PUNTI CRITICI DI UNA FUNZIONE ARMONICA NEL PIANO

Sia $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$, dove $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio limitato. Per ogni decomposizione $\partial\Omega = J^+ \cup J^-$ di $\partial\Omega$ tale che

(a) $J^+ \cap J^- = \phi$; (b) $\varphi \geq 0$ in J^+ e $\varphi < 0$ in J^-;

indichiamo con $M(J^+)$ il numero di componenti connesse di J^+ che sono sottoinsiemi propri di una componente connessa di $\partial\Omega$.

Sia infine M il minimo di $M(J^+)$ al variare di tali decomposizioni (J^+, J^-) (se rimpiazziamo $M(J^+)$ con l'analogo $M(J^-)$, il risultato non cambia).

TEOR 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato la cui frontiera $\partial\Omega$ è composta da n curve semplici chiuse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ di classe $C^{1,\alpha}$.

Sia $\ell : \partial\Omega \to S^1$ un campo vettoriale di classe e tale che

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{+\partial\Omega} (\arg \ell) = P$$

per qualche intero P.

Sia infine $u \in C^1(\bar\Omega) \cap C^2(\Omega)$ e armonica in Ω e si ponga $\varphi = Du \cdot \ell$ su $\partial\Omega$.

Se M (relativo a φ) è finito ed u non ha punti critici in $\partial\Omega$, allora u ha un numero finito di punti critici $z_1, \dots, z_K$ in Ω con molteplicità $m(z_1), \dots, m(z_K)$ e risulta che

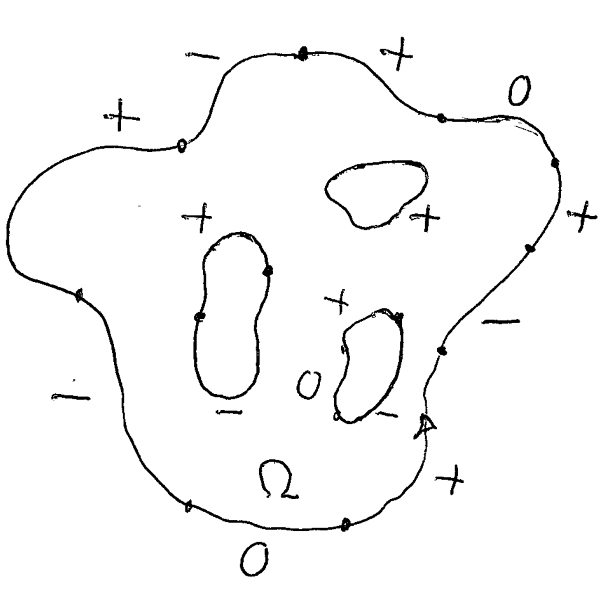
$$\sum_{k=1}^{K} m(z_k) \leq M - P.$$

Esempi:

$\ell = \nu$, $\ell = \tau$,

$\ell = \frac{x}{|x|}$, $\ell = (1,0)$

$\ell = (0,1)$



$M = 3+1+1 = 5$

Dim. Introduciamo come di solito la funzione olomorfa $f = u_x - i u_y$, cosicché

$$\sum_{k=1}^{K} m(z_k) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{+\partial\Omega} (\arg f).$$

Sia (J^+, J^-) una decomposizione di $\partial\Omega$ tale che $M(J^+) = M$. Dato che

$$\varphi = Du \cdot \ell = |Du| \cos(\arg f + \arg \ell),$$

allora

$$|\arg f + \arg \ell| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{su } J^+ \text{ e}$$

$$|\arg f + \arg(-\ell)| \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{su } J^-.$$

Se Γ_j è una componente connessa di $\partial\Omega$ tutta contenuta in J^+ o in J^-, allora

$$|\Delta_{\Gamma_j} (\arg f) + \Delta_{\Gamma_j} (\arg \ell)| = |\Delta_{\Gamma_j} (\arg f + \arg \ell)| \leq \pi$$

e quindi, poiché il primo membro deve essere un multiplo intero di 2π, esso deve essere nullo e quindi

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg f) = -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg \ell).$$

Se invece Γ_j interseca sia J^+ che J^-, allora Γ_j contiene $J^+ \cap \Gamma_j$ e $J^- \cap \Gamma_j$ hanno lo stesso numero di componenti e, se M_j è il numero di componenti di $J^+ \cap \Gamma_j$, risulta che

$$\sum_{j=1}^{n} M_j = M,$$

Se γ_+ e γ_- sono due componenti consecutive di $J^+ \cap \Gamma_j$ e $J^- \cap \Gamma_j$, rispettivamente, otteniamo allora che

$$\left| \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_+ \cup \gamma_-} (\arg f) + \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma_+ \cup \gamma_-} (\arg \ell) \right| \leq 1$$

e quindi

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg f) \leq -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma_j} (\arg \ell) + M_j .$$

Sommando dunque per $j = 1, \dots, n$, concludiamo che

$$\sum_{k=1}^{K} m(z_k) = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega} (\arg f) \leq -\frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial\Omega} (\arg \ell) + M =$$

$$= M - P . \qquad \square$$

Enunciamo senza dimostrazione il seguente teorema che tratta il caso in cui u possa avere dei punti critici su $\partial\Omega$.

