_n''+\frac{1}{r}R_n'+\frac{n^2}{r^2}R_n=0\,,\quad 0<r<r_0;$$

l'unica soluzione regolare di questa equazione è

$$R_n(r)=c\,r^n\,,\quad n=0,1,2,\dots,$$

Perciò le funzioni

$$u_n(r,\vartheta)=\left(\frac{r}{r_0}\right)^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)\,,\quad n=0,1,2,\dots$$

sono tutte armoniche in $B(0,r_0)$. Per la linearità di Δ, anche

$$(8)\qquad u(r,\vartheta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)$$

è armonica in $B(0,R)$. Non ci resta che imporre:

$$\varphi(\vartheta)=u(r_0,\vartheta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta)$$

per $0\le\vartheta<2\pi$. Moltiplicando questa ad ambo i membri per $\sin m\vartheta$ (o $\cos m\vartheta$) ed integrando tra 0 e 2π, otteniamo

$$a_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\cos m\vartheta\,d\vartheta\,,\quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\sin m\vartheta\,d\vartheta.$$

Inserendo queste espressioni nella (8), otteniamo la formula:

$$(9) \quad u(r,\vartheta) = \int_0^{2\pi} P_r(\vartheta - t)\, \varphi(t)\, dt ,$$

dove

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos nt .$$

ESERCIZIO. Sfruttando la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} , \quad |z|<1 , \quad z \in \mathbb{C},$$

dimostrare che

$$P_r(t) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi r_0} \, \frac{1}{r^2 - 2 r_0 r \cos t + r_0^2} .$$

La (9) diventa quindi la già nota formula di Poisson:

$$u(r,\vartheta) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\vartheta)}{r^2 - 2 r_0 r \cos(\vartheta - t) + r_0^2}\, dt .$$

ESERCIZIO. Con il metodo della separazione delle variabili calcolare la soluzione del problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0 , \quad 0<x<a , \quad 0<y<b ,$$

$$u(x,0) = f(x) , \quad u(x,b) = 0 , \quad 0 \le x \le a ,$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0 , \quad 0 \le y \le b .$$