PUNTI CRITICI DI UN POTENZIALE DI CAPACITÀ.

TEOR. 1. Sia Ω un dominio limitato del piano e supponiamo che $\partial\Omega$ sia composta da n curve semplici chiuse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, $n \geq 2$, di classe $C^{1,\alpha}$.

Sia $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ la soluzione del problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega, \qquad u = a_j \text{ su } \Gamma_j, \; j = 1, \dots, n,$$

dove $a_1, \dots, a_n$ sono numeri reali non tutti uguali tra loro.

Allora

(i) u ha un numero finito di punti critici $z_1, \dots, z_k$ in $\overline{\Omega}$ con molteplicità finite $m(z_1), \dots, m(z_k)$;

(ii) vale la formula

$$\sum_{z_k \in \Omega} m(z_k) + \frac{1}{2} \sum_{z_k \in \partial\Omega} m(z_k) = n - 2.$$

In particolare, $Du \neq 0$ su $\overline{\Omega}$ se Ω è duplicemente connesso (i.e. $n = 2$).

La dimostrazione di questo teorema si basa su due risultati: il teorema della mappa di Riemann ed il principio di riflessione di Schwarz.

TEOR. (Teorema della mappa di Riemann).

Sia Ω un dominio semplicemente connesso del piano complesso esteso $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, la cui frontiera contenga almeno due punti e sia $z_0 \in \Omega$.

Allora esiste una sola applicazione $\chi : \Omega \to D$, dove $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tale che

(1) χ è bi-olomorfa, cioè χ è biunivoca e sia χ che $\chi^{-1}: D \to \Omega$ sono olomorfe;

(2) $\chi(z_0)=0$ e $\chi'(z_0)>0$.

Inoltre χ stabilisce un omeomorfismo tra $\overline{\Omega}$ e $\overline{D}$ se e solo se Ω è un dominio di Jordan, cioè se $\partial\Omega$ è una curva semplice chiusa.

Oss. Siano $s \mapsto z_j(s) \in \mathbb{C}$ due curve regolari tali che $z_j(0)=z\in\mathbb{C}$, $j=1,2$. Allora $s\mapsto f(z_j(s))$, $j=1,2$, sono due curve, regolari in un intorno di $f(z)$ se $f'(z)\neq 0$, che passano per il punto $w=f(z)$.

Il vettore velocità della curva $s\mapsto w_j(s)=f(z_j(s))$ sarà dunque

$$w_j'(s)=f'(z_j(s))\,z_j'(s)\,,\quad j=1,2.$$

Si osservi ora che

$$\begin{aligned}\arg[w_1'(0)]-\arg[w_2'(0)] &= \arg[f'(z)z_1'(0)]-\arg[f'(z)z_2'(0)]=\\ &=\arg[f'(z)]+\arg[z_1'(0)]-\arg[f'(z)]-\arg[z_2'(0)]=\\ &=\arg[z_1'(0)]-\arg[z_2'(0)],\end{aligned}$$

cioè f preserva l'angolo formato dai vettori velocità (tangenti). Per questo si dice che una funzione olomorfa con derivata non nulla è localmente <u>conforme</u>.

Esempio. La funzione $f(z)=\frac{1-z}{1+z}$ trasforma il semipiano $H=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z\geq 0\}$ nel disco $\overline{D}$. Infatti

$|f(z)|\leq 1$ se e solo se $\operatorname{Im} z\geq 0$.

Inoltre $f(0)=1$, $f(i)=0$ e $f(\infty)=-1$.

TEOR. (Principio di riflessione di Schwarz)

Sia $\Omega\subseteq\mathbb{R}^N$ un dominio simmetrico rispetto al piano

$\pi = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\}$ e siano

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : x_N > 0\} \quad e \quad \Omega^- = \{x \in \Omega : x_N < 0\}.$$

Sia u tale che

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega^+ \quad e \quad u = 0 \quad su \quad \Omega \cap \pi$$

e sia $v : \Omega \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$v(x) = \begin{cases} u(x', x_N) & se \quad (x', x_N) \in \Omega^+ \cup (\Omega \cap \pi), \\ -u(x', -x_N) & se \quad (x', x_N) \in \Omega^-, \end{cases}$$

Allora v è armonica in Ω.