TEOR. 2. Siano Ω, ℓ, u e φ come nel teorema precedente. Si indichi con M^+ ed M^- il numero di componenti connesse degli insiemi

$$I^+ = \{ z \in \partial\Omega : \varphi(z) > 0 \} \quad \text{e} \quad I^- = \{ z \in \partial\Omega : \varphi(z) < 0 \},$$

rispettivamente, che sono sottoinsiemi propri di una componente connessa di $\partial\Omega$.

Se $M^+ + M^-$ è finito, allora

$$\sum_{k=1}^{K} m(z_k) \leq \left[\frac{M^+ + M^-}{2} \right] - P ,$$

dove $[t]$ = parte intera di t.

ESTENSIONI AD EQUAZIONI ELLITTICHE

1. Gli stessi teoremi sui punti critici fin qui presentati possono essere dimostrati per soluzioni di equazioni ellittiche della forma

$$(1) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y = 0 \quad \text{in } \Omega$$

dove a, b e c sono funzioni lipschitziane in $\overline{\Omega}$ e $d, e \in L^\infty(\Omega)$. L'equazione si suppone uniformemente ellittica, richiedendo che

$$ac - b^2 = 1 \quad \text{in } \Omega.$$

Questa estensione fa uso di due risultati della teoria delle funzioni analitiche generalizzate (si veda I. N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Pergamon Press, Oxford 1962).

Il primo risultato è il seguente

PRINCIPIO DI UNIFORMIZZAZIONE. Esiste un'applicazione quasi-conforme $\zeta : \Omega \to \zeta(\Omega) \subset \mathbb{C}$, $\zeta(z) = \xi(z) + i\eta(z)$, tale che, se $u(z)$ è soluzione di (1), allora la funzione $U(\zeta)$ tale che $u(z) = U(\zeta(z))$ è soluzione di

$$(2) \quad \Delta U + P U_\xi + Q U_\eta = 0 \quad \text{in } \zeta(\Omega)$$

con $P, Q \in L^\infty(\zeta(\Omega))$.

Dim. Si noti che

$$\partial_x = \partial_z + \partial_{\bar z} \; ; \quad \partial_y = i(\partial_z - \partial_{\bar z}) \; ; \quad \partial_{xx} = \partial_{zz} + 2\partial_{z\bar z} + \partial_{\bar z \bar z} \; ;$$

$$\partial_{xy} = i(\partial_{zz} - \partial_{\bar z \bar z}) \; ; \quad \partial_{yy} = -\partial_{zz} + 2\partial_{z\bar z} - \partial_{\bar z \bar z}.$$

Dalla (1) si ottiene quindi che

$$(3) \quad A u_{zz} + 2B u_{z\bar z} + \bar A u_{\bar z \bar z} + C u_z + \bar C u_{\bar z} = 0,$$

dove

$$A = a - c + 2ib\ ; \quad B = a + c\ ; \quad C = d + ie.$$

Dato che

$$u_z = U_\xi \xi_z + U_{\bar\xi} \bar\xi_z\ ;$$

$$u_{zz} = U_{\xi\xi} \xi_z^2 + 2 U_{\xi\bar\xi} \xi_z \bar\xi_z + U_{\bar\xi\bar\xi} \bar\xi_z^2 + U_\xi \xi_{zz} + U_{\bar\xi} \bar\xi_{zz}\ ;$$

$$u_{z\bar z} = U_{\xi\xi} \xi_z \xi_{\bar z} + (|\xi_z|^2 + |\xi_{\bar z}|^2) U_{\xi\bar\xi} + U_{\bar\xi\bar\xi} \bar\xi_z \bar\xi_{\bar z} + U_\xi \xi_{z\bar z} + U_{\bar\xi} \bar\xi_{z\bar z}\ ;$$

dalla (3) si ottiene che

$$(A\xi_z^2 + 2B\xi_z\xi_{\bar z} + \bar A \xi_{\bar z}^2) U_{\xi\xi} + \overline{(A\xi_z^2 + 2B\xi_z\xi_{\bar z} + \bar A \xi_{\bar z}^2)}\, U_{\bar\xi\bar\xi} +$$

$$+ D U_{\xi\bar\xi} + E U_\xi + \bar E U_{\bar\xi} = 0,$$

dove D ed E si possono calcolare.

La (2) si ottiene azzerando i primi due termini con la scelta

$$(4) \qquad \xi_{\bar z} = \frac{-B + \sqrt{B^2 - |A|^2}}{\bar A}\, \xi_z,$$

ponendo $P = E/D$, $Q = \bar E / D$ e osservando che

$$\Delta U = 4 U_{\xi\bar\xi}.$$

Si noti che, se κ è il coefficiente in (4), si ha:

$$(5) \qquad |\kappa|^2 = \frac{(a+c-2)^2}{(a-c)^2 + 4b^2} = \frac{a+c-2}{a+c+2} < 1. \qquad \square$$

Oss. Sia $F = U_\xi - i U_\eta$; dalla (2) segue che

$$(6) \qquad F_{\bar\xi} + RF + \bar R \bar F = 0 \quad \text{in } \xi(\Omega),$$

dove $4R = P + iQ$.

