LEMMA (Hopf) Sia $B = B(x_0, \rho)$ una palla contenuta in Ω e sia $u \in C^0(\overline{B})$. Supponiamo inoltre che $c \leq 0$ e

(i) $(L+c)[u] \geq 0$ in B;

(ii) esiste $p \in \partial B$ tale che $u(x) < u(p)$ per ogni $x \in B$ e, nel caso in cui $c \not\equiv 0$, sia $u(p) \geq 0$.

Se ℓ è una direzione tale che $\ell \cdot \nu(p) > 0$, dove $\nu(p)$ è il versore della normale esterna a ∂B in p, allora

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(p) - u(p - t\ell)}{t} > 0$$

e quindi, se la derivata $\frac{\partial u}{\partial \ell}(p)$ esiste, $\frac{\partial u}{\partial \ell}(p) > 0$.

Dim. Sia A la corona circolare $B(x_0,\rho) \setminus \overline{B(x_0, \rho/2)}$ e si ponga

$$v(x) = e^{-\alpha|x-x_0|^2} - e^{-\alpha\rho^2} \quad \text{per } x \in \overline{A} \text{ ed } \alpha > 0.$$

È chiaro che $v(p) = 0$ e

$$\frac{\partial v}{\partial \ell}(p) = -2\alpha(p - x_0)\cdot \ell \, e^{-\alpha\rho^2} = -2\alpha\rho \, e^{-\alpha\rho^2} \, \ell \cdot \nu(p) < 0.$$

Sia $M = u(p) = \max_{\overline{B}} u$; dimostriamo che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $u + \varepsilon v \leq M$ su $\overline{A}$.

Infatti, su $\partial B(x_0, \rho)$ si ha $v \equiv 0$ e quindi $u + \varepsilon v = u \leq M$; inoltre, dato che $u < M$ su $\partial B(x_0, \rho/2)$, risulta $\max_{\partial B(x_0,\rho/2)} u < M$ e quindi su $\partial B(x_0, \rho/2)$

$$u + \varepsilon v \leq \max_{\partial B(x_0,\rho/2)} u + \varepsilon\left(e^{-\alpha\rho^2/4} - e^{-\alpha\rho^2}\right) \leq M$$

se si sceglie $0 < \varepsilon \leq \left(M - \max_{\partial B(x_0,\rho/2)} u\right) / \left(e^{-\alpha\rho^2/4} - e^{-\alpha\rho^2}\right)$.

D'altra parte

$$(L+c)[v] = e^{-\alpha|x-x_0|^2}\Big\{4\alpha^2\langle A(x)(x-x_0), x-x_0\rangle - 2\alpha\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x) - 2b(x)\cdot(x-x_0) + $$
$$+ c(x)\Big\} - c(x)e^{-\alpha\rho^2} \geq$$

$$\geq e^{-\alpha|x-x_0|^2}\left\{4\lambda_0\alpha^2|x-x_0|^2-2\alpha\sup_{\overline{A}}\left(\sum_{i=1}^N a_{ii}+\rho|b|\right)-\sup_{\overline{A}}|c|\right\}.$$

Quindi se $x\in\overline{A}$ risulta:

$$(L+c)[v]\geq e^{-\alpha|x-x_0|^2}\left\{\lambda_0\alpha^2\rho^2-2\alpha\sup_{\overline{A}}\left(\sum_{i=1}^N a_{ii}+\rho|b|\right)-\sup_{\overline{A}}|c|\right\}$$

e quindi $(L+c)[v]>0$ se si sceglie α abbastanza grande.

Dato che $(L+c)[u+\varepsilon v]>0$ in A, per il TEOREMA 1 ed il COROLLARIO al TEOREMA 2, si ha che $u+\varepsilon v\leq M$ in A e quindi per $0<t<\frac{1}{2}\rho$ risulta che

$$\frac{(u+\varepsilon v)(p)-(u+\varepsilon v)(p-t\ell)}{t}=\frac{M-(u+\varepsilon v)(p-t\ell)}{t}\geq 0,$$

Perciò

$$\liminf_{t\to 0^+}\frac{u(p)-u(p-t\ell)}{t}\geq\varepsilon\liminf_{t\to 0^+}\frac{-v(p)+v(p-t\ell)}{t}=$$

$$=-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial \ell}(p)>0.\ \square$$

TEOREMA (Il principio di massimo forte)

Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ un aperto connesso (anche non limitato) e supponiamo che $u\in C^2(\Omega)$ soddisfi $(L+c)[u]\geq 0$ in Ω con $c\leq 0$ e sia tale che $\sup_{\Omega} u\geq 0$ se $c\not\equiv 0$.

Se $u(x_0)=\sup_{\Omega} u$ per qualche $x_0\in\Omega$, allora u è costante in Ω.

