SUPERFICI ISOTERMICHE INVARIANTI IN DOMINI ILLIMITATI

Abbiamo già dimostrato che, se $p \in \Omega$ è un punto invariante per una soluzione dell'equazione del calore in Ω (cioè $u(p,t) = c$ per ogni $t>0$), allora, per ogni $r>0$ tale che $\overline{B(p,r)} \subset \Omega$, risulta che

$$u(p,t) = \fint_{\partial B(p,r)} u(y,t)\, dS_y = \fint_{B(p,r)} u(y,t)\, dy,$$

per ogni $t>0$.

Se $\Gamma \subset \Omega$ è una superficie invariante, presi p e $q \in \Gamma$, la funzione

$$v(x,t) = u(p+x,t) - u(q+x,t), \quad x \in B(0,R),\ t>0,$$

soddisfa l'equazione del calore in $B(0,R)$, dove

$$R = \min\{\operatorname{dist}(p,\partial\Omega), \operatorname{dist}(q,\partial\Omega)\},$$

ed inoltre l'origine è un punto invariante per v in $B(0,R)$, dato che $v(0,t) = u(p,t) - u(q,t) = 0$.

Perciò, per ogni $p, q \in \Gamma$ si ha:

$$\fint_{\partial B(p,r)} u(y,t)\, dS_y = \int_{\partial B(q,r)} u(y,t)\, dS_y,$$

$$\fint_{B(p,r)} u(y,t)\, dy = \fint_{B(q,r)} u(y,t)\, dy,$$

per ogni $r \le R$ ed ogni $t>0$. In altre parole, il <u>contenuto calorico</u>

$$\int_{B(p,r)} u(y,t)\, dy \quad \left(\text{o} \int_{\partial B(p,r)} u(y,t)\, dS_y \right)$$

di $B(p,r)$ (o di $\partial B(p,r)$) non dipende da p su Γ.
Questa proprietà può essere sfruttata per ottenere informazioni geometriche su $\partial\Omega$.

Si consideri ora il già noto problema al contorno

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty),$$
$$u = 0 \quad \text{su } \Omega \times \{0\},$$
$$u = 1 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0,\infty).$$

Sia $s>0$ un parametro e si ponga

$$W(x,s) = s^2 \int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-s^2 t}\, dt \,, \quad x \in \Omega,\ s>0.$$

E' facile verificare che

$$\Delta W(x,s) = s^2 \int_0^{+\infty} \Delta u(x,t)\, e^{-s^2 t}\, dt = s^2 \int_0^{+\infty} u_t(x,t)\, e^{-s^2 t}\, dt =$$

$$= s^2 W(x,s)$$

e che $W(x,s) = 1$ per $x \in \partial\Omega$ ed $s>0$. Dunque, le funzioni $W(x,s)$ soddisfano il problema di Dirichlet

$$(1) \qquad \begin{aligned} &\Delta W - s^2 W = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ &W = 1 \quad \text{su } \partial\Omega, \end{aligned}$$

per ogni $s>0$.

Si può dimostrare la formula

$$(2) \qquad \lim_{s \to +\infty} \left\{ -s^{-1} \log W(x,s) \right\} = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega),$$

che conferma il fatto che, se Γ è una superficie invariante per u allora Γ è una superficie parallela a

$\partial\Omega$ (i.e. $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) =$ costante per ogni $x \in \Gamma$).

Il seguente lemma è una conseguenza di (2) e del principio di massimo. Si ponga $d(x) = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ per $x \in \overline{\Omega}$.

LEMMA 1. Per $\varepsilon > 0$ fissato, siano

$$W_\varepsilon^+(x,s) = e^{-s(1-\varepsilon)\,d(x)} \quad e \quad W_\varepsilon^-(x,\varepsilon) = e^{-s(1+\varepsilon)\,d(x)};$$

sia $W(x,s)$ la soluzione di (1).

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $s_\varepsilon > 0$ tale che

$$W_\varepsilon^-(x,s) \leq W(x,s) \leq W_\varepsilon^+(x,s), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad s > s_\varepsilon.$$

Dim. Si veda R. Magnanini - S. Sakaguchi, Ann. Math. 156 (2002), 931-946.

LEMMA 2. Risulta che

$$\int_{B(p,R)} e^{-as\,d(x)}\,dx = as \int_0^{+\infty} e^{-ast}\, m(t)\,dt, \quad a,s > 0,$$

dove $m(t) = \left| \{ x \in B(p,R) : d(x) < t \} \right|$.

