LA PROPRIETÀ DELLA MEDIA CARATTERIZZA LE SFERE.

Abbiamo visto che una proprietà importante delle funzioni armoniche è la propietà della media: se u è armonica in Ω, allora, per ogni $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$, risulta

$$(1) \qquad u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\, dy = \fint_{\partial B(x,r)} u(y)\, dS_y ;$$

viceversa, se $u \in C(\Omega)$ e vale (1) per ogni $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$, allora u è armonica in Ω. Nel teorema seguente, faremo vedere che la (1) caratterizza le sfere.

TEOREMA. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato con frontiera di classe C^1 e sia $p \in \Omega$. Supponiamo che

$$(2) \qquad u(p) = \fint_{\Omega} u(y)\, dy$$

per ogni $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ armonica in Ω.
Allora Ω è una palla con centro p.

Dim. Fissati $i, j \in \{1, \dots, N\}$ con $i \neq j$, sia

$$u(x) = (x_i - p_i)\partial_j v(x) - (x_j - p_j)\partial_i v(x),$$

dove v è armonica in Ω e di classe $C^1(\overline{\Omega})$.
Risulta

$$\partial_{kk} u = 2(\delta_{ik} v_{jk} - \delta_{jk} v_{ik}) + (x_i - p_i) v_{jkk} - (x_j - p_j) v_{ikk}$$

e quindi

$$\Delta u = 2(v_{ji} - v_{ij}) + (x_i - p_i)\Delta v_j - (x_j - p_j)\Delta v_i = 0$$

e $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Perciò

$$0 = u(p) = \fint_{\Omega} [(x_i - p_i)\partial_j v(x) - (x_j - p_j)\partial_i v(x)]\, dx .$$

Per il teorema della divergenza allora (per densità)

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[(x_i - p_i)\,\nu_j(x) - (x_j - p_j)\,\nu_i(x)\right] v(x)\, dS_x$$

per ogni $v \in C^0(\partial\Omega)$. Dato che ν è continuo su $\partial\Omega$, possiamo scegliere $v(x) = (x_i - p_i)\,\nu_j(x) - (x_j - p_j)\,\nu_i(x)$ e quindi ottenere che

$$\int_{\partial\Omega} \left[(x_i - p_i)\,\nu_j(x) - (x_j - p_j)\,\nu_i(x)\right]^2 dS_x = 0.$$

Perciò, per ogni $i, j \in \{1, \dots, N\}$ con $i \neq j$ abbiamo che

$$(x_i - p_i)\,\nu_j(x) - (x_j - p_j)\,\nu_i(x) = 0 \quad \text{per ogni } x \in \partial\Omega.$$

Moltiplicando questa per $\nu_j(x)$ e sommando su j, otteniamo

$$x_i - p_i = (x - p)\cdot\nu(x)\;\nu_i(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega,$$

cioè

(3.) $$x - p = \left[(x - p)\cdot\nu(x)\right]\nu(x) \quad \text{per } x \in \partial\Omega.$$

Siano ora

$$m = \min_{x\in\partial\Omega} |x - p| \quad \text{ed} \quad M = \max_{x\in\partial\Omega} |x - p|$$

ed $x_0, x_1 \in \partial\Omega$ due punti tali che $|x_0 - p| = m$ e $|x_1 - p| = M$. Se $\partial\Omega$ è connessa, esiste una curva $\gamma : [0,1] \to \partial\Omega$, regolare, tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

Consideriamo la funzione $\varphi(t) = |\gamma(t) - p|^2$; se fosse $m < M$, per il teorema di Lagrange esisterebbe $\theta \in (0,1)$ tale che $\varphi'(\theta) = M^2 - m^2 > 0$, cioè in $x = \gamma(\theta)$ si avrebbe

(4) $$(x - p)\cdot\gamma'(\theta) > 0.$$

Dato che $\gamma'(\theta)$ è tangente in x a $\partial\Omega$, la (4) contraddice la (3). Ne segue che $m = M$ e cioè che $|x-p|$ rimane costante su $\partial\Omega$, cioè $\partial\Omega$ è una sfera centrata in p e con raggio $m = M$.

Si noti infine che $\partial\Omega$ non può essere sconnessa, altrimenti $\partial\Omega$ sarebbe composta di sfere concentriche in p. Dato che $p \in \Omega$, allora Ω sarebbe composto di una palla ed alcune corone circolari (tutte centrate in p) e perciò Ω non sarebbe connesso. $\square$

OSSERVAZIONE. Condizioni sul tipo della (2) si trovano in letteratura sotto il nome di <u>identità di quadratura</u> oppure di <u>condizioni di dualità</u>. La (2) infatti si può interpretare come una formula di quadratura per il calcolo numerico dell'integrale in questione oppure come una condizione di annullamento di un funzionale lineare definito sulla classe delle funzioni armoniche.

Si osservi che il problema sovradeterminato di Serrin

$$-\Delta u = 1 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = c \quad \text{su } \partial\Omega$$

può essere convertito facilmente in un'identità di quadratura. Infatti, l'identità di Gauss-Green implica che

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx + \int_\Omega v\,dx = \int_\Omega (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS_x = -c\int_{\partial\Omega} v\,dS_x .$$

Perciò, per ogni funzione armonica di classe $C^0(\overline{\Omega})$ si avrà

$$\int_\Omega v\,dx + c\int_{\partial\Omega} v\,dS_x = 0 .$$

Per la risoluzione di questa ed altre identità di quadratura, rimandiamo a L. E. Payne - P. W. Schaefer, Math. Meth. Appl. Sci. 11 (1989), 805-819.