METODO DEI PIANI MOBILI: PROBLEMA DI SERRIN.

Il seguente problema ha varie motivazioni in fisica-matematica. Sia Ω un dominio limitato in $\mathbb{R}^N$ con frontiera di classe C^2 e supponiamo che esista $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che

(1) $\Delta u = -1$ in Ω,

(2) $u = 0$ su $\partial\Omega$,

(3) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} =$ costante su $\partial\Omega$, $\nu =$ normale interna a Ω,

Ci chiediamo se Ω non debba per forza essere una palla. In effetti, sappiamo che il problema (1), (2) ha una sola soluzione: aggiungendo la condizione (3) ci si aspetta che Ω non possa essere arbitrario.

TEOREMA (J. Serrin, 1971) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio limitato con frontiera di classe C^2 e supponiamo che esista una funzione $u \in C^2(\overline{\Omega})$ che soddisfa (1)-(3).
Allora Ω è una palla e

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2N}, \quad x \in \Omega,$$

dove R è il raggio di Ω.

OSSERVAZIONE. Un'applicazione di questo risultato la si trova nella teoria lineare della torsione di una sbarra rettilinea con sezione Ω. Il TEOREMA si può interpretare così: quando una sbarra rettilinea è soggetta a torsione, la trazione risultante che si esercita sulla superficie (laterale) della sbarra non dipende dalla posizione se e solo se la sbarra ha sezione circolare.

La dimostrazione di Serrin fa uso del metodo dei piani mobili inventato da A. V. Alexandrov e di cui abbiamo già visto un'applicazione nella dispensa precedente. Utilizzeremo le stesse notazioni là introdotte.

Sia allora μ il valore del parametro λ in corrispondenza del quale si verifica una delle due evenienze (i) o (ii).

LEMMA 1. Se si verifica (i), allora Ω è simmetrico rispetto a $\pi_\mu(\theta)$.

Dim. Sia $u^{\mu,\theta}(x) = u(x^{\mu,\theta})$, come già definito; è chiaro che

$$\Delta u^{\mu,\theta} = -1 \quad \text{in } \Omega'_{\mu,\theta},$$
$$u^{\mu,\theta} = u \quad \text{su } \partial\Omega'_{\mu,\theta},$$
$$u^{\mu,\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial \nu} = \text{costante su } \partial\Omega'_{\mu,\theta} \setminus \pi_{\mu,\theta},$$

dove la costante è la stessa di quella di (3).

Poiché $\Omega'_{\mu,\theta} \subset \Omega$, possiamo considerare in $\Omega'_{\mu,\theta}$ la funzione $v^\mu = u - u^{\mu,\theta}$; risulta:

$$\Delta v^\mu = 0 \quad \text{in } \Omega'_{\mu,\theta},$$
$$v^\mu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega'_{\mu,\theta} \cap \pi_{\mu,\theta},$$
$$v^\mu \geq 0 \quad \text{su } \partial\Omega'_{\mu,\theta} \setminus \pi_{\mu,\theta},$$

dato che $u > 0$ in Ω, per il principio di massimo forte.

Per il principio di massimo forte allora o $v^\mu > 0$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$ o $v^\mu \equiv 0$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$. Nel primo caso, per il lemma di Hopf, dato che $v^\mu(P) = 0 < v^\mu$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$, si ha che

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial \nu}(P) > 0$$

contro il fatto che $\frac{\partial v^\mu}{\partial \nu}(P) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) - \frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial \nu}(P) =$
$= \frac{\partial u}{\partial \nu}(P) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(P^{\mu,\theta}) = 0.$

Dunque deve essere $v^\mu \equiv 0$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$ e cioè $u^{\mu,\theta} \equiv u$ in $\Omega'_{\mu,\theta}$, ossia $\overline{\Omega_{\mu,\theta}} \cup \overline{\Omega'_{\mu,\theta}} = \overline{\Omega}$. □

Il caso in cui si verifa (ii) è più complicato da trattare: non si può usare il lemma di Hopf in Q, poiché $\Omega'_{\mu,\theta}$ presenta in Q un punto angoloso e quindi non gode in Q della proprietà della sfera interna. In questo caso è necessario considerare le derivate seconde di v^μ in Q.

LEMMA 2. Supponiamo che si verifichi il caso (ii).
Allora la funzione v^μ ha uno zero del secondo ordine in Q.

