LA FUNZIONE P DI PAYNE E SUE APPLICAZIONI,

Consideriamo ancora il problema sovradeterminato

$$\Delta u = -1 \quad \text{in } \Omega,$$
$$u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = c \quad \text{su } \partial\Omega, \qquad (\nu = \text{normale esterna a } \partial\Omega),$$

L'identità di Pohozaev

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 (x\cdot\nu)\, dS_x = N\int_\Omega F(u)\, dx$$

implica in questo caso che

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}c^2\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\, dS_x = N\int_\Omega u\, dx,$$

dato che $|\nabla u| = |c|$ su $\partial\Omega$.

D'altra parte, per il teorema della divergenza,

$$\int_{\partial\Omega}(x\cdot\nu)\, dS_x = \int_\Omega \operatorname{div}(x)\, dx = N|\Omega| \quad \text{e}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\, dS_x - \int_\Omega u\,\Delta u\, dx = \int_\Omega u\, dx$$

e quindi otteniamo l'identità

$$\frac{N+2}{N}\int_\Omega u\, dx = c^2|\Omega|.$$

Sia ora $P = |\nabla u|^2 + \frac{2}{N}u$; si ha:

②

$$\Delta P = 2|\nabla^2 u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla(\Delta u) + \frac{2}{N}\Delta u =$$

$$= 2|\nabla^2 u|^2 - \frac{2}{N}.$$

Per la disuguaglianza di Schwarz risulta che

$$1 = (\Delta u)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}\right)^2 \leq N \sum_{i=1}^{N} u_{x_i x_i}^2 \leq N\,|\nabla^2 u|^2$$

e quindi

$$\Delta P \geq 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Dato che $P = c^2$ su $\partial\Omega$, per il principio di massimo forte, si ha che o $P < c^2$ in Ω oppure $P \equiv c^2$ su $\overline{\Omega}$. Nel primo caso, integrando su Ω risulta:

$$c^2|\Omega| > \int_\Omega P\,dx = \int_\Omega u\,dx + \frac{2}{N}\int_\Omega u\,dx = \frac{N+2}{N}\int_\Omega u\,dx.$$

Questa è una contraddizione. Dunque $P \equiv c^2$ su $\overline{\Omega}$ e quindi $\Delta P = 0$ in Ω; perciò $|\nabla^2 u| = \frac{1}{N}$ ed anche

$$u_{x_i x_j} = -\frac{1}{N}\delta_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,N, \quad \text{in } \Omega.$$

Ciò implica che $u = -\frac{|x|^2}{2N} + A$ dove A è una costante da determinare mediante le condizioni al contorno. E' facile calcolare che $A = \frac{1}{2}Nc^2$ e che

$$\Omega = B(0, N|c|), \quad u = \frac{1}{2N}\left(N^2c^2 - |x|^2\right).$$