FUNZIONI ARMONICHE NEL PIANO E FUNZIONI OLOMORFE.

Sfruttando l'identificazione di $\mathbb{R}^2$ con il piano complesso, si osserva che le funzioni armoniche nel piano sono in relazione stretta con le funzioni olomorfe. In questa dispensa, richiamiamo (senza dimostrazione) le definizioni ed i risultati sulle funzioni olomorfe che ci saranno utili in seguito.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia $z = x+iy \in \Omega$. Una funzione $f(z) = u(z) + i\,v(z)$ di classe $C^1(\Omega)$ e tale che esista il limite

$$\lim_{\mathbb{C}\ni h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

per ogni $z \in \Omega$, si dice <u>olomorfa</u> in Ω.

Questa definizione equivale a richiedere che

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \quad \text{per ogni } z\in\Omega,$$

oppure che u e v soddisfino le <u>equazioni di Cauchy-Riemann</u>

$$(1) \qquad u_x = v_y \;, \quad u_y = -v_x \quad \text{in } \Omega,$$

dato che $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Queste equazioni implicano subito che, se f è olomorfa in Ω, la parte reale u e la parte immaginaria v di f sono funzioni armoniche in Ω.

Viceversa, se u è armonica in un aperto Ω semplicemente connesso, poiché la forma differenziale $-u_y\,dx + u_x\,dy$ è esatta in Ω, esiste v che soddisfa (1) in Ω a meno di costanti additive. Perciò, possiamo affermare che ogni funzione armonica è localmente la parte reale di una funzione olomorfa.

Si dimostra che le funzioni olomorfe (come quelle armoniche) sono analitiche, cioè sono sviluppabili in serie di Taylor nei dintorni di ogni punto in cui siano definite.

Si dice che $f(z)$ ha uno <u>zero</u> <u>di</u> <u>molteplicità</u> m <u>in</u> z_0 se esiste una funzione olomorfa $g(z)$ tale che $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$.

Se $f(z)$ è olomorfa in un intorno di z_0, eccettuato al più z_0, si dice che ha un polo di ordine p in z_0 se sussiste lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \dots + \frac{b_p}{(z-z_0)^p} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

in un intorno di z_0.

Il seguente risultato ci sarà utile in seguito.

TEOREMA (Principio dell'argomento)

Sia $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva semplice chiusa, orientata positivamente in senso anti-orario e supponiamo che

(i) f sia olomorfa all'interno di γ e sopra γ, eccettuati al più un numero finito di poli all'interno di γ;

(ii) f non abbia zeri su γ.

Sia $\arg f(z)$ l'angolo formato da $f(z)$ su γ con il semiasse positivo delle ascisse e sia $\Delta_\gamma \arg f$ l'aumento di $\arg f$ quando z compie un giro completo su γ.

Allora

$$\Delta_\gamma \arg f = N - P,$$

dove N e P sono, rispettivamente, il numero degli zeri e dei poli di f all'interno di γ, contati secondo le loro rispettive molteplicità e ordini.

Si può dimostrare che una funzione olomorfa in un dominio Ω dà luogo ad un'applicazione conforme in ogni punto $z_0 \in \Omega$ in cui $f'(z_0) \neq 0$, cioè f trasforma due curve che si incontrano in z_0 in due curve che si incontrano in $f(z_0)$ lasciando invariato l'angolo formato da tali curve.

Sussiste il seguente famoso Riemann Mapping Theorem.

TEOREMA. Sia Ω un dominio semplicemente connesso del piano esteso $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ la cui frontiera contenga almeno due punti. Sia $z_0\in\Omega$.

Allora esiste una sola applicazione conforme biunivoca $w=f(z)$ che trasforma Ω in $B(0,1)$ e tale che

$$f(z_0)=0 \quad e \quad f'(z_0)>0.$$

Concludiamo questa dispensa, calcolando le curvature delle linee di livello e delle linee di massima pendenza di una funzione in forma complessa.

Sia $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ una curva piana regolare, parametrizzata secondo la lunghezza d'arco s. Se le funzioni $x(s)$ ed $y(s)$ parametrizzano il punto sulla curva, posto $z(s)=x(s)+iy(s)$, $z(s)$ rappresenta, in forma complessa, il punto sulla curva. È chiaro allora che $z'(s)$ rappresenta il vettore velocità $t(s)$ che, in questo caso, è unitario, cioè $|z'(s)|=1$, mentre, se si sceglie di percorrere la curva in senso anti-orario al crescere di s, $iz'(s)$ rappresenta il versore normale $n(s)$ alla curva che punta alla destra di essa.

La curvatura $k(s)$ di γ in $z(s)$ si può definire come la variazione infinitesima dell'angolo $\theta(s)$ formato dal versore tangente (o da quello normale) con una direzione fissata al variare di s.

Ricordando che, se $w\in\mathbb{C}$ e $w\neq 0$,

$$\log w = \log|w| + i\arg w,$$

dove $\arg w$ è l'angolo (con segno) formato dal semiasse reale positivo e da w, possiamo scrivere che

$$k(s)=\frac{d}{ds}\arg z'(s)=\frac{d}{ds}\,\mathrm{Im}\left[\log z'(s)\right]=\mathrm{Im}\left[\frac{z''(s)}{z'(s)}\right]=$$

$$=\mathrm{Im}\left[z''(s)\,\overline{z'(s)}\right],$$

dato che $z'(s)\,\overline{z'(s)}=|z(s)|^2=1$.

Con questa definizione, si verifica che il vettore $k(s)n(s)$, parallelo alla normale, punta verso il centro di curvatura di γ se $k(s)$ è positiva.

ESEMPIO. Possiamo parametrizzare la circonferenza con centro nell'origine e raggio R così:

$$z(s) = R\,e^{is/R}, \quad 0 \le s \le 2\pi R.$$

Allora $t(s) = z'(s) = i\,e^{is/R}$ ed $n(s) = -e^{is/R}$; inoltre $\arg z'(s) = i\frac{\pi}{2} + is/R$ e quindi

$$k(s) = \frac{1}{R}.$$

come ci si aspetta; il vettore $k(s)n(s) = -\frac{1}{R}e^{is/R}$ punta verso l'origine.