Dim. Sia $M=\sup_{\Omega} u$ e definiamo gli insiemi

$$F=\{x\in\Omega:\ u(x)=M\}\quad\text{e}\quad G=\{x\in\Omega:\ u(x)<M\};$$

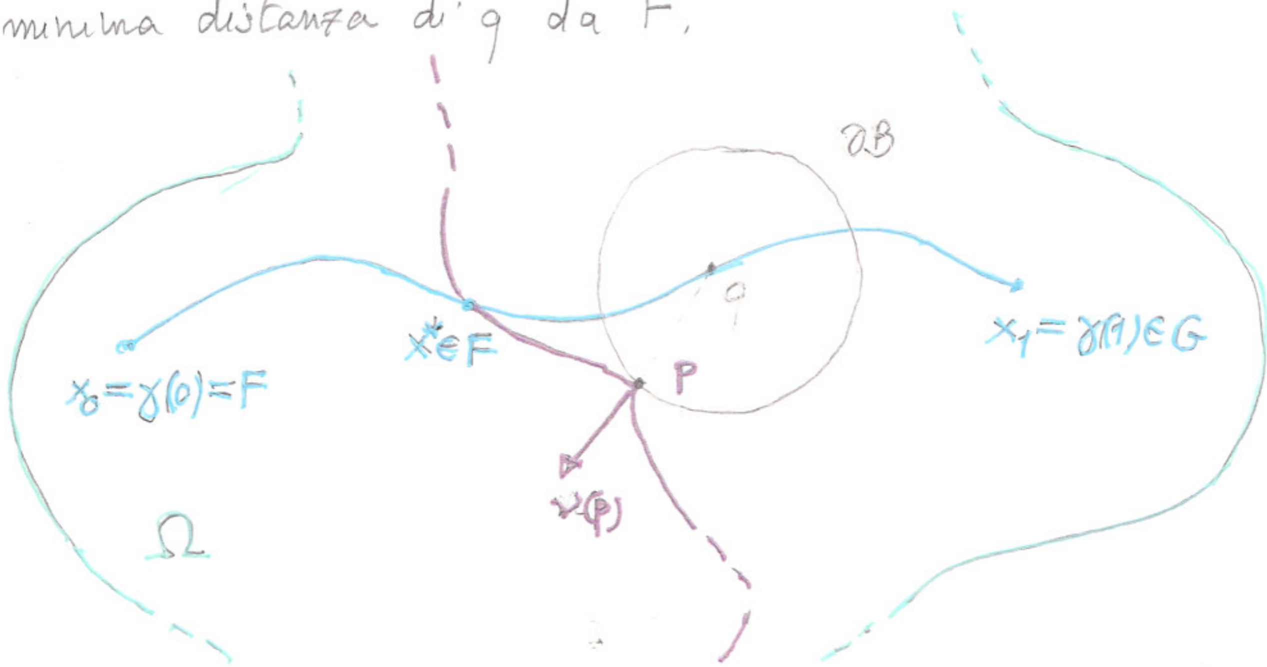
allora F è chiuso e non vuoto e G è aperto.

Poiché Ω è un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$, allora Ω è connesso per archi, cosicché, se $x_1\in G$, esiste una curva continua $\gamma:[0,1]\to\Omega$ tale che $\gamma(0)=x_0$ e $\gamma(1)=x_1$. Il sostegno di γ, $\Gamma=\{\gamma(t): t\in[0,1]\}$, è compatto e quindi $\text{dist}(\Gamma,\partial\Omega)>0$, se $\partial\Omega\neq\emptyset$.

Sia $t^*=\inf\{t:\ \gamma(s)\in G \text{ per } s>t\}$; allora $u(x^*)=M$ se $x^*=\gamma(t^*)$;

è possibile che $x^* = x_0$. Sia ora q un punto Γ tra x^* ed x_1 e tale che $|q - x^*| < \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$, e poniamo $B = B(q, \rho)$ con $\rho = \text{dist}(q, F)$. Allora $\rho \leq |q - x^*| < \text{dist}(\Gamma, \partial\Omega)$ e quindi $B \subset \Omega$, come pure $B \subset G$, per costruzione.

Dato che F è chiuso, c'è sicuramente un punto $p \in F \cap \partial B$ di minima distanza di q da F.



Con questa costruzione, la palla B soddisfa palesemente le ipotesi del lemma di Hopf: quindi $\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) > 0$.

Poiché $p \in F$, p è un punto di massimo interno per u e quindi $\nabla u(p) = 0$: assurdo. □

TEOREMA. Sia $u \in C^2(\Omega)$ una soluzione di $(L + c)[u] \geq 0$ in un dominio Ω e sia $p \in \partial\Omega$ tale che esiste una palla $B \subset \Omega$ tale che $p \in \partial B$.

Supponiamo che $u \in C^0(\Omega \cup \{p\})$ e che $u(p) = \sup_\Omega u$, con $u(p) \geq 0$ se $c \not\equiv 0$.