Le soluzioni di equazioni del tipo (6) si dicono <u>funzioni analitiche generalizzate</u> o <u>pseudo-analitiche</u>.

Per esse vale il seguente

PRINCIPIO DI SIMILARITÀ. Esistono $s(\zeta)$ hölderiana in $\mathbb{C}$ e $G(\zeta)$ olomorfa in $\zeta(\Omega)$ tali che

$$F(\zeta) = e^{s(\zeta)} G(\zeta) \quad , \quad \zeta \in \zeta(\Omega).$$

Inoltre $s(\zeta)$ si può scegliere con valori reali sulla frontiera di $\zeta(\Omega)$.

Da questo principio segue allora che ogni punto critico z_0 di u è isolato ed ha molteplicità finita m_0, dato che $\zeta_0 = \zeta(z_0)$ è uno zero di G.

Oss. Un'applicazione quasi-conforme si può definire in vari modi: il seguente è più appropriato nello studio delle equazioni ellittiche.

Si dice che un omeomorfismo $\zeta : \Omega \to \zeta(\Omega)$ è <u>K-quasi-conforme</u> se possiede derivate distribuzionali localmente in $L^2(\Omega)$ e se esiste $K \in [0,1)$ tale che

$$|\zeta_{\bar z}| \leq K\, |\zeta_z| \quad \text{quasi ovunque in } \Omega,$$

La (5) implica che la ζ definita da (4) è K-quasi-conforme con

$$K = \max_{\Omega} \left(\frac{a+c-2}{a+c+2} \right).$$

La (7) è equivalente a

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2 \leq 2\, \frac{K+1}{1-K} \left(\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x \right) \quad \text{q.o. in } \zeta(\Omega).$$

Si osservi infine che ζ è conforme se $K=0$; ciò si verifica se e solo se $a+c=2$ e cioè se e solo se

$$a = c \quad \text{e} \quad b = 0 .$$

Oss. Un'ulteriore generalizzazione si ottiene per equazioni uniformemente ellittiche in forma di divergenza:

$$(8) \qquad \operatorname{div}(A(x)\,Du) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

dove $A(x)$ è una matrice simmetrica 2×2 a coefficienti in $L^\infty(\Omega)$ con

$$\langle A(x)\xi, \xi\rangle \geq \lambda |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

per qualche numero $\lambda > 0$.

Si intende che $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ è soluzione debole di (8) e cioè che

$$\int_\Omega \langle A(x)\,Du, D\varphi\rangle\, dx = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in C^1_0(\Omega).$$

Il Teorema di De Giorgi-Nash-Moser implica che le soluzioni deboli di (8) sono almeno hölderiane, ma in generale esse potrebbero non essere differenziabili e quindi è necessario specificare che cosa si intenda per punto critico di u.

Si osserva che se u è soluzione di (8), allora la forma differenziale

$$\eta = -(a_{12}u_x + a_{22}u_y)\,dx + (a_{11}u_x + a_{12}u_y)\,dy$$

è esatta in Ω, se questo è semplicemente connesso.

Esiste allora una funzione v tale che $dv = \eta$ in senso generalizzato: v è una sorta di armonica coniugata di u.

Ponendo $f = u + iv$, si verifica che

$$f_{\bar z} = \mu f_z + \nu \overline{f_z} \quad \text{in } \Omega,$$

con $|\mu| + |\nu| < 1$, e quindi

(9) $|f_{\bar z}| \leq (|\mu| + |\nu|)\,|f_z|$ in Ω.

La teoria delle <u>applicazioni quasi-regolari</u> di Bers e Nirenberg ci fornisce allora un

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE. Se f soddisfa (9), allora esistono un'applicazione quasi-conforme $\zeta : \Omega \to D$ ed una funzione olomorfa $F : D \to \mathbb{C}$ tali che

$$f(z) = F(\zeta(z)).$$

In virtù di queste osservazioni, si dice che $z_0 \in \Omega$ è un <u>punto critico geometrico di</u> u se $\zeta_0 = \zeta(z_0) \in D$ è un punto critico di $U(\zeta) = \mathrm{Re}\, F(\zeta)$. È chiaro che i punti critici geometrici di u sono isolati perché lo sono quelli di U.

Si può infine definire una molteplicità m_0 di z_0:

$$m_0 = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\zeta(\partial B_\varepsilon(z_0))} (\arg F'),$$

dove risulta che $F' = 2\,\partial_\zeta U$.

Con questi argomenti si possono generalizzare i TEOR. 1 e 2 al caso di equazioni ellittiche (Si vedano gli articoli G. Alessandrini – R. Magnanini, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1992), 567–589 e SIAM J. Math. Anal. 25 (1994), 1259–1268.