Dim. Poiché $\partial\Omega$ è di classe C^2, possiamo scegliere un sistema di coordinate $x=(x_1,\dots,x_N)$ in cui $Q=0$, $\pi_{\mu,\theta}=\{x\in\mathbb{R}^N;\ x_1=0\}$, $\Omega_{\mu,\theta}=\{x\in\Omega : x_1>0\}$ e $\partial\Omega$ è rappresentata localmente dall'equazione

$$x_N=\varphi(x_1,\dots,x_{N-1}),\quad (x_1,\dots,x_{N-1})\in B(0,\varepsilon),$$

dove $\varphi\in C^2(B(0,\varepsilon))$ con $B(0,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^{N-1}$ e $\varphi(0)=0$, $\nabla\varphi(0)=0$.

Dato che $u\in C^2(\overline{\Omega})$, le due condizioni (2) e (3) si esprimono rispettivamente così:

$$(4)\quad u(x_1,\dots,x_{N-1},\varphi(x_1,\dots,x_{N-1}))=0,$$

$$(5)\quad \frac{\partial u}{\partial x_N}-\sum_{j=1}^{N-1}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=c\sqrt{1+|\nabla\varphi|^2},$$

per $(x_1,\dots,x_{N-1})\in B(0,\varepsilon)$.

Differenziando la (4) rispetto ad x_i, $i=1,\dots,N-1$, si ha:

$$(6)\quad \frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\dots,N-1,$$

Da questa e dalla (5) si ottiene:

$$(7)\quad \frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\dots,N-1,\qquad \frac{\partial u}{\partial x_N}=c\quad \text{in } Q.$$

Differenziando poi la (6) rispetto ad x_j, $j=1,\dots,N-1$, e calcolando in Q abbiamo:

$$(8)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+c\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}=0\quad \text{in } Q.$$

Infine, differenziando la (5) rispetto ad x_i, $i=1,\dots,N-1$, e calcolando in Q abbiamo:

$$(9)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_N\partial x_i}=0,\quad i=1,\dots,N-1,\ \text{in } Q.$$

La (1) e la (8) poi implicano che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}=-1-\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=-1+c\,\Delta\varphi\quad \text{in } Q,$$

cioè abbiamo determinato in Q tutte le derivate prime e seconde di u in funzione della parametrizzazione di $\partial\Omega$.

Si osservi ora che, per la scelta del sistema di riferimento, risulta che

$$(10) \qquad u^{\mu,\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N) = u(-x_1, x_2, \dots, x_N)$$

e, dato che $\Omega'_{\mu,\theta} \subset \Omega$,

$$\varphi(-x_1, x_2, \dots, x_N) \geq \varphi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad \text{se } x_1 < 0.$$

Applicando a questa la formula di Taylor, risulta che

$$-x_1 \sum_{j=2}^{N-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_j}(0)\, x_j + o(|x|^2) \geq 0$$

e quindi

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_j} = 0, \quad j = 2, \dots, N-1, \quad \text{in } Q.$$

La (10) perciò implica in Q:

$$\frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial x_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \ j = 2, \dots, N, \quad \frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},$$

$$\frac{\partial^2 u^{\mu,\theta}}{\partial x_1 \partial x_j} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_j}, \ j = 2, \dots, N, \quad \frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ i,j = 2, \dots, N;$$

le (7)-(9) allora ci fanno concludere che in Q

$$\frac{\partial u^{\mu,\theta}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ i = 1, \dots, N, \quad \frac{\partial^2 u^{\mu,\theta}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ i,j = 1, \dots, N. \ \square$$

LEMMA 3 (Serrin) Sia D un dominio con frontiera ∂D di classe C^2 e sia π un piano contenente la normale a ∂D in qualche punto $Q \in \partial D$.

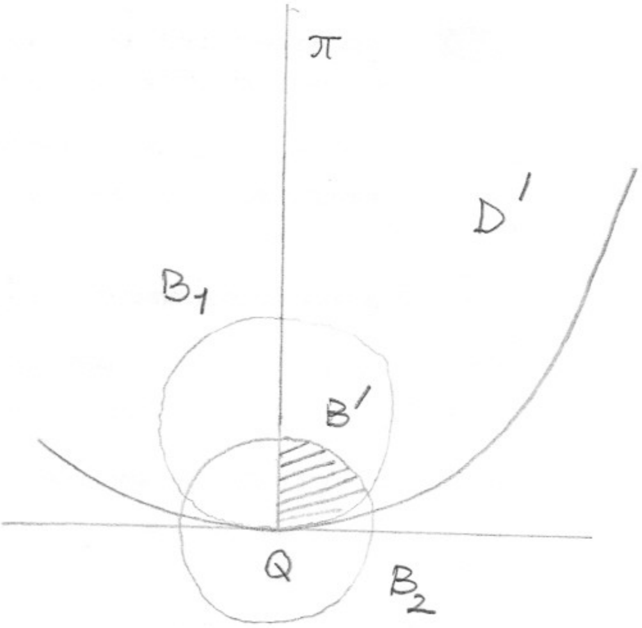
Sia D' la porzione di D che giace da un lato qualsiasi di π. Supponiamo che $w \in C^2(\overline{D'})$ sia tale che

