12.1 OPERATORI ELLITTICI.

Consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine:

(1) $$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Si può sempre supporre che $a_{ji}(x) = a_{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,N$, e cioè che la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$ sia <u>simmetrica</u>.

L'operatore $\mathcal{L}$ si dice <u>ellittico</u> in un punto x se esiste $\lambda(x) > 0$ tale che

(2) $$\langle A(x)\xi, \xi \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$. Si dice che $\mathcal{L}$ è ellittico in un dominio Ω se $\mathcal{L}$ è ellittico in ogni $x \in \Omega$. Si dice infine che $\mathcal{L}$ è <u>uniformemente ellittico</u> in Ω se la (2) vale per ogni $x \in \Omega$ ed esiste un numero $\lambda_0 > 0$ tale che $\lambda(x) \geq \lambda_0$ per ogni $x \in \Omega$.

Sia R una matrice $N \times N$ e sia

(3) $$y = Rx$$

un cambiamento di coordinate lineare. La (3) è una <u>rotazione</u> se R è una matrice ortogonale: $R^* R = I$, dove R^* è la trasposta di R.

TEOREMA 1. L'ellitticità è invariante per rotazioni.

DIM. Sia $R = (r_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$; dato che $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = r_{ij}$, si ha:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j,k,\ell=1}^{N} a_{ij}(x)\, r_{ki}\, r_{\ell j} \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_\ell}.$$

Posto $b_{k\ell}(y) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(R^* y)\, r_{ki}\, r_{\ell j}$, l'operatore $\mathcal{L}$ si riscrive:

$$\mathcal{L} = \sum_{k,\ell=1}^{N} b_{k\ell}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_\ell}.$$

Se poniamo poi $\eta = R^* \xi$ e $B(y) = (b_{k\ell}(y))_{k,\ell=1,\dots,N}$, risulta:

$$< B(y)\xi, \xi > = \sum_{k,\ell=1}^{N} \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) r_{ki} r_{\ell j} \right) \xi_k \xi_\ell =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \left(\sum_{k=1}^{N} r_{ki} \xi_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{N} r_{\ell j} \xi_\ell \right) =$$

$$= < A(x)\eta, \eta > \geq \lambda(x) |\eta|^2 = \lambda(x) |\xi|^2,$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$. Ciò prova che l'ellitticità è invariante per rotazioni ed anche che la costante di ellitticità si conserva. □

Da un teorema di algebra lineare sappiamo che ogni matrice simmetrica A può essere diagonalizzata mediante una matrice ortogonale R, cioè esiste R ortogonale tale che $B = RAR^*$ è diagonale. Gli elementi b_{kk} della diagonale di B si dicono gli autovalori di A, le righe di R sono gli autovettori di A.

Se $\mathcal{L}$ è ellittico ed R è una matrice diagonalizzante $A(x)$, dal TEOREMA 1 otteniamo che

$$\lambda(x) |\xi|^2 \leq \sum_{k,\ell=1}^{N} b_{k\ell}(x) \xi_k \xi_\ell = \sum_{k=1}^{N} b_{kk}(x) \xi_k^2$$

e quindi ogni autovalore di $A(x)$ è maggiore o uguale a $\lambda(x)$. E' chiaro che, se $\mathcal{L}$ non è ellittico, almeno un autovalore di $A(x)$ è non positivo.

TEOREMA 2. L'operatore $\mathcal{L}$ in (1) è ellittico in x_0 se e solo se esiste una trasformazione lineare $z = Sx$ che trasforma $\mathcal{L}$ in x_0 nell'operatore di Laplace nelle coordinate $z_1, \dots, z_N$.

Dim. Abbiamo già visto che, se R è la matrice le cui righe sono gli autovettori di $A(x_0)$, allora, posto $y = Rx$ e $B(y_0) = R\,A(R^* y_0)\,R^*$, si ha:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} b_{ii}(y_0) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}.$$

Scelta ora una matrice C tale che

$$C_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{b_{ii}(y_0)}}, \quad i,j = 1,\dots,N,$$

e posto $z = Cy$, si ottiene $\frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \frac{1}{b_{ii}(y_0)} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$ e quindi

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}.$$

La trasformazione lineare cercata è $z = Sx$ con $S = CR$. $\square$

Un operatore

$$L + c = \mathcal{L} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$$

si dice *ellittico* in x o *uniformemente ellittico* in Ω se $\mathcal{L}$ è ellittico in x o *uniformemente ellittico* in Ω.