Dim. Basta dimostrare che, per ogni $x \in \Omega$ esiste $r_x > 0$ tale che

(1) $$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y \quad \text{per ogni } 0 < r < r_x .$$

Se $x \in \Omega^+$ o $x \in \Omega^-$, ciò vale se si sceglie r_x in modo che $B_{r_x}(x) \cap \partial\Omega^+$ o $B_{r_x}(x) \cap \partial\Omega^-$ sia vuoto.

Se $x \in \Omega \cap \pi$, sia $r_x > 0$ tale che $\overline{B_{r_x}(x)} \subset \Omega$. Per ogni $0 < r < r_x$ si ha allora che

$$\int_{\partial B_r(x)} v(y)\, dS_y = \int_{\partial B_r(x) \cap \Omega^+} u(y)\, dS_y - \int_{\partial B_r(x) \cap \Omega^-} u(y', -y_N)\, dS_y =$$

$$= \int_{\partial B_r(x) \cap \Omega^+} u(y)\, dS_y - \int_{\partial B_r(x) \cap \Omega^-} u(y', y_N)\, dS_y = 0 = u(x)$$

e quindi vale anche la (1). $\square$

LEMMA (Punti critici di frontiera)

Siano Ω ed u come nel TEOREMA 1 e sia $z_0 \in \partial\Omega$ tale che $Du(z_0) = 0$. Allora

(a) z_0 è isolato ed ha molteplicità finita;

(b) posto $f = u_x - i u_y$ e $+\Sigma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon(z_0) \cap \Omega$ (percorso in senso anti-orario, esistono $m_0 \in \mathbb{N}$ ed $\varepsilon_0 > 0$ tali che

$$\Delta_{+Z_\varepsilon}(\arg f) = \pi m_0 \quad \text{per ogni } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 .$$

Dim. Sia Γ_j la componente connessa di $\partial\Omega$ che contiene z_0. Per il teorema della mappa di Riemann, esiste una funzione bi-olomorfa χ che trasforma Γ_j nell'asse reale, la componente connessa di $\mathbb{C} \setminus \Gamma_j$ che contiene Ω nel semipiano con parte immaginaria positiva e tale che $\chi(z_0) = 0$. Posto $G = \chi(\Omega)$, esso è contenuto in quel semipiano e χ risulta un omeomorfismo da $\overline{\Omega}$ in $\overline{G}$ di classe $C^1(\overline{\Omega})$, dato che $\partial\Omega$ è di classe $C^{1,\alpha}$.

La funzione $U(w) = u(\chi^{-1}(w)) - u(z_0)$, $w \in \overline{G}$, è armonica in G, dato che

$$\Delta_w U(w) = \frac{\Delta_z u(\chi^{-1}(w))}{|\chi'(\chi^{-1}(w))|^2}, \quad w \in G,$$

nulla su $\partial H = \chi(\Gamma_j)$ e con un punto critico per $w = 0$.

Per il principio di riflessione di Schwarz, la funzione

$$V(w) = \begin{cases} U(w) & \text{se } w \in \overline{G}, \\ -U(\overline{w}) & \text{se } \overline{w} \in \overline{G}, \end{cases}$$

è armonica in $G \cup \{w \in \mathbb{C} : \overline{w} \in G\} \cup \chi(\Gamma_j)$, che indicheremo con G'. La funzione gradiente $F(w) = 2\partial_w V(w)$ è quindi olomorfa in G' e quindi $0 \in G'$ è un suo zero isolato e di molteplicità finita $m_0 \in \mathbb{N}$; ciò conclude la dimostrazione di (a).

Per il principio dell'argomento, inoltre, risulta che

$$\Delta_{+\gamma}(\arg F) = 2\pi m_0$$

per ogni curva semplice chiusa $+\gamma$ (orientata in senso anti-orario), contenente $w=0$ al suo interno ed abbastanza vicina a $w=0$ (per esempio, $+\gamma\subset B_\delta(0)$ per qualche $\delta>0$).