$$\Delta w \leq 0 \quad \text{in } D',$$
$$w \geq 0 \quad \text{in } D',$$
$$w(Q) = 0.$$

Se ω è una qualunque direzione che in Q entra in D' non tangenzialmente, allora

$$o \quad \frac{\partial w}{\partial \omega} > 0 \qquad o \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \omega^2} > 0 \quad \text{in } Q.$$

Dim. Sia $B_1 = B(c, r_1)$ una palla tangente internamente a D in Q e tale che $\partial B_1 \cap \partial D = \{Q\}$. Sia B_2 la palla centrata in Q e con raggio $\frac{1}{2} r_1$ dove r_1 è il raggio di B_1; sia infine $B' = B_1 \cap B_2 \cap D'$.



Scegliamo le coordinate in modo che $Q = 0$, $\pi = \{x \in \mathbb{R}^N, x_1 > 0\}$ e $D' = \{x \in D : x_1 > 0\}$. La funzione ausiliaria

$$z = z(x) = x_1 \left(e^{-\alpha |x-c|^2} - e^{-\alpha r_1^2} \right)$$

è ovviamente tale che

$$z > 0 \text{ in } B' \quad e \quad z = 0 \text{ su } \partial B_1 \text{ e } \pi.$$

Dato che

$$\Delta z = 2\alpha x_1 e^{-\alpha |x-c|^2} \left\{ 2\alpha |x-c|^2 - (N+2) \right\},$$

scegliendo $\alpha = 2(N+2) r_1^{-2}$, abbiamo che $\Delta z > 0$ in B'.

Se w non è identicamente nulla, $w > 0$ in D' per il principio di massimo forte. Dato che w non si annulla su $\partial B' \cap \partial B_2$, scegliendo

$$\varepsilon \leq \min_{\partial B' \cap \partial B_2} w \Big/ \max_{\partial B' \cap \partial B_2} x_1,$$

risulta che $w \geq \varepsilon x_1$ su $\partial B' \cap \partial B_2$; inoltre $w \geq 0$ su $\partial B' \setminus \partial B_2$. D'altra parte, su $\partial B' \cap \partial B_2$

$$z \leq x_1 e^{-\alpha |x-c|^2} \leq x_1 \leq \varepsilon^{-1} w,$$

e quindi $w - \varepsilon z \geq 0$ su $\partial B'$ poiché anche $w - \varepsilon z = w \geq 0$ su $\partial B' \setminus \partial B_2$. Infine

$$\Delta(w - \varepsilon z) < 0 \quad \text{in } B'.$$

Per il principio di massimo forte allora $w - \varepsilon z > 0$ in B' e, dato che $w - \varepsilon z = 0$ in Q, si ha che o

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(w - \varepsilon z) > 0 \quad \text{in } Q$$

oppure, se $\frac{\partial}{\partial \omega}(w - \varepsilon z) = 0$ in Q,

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^2}(w - \varepsilon z) \geq 0 \quad \text{in } Q.$$

Poiché $\frac{\partial z}{\partial \omega} = 0$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial \omega^2} > 0$ in Q, si conclude. □

Siamo ora in grado di completare la dimostrazione del teorema. Infatti, se si verifica il caso (i), si conclude con il LEMMA 1. Se invece si verifica il caso (ii), la funzione $v^\mu = u - u^{\mu,\theta}$ è armonica in $\Omega'_{\mu,\theta}$, è positiva in $\Omega'_{\mu,\theta}$ e nulla in Q e quindi, per il LEMMA 3 o $\frac{\partial v^\mu}{\partial \omega} > 0$ o $\frac{\partial^2 v^\mu}{\partial \omega^2} > 0$ in Q, che è in contraddizione con il LEMMA 2. □

OSSERVAZIONE. Il teorema si può estendere ad equazioni più generali. Per dettagli rimandiamo al lavoro originale di Serrin: J. Serrin, Arch. Rat. Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.