Se ℓ è una direzione che in p punta all'esterno di B, allora

$$\liminf_{t \to 0^+} \frac{u(p) - u(p - t\ell)}{t} > 0,$$

a meno che u sia costante in Ω.

Dim. Sia $B = B(x, \rho)$; posto $B' = B(q, \frac{1}{2}\rho)$ con $q = \frac{p + x}{2}$; allora $\overline{B'} \subset \Omega \cup \{p\}$ e $u \in C(\overline{B})$.

Se $u < u(p)$ in B', allora il lemma di Hopf implica la positività del limite inferiore. Se invece $u(x') = u(p)$ per qualche $x' \in B'$, allora $u(x') = \sup_\Omega u$ e quindi il principio di massimo forte implica che u è costante in Ω. $\square$

OSSERVAZIONE. Se $(L+c)[u] \geq 0$ in Ω e $\sup_\Omega u = 0$ in un'applicazione del principio di massimo, debole o forte, oppure se $\sup_B u = 0$ in un'applicazione del lemma di Hopf, allora la condizione $c \leq 0$ si può omettere.

Infatti, essendo $u \leq 0$, si ha:

$$(L - c^-)[u] = L[u] - c^- u \geq L[u] + c u = (L+c)[u] \geq 0$$

e $-c^- \leq 0$.

OSSERVAZIONE. (i) Oltre alla normale $\nu(p)$, un'altra importante direzione esterna ad Ω è la <u>conormale</u> $A(p)\nu(p)$; infatti

$$\langle A(p)\nu(p), \nu(p) \rangle \geq \lambda_0 |\nu(p)|^2 = \lambda_0 > 0.$$

(ii) Il raggio della palla B' si può scegliere arbitrariamente piccolo. Si possono allora indebolire le ipotesi del teorema richiedendo che le funzioni

$$\frac{a_{ij}(x)}{(A(x)\nu(x), \nu(x))}, \quad \frac{b_i(x)}{(A(x)\nu(x), \nu(x))}, \quad \frac{c(x)}{(A(x)\nu(x), \nu(x))}$$

rimangano limitate in un intorno di p.

(iii) Il teorema rimane ancora valido anche se L non è ellittico su $\partial\Omega$, a patto che $\partial\Omega$ non sia una superficie caratteristica per L.

Concludiamo questa dispensa con un teorema di unicità abbastanza generale.

TEOREMA. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato tale che $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \phi$; supponiamo inoltre che ogni punto di Γ_1 giaccia sulla frontiera di una palla contenuta in Ω, Sia L un operatore uniformemente ellittico e con coefficienti limitati in Ω, sia c limitata e non positiva in Ω ed, infine, sia α una funzione non negativa su Γ_1.

Allora il problema al contorno di tipo misto

(1) $(L+c)[u] = f$ in Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \ell} + \alpha(x) u = \varphi_1$ su Γ_1, $u = \varphi_2$ su Γ_2,

dove ℓ è una direzione che punta esternamente ad Ω su Γ_1, ha al più una soluzione $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, a meno che

$$c \equiv 0 \text{ in } \Omega, \quad \alpha \equiv 0 \text{ su } \Gamma_1, \quad \Gamma_2 = \phi,$$

nel qual caso, due soluzioni differiscono per una costante.

Dim. Siano u_1 ed u_2 due soluzioni; allora $u = u_1 - u_2$ soddisfa il problema

(2) $(L+c)[u] = 0$ in Ω, $\dfrac{\partial u}{\partial \ell} + \alpha(x) u = 0$ su Γ_1, $u = 0$ su Γ_2.

Per il principio di massimo debole $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+$; inoltre, se fosse $\max_{\overline{\Omega}} u \geq 0$, per il corollario al principio di massimo debole, sarebbe $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$, cioè esisterebbe $p \in \partial\Omega$ tale che $u(p) = \max_{\overline{\Omega}} u$. È chiaro inoltre che $p \in \Gamma_1$.

Se u non fosse costante, allora $\dfrac{\partial u}{\partial \ell}(p) > 0$ e quindi

$$0 < \frac{\partial u}{\partial \ell}(p) = -\alpha(p)\, u(p) \leq 0,$$

cioè troviamo una contraddizione. Perciò u è costante oppure $u \leq 0$. Ripetendo il ragionamento per $-u$, otteniamo che u deve essere costante (uguale a zero o no).

Se u è una costante non nulla, allora (2) implica che

$$c \equiv 0 \text{ in } \Omega, \quad \alpha \equiv 0 \text{ su } \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \phi. \quad \square$$

OSSERVAZIONE. Il problema (1) con $\alpha \equiv 0$, $\Gamma_2 = \phi$ e con $\ell = A(x)\,\nu(x)$ è il cosiddetto <u>problema di Neumann</u>.