Scegliamo ora $+\gamma$ come l'unione di $\mathcal{X}(+\Sigma_\varepsilon)$ e della sua riflessione rispetto all'asse reale e con orientamento concorde a quello di $\mathcal{X}(+\Sigma_\varepsilon)$. Risulta allora che

$$\Delta_{+\Sigma_\varepsilon}(\arg f)=\Delta_{\mathcal{X}(+\Sigma_\varepsilon)}(\arg F)=\frac{1}{2}\Delta_{+\gamma}(\arg F)=\pi m_0,$$

dato che $f(z)=\mathcal{X}'(z)\,F(\mathcal{X}(z))$ e $\mathcal{X}'(z)\neq 0$; infatti

$$2\pi m_0=\Delta_{+\gamma}(\arg F)=\Delta_{+\gamma}(\arg\mathcal{X}'+\arg F)=$$

$$=2\,\Delta_{\mathcal{X}(+\Sigma_\varepsilon)}\arg(\mathcal{X}'F)=2\,\Delta_{+\Sigma_\varepsilon}\arg f.\ \square$$

Dim. del TEOR. 1. Sia $f=u_x-iu_y$; per il LEMMA e la teoria delle funzioni olomorfe, ogni zero di f è isolato ed ha molteplicità finita.

Poniamo $\mathcal{B}_\varepsilon=\bigsqcup_{z_k\in\partial\Omega}\overline{B_\varepsilon(z_k)}$ ed $\Omega_\varepsilon=\Omega\setminus\mathcal{B}_\varepsilon$. Se $\varepsilon>0$ è abbastanza piccolo, tutti gli zeri di f interni ad Ω sono interni anche ad Ω_ε e quindi

$$(2)\qquad \sum_{z_k\in\Omega}m(z_k)=\sum_{z_k\in\Omega_\varepsilon}m(z_k)=\frac{1}{2\pi}\Delta_{+\partial\Omega_\varepsilon}(\arg f)$$

per il principio dell'argomento. D'altra parte,

$$(3)\qquad \Delta_{+\partial\Omega_\varepsilon}(\arg f)=\sum_{z_k\in\partial\Omega}\Delta_{-\Sigma_\varepsilon(z_k)}(\arg f)+\Delta_{+(\partial\Omega\setminus\mathcal{B}_\varepsilon)}(\arg f),$$

dove $-\Sigma_\varepsilon(z_k)=\partial B_\varepsilon(z_k)\cap\Omega$ (con l'orientamento su $\partial B_\varepsilon(z_k)$ indotto da quello di $+\partial\Omega_\varepsilon$).

Per il LEMMA, (2) e (3)

$$(4)\qquad 2\pi\sum_{z_k\in\Omega}m(z_k)=-\pi\sum_{z_k\in\partial\Omega}m(z_k)+\Delta_{(\Gamma_1\setminus\mathcal{B}_\varepsilon)}(\arg f)-\sum_{j=2}^{n}\Delta_{(\Gamma_j\setminus\mathcal{B}_\varepsilon)}(\arg f),$$

dove Γ_1 è la componente di $\partial\Omega$ che circonda le restanti $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Su $\partial\Omega \setminus B_\varepsilon$ la direzione di Du è parallela al versore della normale. Si noti però che Du potrebbe cambiare verso su $\partial\Omega$ nell'attraversare un punto critico, in altre parole u_ν potrebbe cambiare segno (nell'attraversare i punti critici di molteplicità dispari). Poiché però u_ν è continua su ogni Γ_j, ad ogni cambiamento di segno deve corrisponderne uno di senso opposto ed, in altre parole,

$$\Delta_{+\Gamma_j}(\arg f) = -\Delta_{+\Gamma_j}(\arg \nu).$$

Perciò la (4) implica che

$$\sum_{z_k \in \Omega} m(z_k) + \frac{1}{2} \sum_{z_k \in \partial\Omega} m(z_k) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi} \Delta_{+(\partial\Omega \setminus B_\varepsilon)}(\arg \nu) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \Delta_{+\Gamma_1}(\arg \nu) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \Delta_{+\Gamma_j}(\arg \nu) = n-2. \quad \square$$