2.2 Il Principio di Massimo Debole

Sia

$$L = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

un operatore uniformemente ellittico in un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con coefficienti $a_{ij}(x)$ e $b_i(x)$ misurabili e limitati in Ω.

Teorema 1 (Principio di massimo debole per L)

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e sia $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Se $u \in C^2(\Omega)$ e $L[u] \geq 0$ in Ω, allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u .$$

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per $\alpha > 0$ da scegliere, sia

$$v(x) = u(x) + \varepsilon e^{\alpha x_1}, \quad x \in \overline{\Omega},$$

Dato che

$$L[e^{\alpha x_1}] = \left[a_{11}(x)\alpha^2 + b_1(x)\alpha\right] e^{\alpha x_1} \geq \left(\lambda \alpha^2 - \alpha \sup_{\Omega} |b_1|\right) e^{\alpha x_1},$$

abbiamo che $L[e^{\alpha x_1}] > 0$ se $\alpha > \frac{1}{\lambda} \sup_{\Omega} |b_1|$.

Quindi $L[v] > 0$ in Ω con questa scelta di α.

Se esistesse $x_0 \in \Omega$ tale che $v(x_0) = \sup_{\Omega} v$, scegliamo $z_1, \dots, z_N$ coordinate che trasformino in x_0 l'operatore $\mathcal{L}$ in quello di Laplace. Dato che x_0 è un punto di massimo relativo, si ha che

$$\frac{\partial v}{\partial z_k}(x_0) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z_k^2}(x_0) \leq 0, \quad k = 1, \dots, N,$$

e quindi $L[v](x_0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial z_k^2}(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \tilde{b}_k(x_0) \frac{\partial v}{\partial z_k}(x_0) \leq 0$,

cioè otteniamo una contraddizione.

Perciò, per ogni $\varepsilon > 0$ e tutti gli $x \in \overline{\Omega}$, risulta:

$$u(x) < v(x) \leq \max_{\partial\Omega} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{x \in \partial\Omega}(e^{\alpha x_1}).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$. □

TEOREMA 2 (Principio di massimo debole per $L+c$)
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato, $c(x)$ limitata e non negativa in Ω ed $u \in C^0(\overline{\Omega})$.
Se $u \in C^2(\Omega)$ e $(L+c)[u] \geq 0$ in Ω, allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Dim. Sia $\Omega^+ = \{x \in \Omega \,;\, u(x) > 0\}$; Ω^+ è aperto.
Se Ω^+ è vuoto, allora $\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0$ ed il teorema è vero.
Se Ω^+ non è vuoto, dato che $L[u] \geq -cu$ e $c \leq 0$ in Ω, otteniamo che $L[u] \geq 0$ in Ω^+. Per il teorema precedente $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{\Omega^+}} u = \max_{\partial\Omega^+} u$, cioè esiste $x_0 \in \partial\Omega^+$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega^+}} u > 0$.
Se fosse $x_0 \in \Omega$, esisterebbe $\delta > 0$ tale che $u > 0$ in $B(x_0, \delta)$; d'altra parte $B(x_0, \delta)$ deve contenere punti di $\Omega \setminus \Omega^+$, perché $x_0 \in \partial\Omega^+$ e quindi $u \leq 0$ in tali punti. Questa è una contraddizione e quindi $x_0 \in \partial\Omega$. $\square$

COROLLARIO. Nelle ipotesi del teorema, se $\max_{\partial\Omega} u \geq 0$, allora

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Dim. Dato che $\max_{\partial\Omega} u \geq 0$, si ha che $\max_{\partial\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u^+$ e quindi

$$\max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ = \max_{\partial\Omega} u. \ \square$$

TEOREMA. Il problema di Dirichlet in un dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$:

$$(L+c)[u] = f \ \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \ \text{ su } \partial\Omega,$$

ha al più una soluzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Dim. Se u_1 ed u_2 sono due soluzioni, $u = u_1 - u_2$ soddisfa

$$(L+c)[u] = 0 \ \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \ \text{ su } \partial\Omega,$$

e quindi

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ = 0,$$

ossia $u \leq 0$ su $\overline{\Omega}$. Applicando lo stesso ragionamento a $-u$, si ottiene $u \geq 0$ su $\overline{\Omega}$.

OSSERVAZIONE. Esaminando bene le dimostrazioni dei due teoremi, ci si accorge che l'uniforme ellitticità di L e la limitatezza dei suoi coefficienti e di c non sono essenziali. Basta supporre che

$$\frac{1}{\lambda(x)} \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x), \quad \frac{|b(x)|}{\lambda(x)} \quad e \quad \frac{-c(x)}{\lambda(x)}$$

siano localmente limitate in Ω.

OSSERVAZIONE. L'ipotesi $c(x) \leq 0$ per $x \in \Omega$ è essenziale.

La funzione $u(x) = e^{-|x|^2}$ soddisfa l'equazione

$$\Delta u + c(x)\, u = 0 \qquad \text{con} \quad c(x) = 2N - 4|x|^2.$$

In $\Omega = B(0, \sqrt{N/2})$ si ha che $c(x) > 0$, mentre

$$\max_{\overline{\Omega}} u = u(0) = 1 > e^{-N/2} = \max_{\partial\Omega} u.$$

OSSERVAZIONE. Nel TEOREMA 2 non si può rimpiazzare u^+ con u.

La funzione $u = -3N - |x|^2$ soddisfa:

$$\Delta u - u = N + |x|^2 > 0.$$

Se $\Omega = B(0,1)$, si ha: $\max_{\overline{\Omega}} u = -3N > -3N-1 = \max_{\partial\Omega} u$.

OSSERVAZIONE. La limitatezza di Ω è essenziale.

Siano infatti $\Omega = (0,\pi) \times (-\infty, +\infty)$ ed $u(x,y) = e^{y} \sin x$; u è armonica in Ω, nulla su $\partial\Omega$ e positiva in Ω.

Si noti però che il problema di Dirichlet

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \varphi \text{ su } \partial\Omega,$$

ammette al più una soluzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ che converge per $x^2 + y^2 \to \infty$.