1.1. IDENTITÀ INTEGRALI.

Il nostro punto di partenza è il <u>teorema</u> <u>della</u> <u>divergenza</u>.

TEOREMA. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato con frontiera di classe C^1 e sia $\nu(x)$ il versore della normale esterna a $\partial\Omega$ in $x \in \partial\Omega$.

Per ogni campo vettoriale $w \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ risulta:

$$(1) \quad \int_\Omega \operatorname{div}(w)\, dx = \int_{\partial\Omega} (w \cdot \nu)\, dS_x .$$

(Notazione: $\operatorname{div}(w) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial w}{\partial x_i}$.)

Dim. Si veda O.D. Kellog, Foundations of Potential Theory, Dover 1983. $\square$

COROLLARIO. (i) Per ogni $u \in C^1(\overline{\Omega})$ risulta:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, \nu_i\, dx, \quad i = 1, \dots, N.$$

(ii) (<u>Formula</u> <u>di</u> <u>integrazione</u> <u>per</u> <u>parti</u>) Per $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u v \nu_i\, dS_x - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx, \quad i = 1, \dots, N.$$

TEOREMA (Formule di Gauss-Green) Siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora

$$(2) \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dx - \int_\Omega v \Delta u\, dx,$$

$$(3) \quad \int_\Omega (v \Delta u - u \Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) dS_x,$$

dove $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \operatorname{div}(\nabla u)$ e $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$.
(Δ si dice l'operatore di Laplace.)

Dim. La (2) segue dalla (1) ponendo $w = v\nabla u$.
La (3) segue dalla (2) scambiando i ruoli di u e v e quindi eliminando il termine $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ dalle due identità ottenute. □

ESEMPI. (i) Prendendo $w(x) = x$ in (1), si ha:

$$|\Omega| = \frac{1}{N} \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nu) \, dS_x .$$

(ii) Prendendo $v = 1$ in (2), si ha:

$$\int_\Omega \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_x .$$

ESERCIZIO. Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che $u = 0$ su $\partial\Omega$ ed $u < 0$ in Ω. Allora

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, dS_x = \int_\Omega \frac{\nabla u \cdot \nabla \varphi}{|\nabla u|} \, dx + \int_\Omega \varphi \, \operatorname{div} \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \, dx ,$$

per ogni $\varphi \in C^1_0(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \{x \in \Omega : \nabla u(x) = 0\} = \phi$.

TEOREMA (<u>Identità di Pohozaev</u>) Sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora

$$(4) \quad \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega (x \cdot \nabla u) \, \Delta u \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x \cdot \nu) \, dx - \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_x .$$

Dim. E' facile verificare l'identità differenziale:

$$(5) \quad \operatorname{div} \left\{ \frac{|\nabla u|^2}{2} x - (x \cdot \nabla u) \nabla u \right\} = \frac{N-2}{2} |\nabla u|^2 - (x \cdot \nabla u) \Delta u .$$

La (4) segue allora integrando la (5) su Ω ed applicando la (1). $\square$

COROLLARIO. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soddisfa l'equazione

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \Omega,$$

dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, allora risulta:

$$(6) \quad \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - N \int_\Omega F(u)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - F(u) \right\} (x \cdot \nu)\, dS_x - \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_x,$$

dove $F(u) = \int_0^u f(t)\, dt$.

Se inoltre $u = 0$ su $\partial\Omega$ ed $u < 0$ in Ω, si ha:

$$(7) \quad \frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - N \int_\Omega F(u)\, dx = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 (x \cdot \nu)\, dS_x.$$

Dim. Dato che $-(x \cdot \nabla u)\, \Delta u = (x \cdot \nabla u) f(u) = x \cdot \nabla F(u)$, applicando la (2) (con $u(x) = \frac{1}{2}|x|^2$) si ha:

$$-\int_\Omega (x \cdot \nabla u) f(u)\, dx = \int_\Omega x \cdot \nabla F(u)\, dx = \int_{\partial\Omega} F(u)\, (x \cdot \nu)\, dS_x - N \int_\Omega F(u)\, dx.$$

La (6) si ottiene allora sostituendo questa formula in (4). Se $u = 0$ su $\partial\Omega$, si ha che $F(u) = 0$ su $\partial\Omega$ e

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Quindi la (7) segue facilmente dalla (6). $\square$