4. L'IDENTITÀ DI STOKES E LA FUNZIONE DI GREEN.

1. Soluzioni radiali dell'equazione di Laplace.

Le soluzioni dell'equazione di Laplace:

$$\text{(L)} \qquad \Delta u = 0,$$

si dicono funzioni armoniche.

Sia $u(x) = \Phi(|x|)$; allora

$$\nabla u(x) = \Phi'(|x|)\,\frac{x}{|x|} \qquad \text{e}$$

$$\Delta u(x) = \Phi''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\Phi'(|x|), \quad \text{se } x \neq 0.$$

Se u è armonica per $x \neq 0$, allora

$$\Phi''(r) + \frac{N-1}{r}\Phi'(r) = 0$$

e quindi $\Phi(r) = c_1 r^{2-N} + c_2$ se $N \geq 3$ e $\Phi(r) = c_1 \log r + c_2$ se $N = 2$. La funzione

$$\text{(F}_1\text{)} \qquad \Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log |x|, & N = 2, \\[2mm] \dfrac{|x|^{2-N}}{(N-2)\,\omega_N}, & N \geq 3, \end{cases}$$

si dice la soluzione fondamentale di (L).

Si noti che

$$\nabla\Phi(x) = \frac{1}{\omega_N}\,\frac{x}{|x|^N}, \qquad \nabla^2\Phi(x) = \frac{1}{\omega_N}\,\frac{|x|^2 I - N\, x\otimes x}{|x|^{N+2}}$$

dove I è la matrice unità e $x \otimes x$ è il prodotto colonna per riga di x con sé stesso. Dunque

$$\text{(F}_2\text{)} \qquad |\nabla\Phi(x)| \leq \frac{|x|^{1-N}}{\omega_N} \qquad \text{e} \qquad |\nabla^2\Phi(x)| \leq \frac{N-1}{\omega_N}\,|x|^{-N}$$

2. Identità di Stokes

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato, $x \in \Omega$ e $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$. Applicando l'identità di Green (G_2) alle funzioni $u(y)$ e $\Phi(y-x)$ per $y \in \Omega \setminus \overline{B(x,r)}$, otteniamo:

$$\int_{\Omega \setminus B(x,r)} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy = \int_{\partial\Omega} \left[\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\right] dS_y +$$

$$+ \int_{\partial B(x,r)} \left[\Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\right] dS_y .$$

Ora

$$\left| \int_{\partial B(x,r)} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,dS_y \right| = \Phi(r) \left| \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,dS_y \right| \leq$$

$$\leq \omega_N r^{N-1} \Phi(r) \sup_{B(x,r)} |Du| \longrightarrow 0 \quad \text{se } r \to 0^+.$$

Inoltre

$$\int_{\partial B(x,r)} u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\,dS_y = -\frac{r^{1-N}}{\omega_N}\int_{\partial B(x,r)} u(y)\,dS_y \longrightarrow -u(x) \quad \text{se } r \to 0^+.$$

Perciò otteniamo l'identità di Stokes:

$$(S_1) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) - \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\right] dS_y + \int_{\Omega} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy ,$$

che vale per ogni $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Se u ha supporto compatto in Ω, allora

$$u(x) = \int_{\Omega} \Phi(y-x)\,\Delta u(y)\,dy ;$$

se u è armonica in Ω, allora

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x)\,dS_y - \int_{\partial\Omega} \Phi(y-x)\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\,dS_y$$

Il secondo integrale in questa formula si dice un <u>potenziale di strato semplice</u>; il primo si dice un <u>potenziale di doppio strato</u>. (3)

3. <u>La funzione di Green</u>.

Sia h una funzione armonica in Ω; applicando la (G_2) ad h e $u \in C^2(\overline{\Omega})$, otteniamo

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left(h \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial h}{\partial \nu} \right) ds_y - \int_{\Omega} h \, \Delta u \, dy .$$

Sommando questa identità alla (S_1) e ponendo $G(x,y) = \Phi(y-x) - h(y)$ si ha allora

$$(S_2) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) - G(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds_y + \int_{\Omega} G(x,y) \, \Delta u(y) \, dy .$$

Se in più $G(x,y) = 0$ per $x \in \Omega$ ed $y \in \partial\Omega$, si ottiene la formula

$$(R) \quad u(x) = \int_{\partial\Omega} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) \, ds_y + \int_{\Omega} G(x,y) \, \Delta u(y) \, dy .$$

La funzione G in questo caso si dice la <u>funzione di Green</u> per il dominio Ω.

Se la funzione G esiste, la (R) ci informa che ogni funzione armonica di classe $C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ si può rappresentare in funzione dei suoi valori su $\partial\Omega$ e di Δu in Ω.

TEOREMA. Per ogni x e $y \in \Omega$ con $x \neq y$ risulta $G(y,x) = G(x,y)$.

Dim. Siano $u(z) = G(x,z)$ per $z \neq x$ e $v(z) = G(y,z)$ per $z \neq y$; dobbiamo dimostrare che $u(y) = v(x)$. Sia $r > 0$ tale che $\overline{B(x,r)}$ e $\overline{B(y,r)} \subset \Omega$, $\overline{B(x,r)} \cap \overline{B(y,r)} = \emptyset$ e sia $\Omega_r = \Omega \setminus \left(\overline{B(x,r)} \cup \overline{B(y,r)} \right)$.

Applicando l'identità (σ_2) e tenendo conto che $\Delta u = \Delta v = 0$ in Ω_r e $u = v = 0$ su $\partial\Omega$, si ha:

$$(55) \qquad \int_{\partial B(x,r)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS_z + \int_{\partial B(y,r)} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS_z = 0.$$

Dato che $\lim_{z \to x} |z-x|^{N-1} u(z) = 0$, $\lim_{z \to y} |z-y|^{N-1} v(z) = 0$ e v ed u sono regolari in x ed y, rispettivamente, risulta:

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(x,r)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_z = \lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(y,r)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_z = 0.$$

Dato che $u(z) = \Phi(z-x) - h(z)$ ed h è regolare, si ha

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(x,r)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_z = \lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(x,r)} v(z) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(z-x) dS_z =$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(x,r)} v(z) dS_z = v(x).$$

Analogamente, $\lim_{r \to 0^+} \int_{\partial B(y,r)} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_z = u(y)$ e quindi la (55) implica che $u(y) = v(x)$. $\square$