UN PRINCIPIO DI MASSIMO GENERALIZZATO

Abbiamo osservato che la condizione $c \leq 0$ non può essere rimossa. Un altro esempio è la funzione $u(x,y) = \sin x \sin y$ che soddisfa l'equazione

$$\Delta u + 2u = 0$$

nel quadrato $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < \pi\}$, è nulla su ∂Q, ma assume il massimo in $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \in Q$.

In certi casi però si può estendere il principio di massimo senza richiedere che $c \leq 0$.

Supponiamo che $(L+c)[u] \geq 0$ in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ in cui L sia uniformemente ellittico. Sia w una funzione positiva in $\overline{\Omega}$ e definiamo $v(x) = u(x)/w(x)$. Dato che

$$\nabla u = w \nabla v + v \nabla w \quad e \quad \nabla^2 u = w \nabla^2 v + 2 \nabla w \otimes \nabla v + v \nabla^2 w,$$

otteniamo

$$\frac{1}{w} (L+c)[u] = \mathcal{L} v + \left[\frac{2}{w} A(x) \nabla w + b(x) \right] \cdot \nabla v + \frac{1}{w} (L+c)[w] \cdot v.$$

TEOREMA. Sia L uniformemente ellittico in Ω e con coefficienti limitati. Supponiamo che esista w tale che

$$w > 0 \text{ in } \overline{\Omega}, \quad (L+c)[w] \leq 0 \text{ in } \Omega.$$

Se $(L+c)[u] \geq 0$ in Ω, allora u/w non può assumere massimo non-negativo in Ω, a meno che u/w non sia costante.

Se u/w assume massimo non-negativo in un punto $p \in \partial\Omega$ che giace sulla frontiera di una palla contenuta in Ω, allora

$$\frac{\partial}{\partial \ell} \left(\frac{u}{w} \right)(p) > 0,$$

per ogni direzione ℓ tale che $\ell \cdot \nu(p) > 0$, a meno che u/w non sia costante.

Dim, Siano

$$b'(x) = \frac{2}{w} A(x)\nabla w + b(x) \quad \text{e} \quad c'(x) = \frac{(L+c)[w](x)}{w(x)}.$$

Posto $L' = \mathcal{L} + b'(x)\cdot\nabla$, si ha:

$$(L'+c')[u/w] \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

con $c' \leq 0$ in Ω. La conclusione segue dal principio di massimo forte e dal lemma di Hopf applicati ad $L'+c'$. $\square$

TEOREMA. Se esiste una funzione $w>0$ su $\overline{\Omega}$ tale che $(L+c)[w] \leq 0$ in Ω e se Ω è limitato, allora il problema di Dirichlet

$$(L+c)[u] = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

ammette al più una soluzione nella classe $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

TEOREMA (Principio di massimo per domini sottili)

Supponiamo che Ω sia contenuto nella striscia

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^N,\ s < x < t\}$$

e che sia limitato.

Se $t-s$ è abbastanza piccolo, esiste $w>0$ in $\overline{\Omega}$ e tale che $(L+c)[w] \leq 0$ in Ω, a patto che c sia limitata e che b_1 sia limitato inferiormente.

Dim. Sia $w(x) = 1 - \beta e^{\alpha(x_1-s)}$ con $\alpha, \beta > 0$; risulta:

$$(L+c)[w] = -\beta\{\alpha^2 a_{11}(x) + \alpha b_1(x) + c(x)\} e^{\alpha(x_1-s)} + c(x).$$

Poiché L è uniformemente ellittico, $a_{11}(x) \geq \lambda_0$; inoltre, possiamo supporre che esistono $m, M \geq 0$ tali che $-m \leq c \leq M$ ed $h \geq -m$.

Perciò:

$$(L+c)[w] \leq -\beta\{\alpha^2\lambda_0 - \alpha m - m\} e^{\alpha(x_1-s)} + M = M\left[1 - e^{\alpha(x_1-s)}\right] \leq 0,$$

se scegliamo $\beta = \dfrac{M}{\alpha^2\lambda_0 - m(\alpha+1)}$ ed $\alpha > m + \sqrt{m^2 + 4\lambda_0 m}$.

Affinché w sia positiva in $\overline{\Omega}$, deve essere

$$\beta\, e^{\alpha(t-s)} < 1$$

e cioè

$$t-s < \frac{1}{\alpha} \log \frac{\alpha^2 b - (\alpha+1)m}{M}$$

avendo cura di scegliere α tale che $\alpha^2 b - m\alpha - (m+M) > 0$. $\square$

ESEMPIO. Sia Ω un dominio tale che $\overline{\Omega} \subset Q$. Allora il problema di Dirichlet

$$\Delta u + 2u = f \ \text{ in } \Omega, \qquad u = \varphi \ \text{ su } \partial\Omega,$$

ha al più una soluzione $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$.

Infatti, se u_1 ed u_2 sono due soluzioni, $u = u_1 - u_2$ soddisfa

(1) $$\Delta u + 2u = 0 \ \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \ \text{ su } \partial\Omega.$$

Dato che $w(x,y) = \sin x \sin y > 0$ su $\overline{\Omega}$ e $\Delta w + 2w = 0$ in Ω, per il principio di massimo generalizzato, esiste $p \in \partial\Omega$ tale che

$$u(x) \le \frac{u(p)}{w(p)}\, w(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \overline{\Omega}.$$

Poiché $-u$ soddisfa ancora (1), anche $-u \le 0$ su $\overline{\Omega}$ e dunque $u \equiv 0$ su $\overline{\Omega}$.