Dim. Si consideri la funzione $f : B(p,R) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ definita da

$$f(x,t) = as\,e^{-ast}\,\chi_{\{y \in B(p,R)\,:\, d(y) < t\}}(x) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq d(x), \\ ase^{-ast} & \text{se } t > d(x), \end{cases}$$

Si osservi che f è misurabile e non-negativa; possiamo applicare il teorema di Fubini, Dato che

$$\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dt = \int_{d(x)}^{+\infty} as\, e^{-ast}\,dt = e^{-as\,d(x)} \quad \text{e}$$

$$\int_{B(p,R)} f(x,t)\,dx = as\, e^{-ast} \left|\{y \in B(p,R) : d(y) < t\}\right| =$$

$$= as\, e^{-ast}\, m(t),$$

si ha:

$$\int_{B(p,R)} e^{-as\,d(x)}\,dx = \int_{B(p,R)\times[0,+\infty)} f(x,t)\,dx\,dt = \int_0^{\infty} as\, e^{-ast}\, m(t)\,dt. \quad \square$$

LEMMA 3. Sia $B(p,R) \subset \Omega$ tale che $\partial B(p,R) \cap \partial\Omega = \{q\}$. Allora

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-\frac{N+1}{2}}\, m(\varepsilon) = c_N \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q)\right] \right\}^{-1},$$

dove $k_j(q)$, $j = 1, \dots, N-1$, è la j-esima curvatura principale di $\partial\Omega$ in q e c_N è una costante che dipende solo da N.

Dim. Si può sempre supporre che q sia l'origine di un sistema di coordinate $(t, t_N) = (t_1, \dots, t_{N-1}, t_N)$ tale che t si muove sul piano tangente a $\partial\Omega$ in q e, localmente, $\partial\Omega$ è descritta dall'equazione $t_N = \varphi(t)$. Si possono inoltre scegliere gli assi $t_1, \dots, t_{N-1}$ in modo che

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} k_j(q)\, t_j + o(|t|^2) \quad \text{se } |t| \to 0.$$

La superficie di livello $\{x \in \Omega : d(x) = \varepsilon\}$ sarà allora descritta dall'equazione $t_N = \varphi(t) + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+|\nabla\varphi(t)|^2}}$.

Perciò

$$|\{x\in B(q,R):\ d(x)<\varepsilon\}| =$$

$$= \left|\left\{(t,t_N):\ R-\sqrt{R^2-|t|^2} < t_N < \varphi(t) + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+|\nabla\varphi(t)|^2}}\right\}\right| .$$

Con il cambio di variabili $t_N = \varepsilon\,\xi_N$, $t=\sqrt{\varepsilon}\,\xi$, si ottiene allora

$$|\{x\in B(q,R):\ d(x)<\varepsilon\}| =$$

$$= \varepsilon^{\frac{N+1}{2}} \left|\left\{(\xi,\xi_N):\ \frac{|\xi|^2}{R+\sqrt{R-\varepsilon|\xi|^2}} < \xi_N < 1 + \frac{\varphi(\sqrt{\varepsilon}|\xi|)}{\varepsilon} + O(\varepsilon)\right\}\right|$$

Perciò se $\varepsilon \to 0$ si ha:

$$\varepsilon^{-\frac{N+1}{2}}\, m(\varepsilon) \longrightarrow \left|\left\{(\xi,\xi_N):\ \frac{|\xi|^2}{2R} < \xi_N < 1+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} k_j(q)\xi_j^2\right\}\right| .$$

Il numero al secondo membro è uguale a

$$\int_E \left\{1-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{R}-k_j(q)\right]\xi_j^2\right\} d\xi ,$$

dove $E = \{\xi\in\mathbb{R}^{N-1}: \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{R}-k_j(q)\right]\xi_j^2 < 1\}$. Il cambio di variabili $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{R}-k_j(q)\right]\xi_j = \eta_j$, $j=1,\dots,N-1$, allora ci dà:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{-\frac{N+1}{2}}\, m(\varepsilon)\right\} = \frac{2^{\frac{N-1}{2}}}{\left\{\prod_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{R}-k_j(q)\right]\right\}^{1/2}} \int_{|\eta|<1} (1-|\eta|^2)\, d\eta =$$

$$= \frac{2^{\frac{N+1}{2}}}{N^2-1}\,\omega_{N-2}\left\{\prod_{j=1}^{N-1}\left[\frac{1}{R}-k_j(q)\right]\right\}^{-1/2} ,$$

dove ω_{N-1} è l'area della superficie della sfera unitaria in $\mathbb{R}^{N-1}$. $\Box$

Come conseguenza dei LEMMI 1, 2 e 3, otteniamo la seguente formula asintotica, TEOREMA. Sia $B(p,R) \subset \Omega$ tale che $\partial B(p,R) \cap \partial\Omega = \{q\}$ e sia $w(x,s)$ la soluzione di (1). Allora

$$\lim_{s\to\infty} s^{\frac{N+1}{2}} \int_{B(p,R)} w(x,s)\,dx = c'_N \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q) \right] \right\}^{-1/2}.$$

Dim. Il LEMMA 2 ed il cambio di variabile $ast = \sigma$ con $a = 1 \mp \varepsilon$, implicano:

$$\int_{B(p,R)} w^{\pm}_{\varepsilon}(x,s)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\sigma} m\left(\frac{\sigma}{(1\mp\varepsilon)s}\right) d\sigma.$$

Per il LEMMA 3 ed il teorema della convergenza dominata allora

$$\lim_{s\to\infty} \left[(1\mp\varepsilon)s\right]^{\frac{N+1}{2}} \int_{B(p,R)} w^{\pm}_{\varepsilon}(x,s)\,dx =$$

$$= \lim_{s\to\infty} \int_0^{\infty} \sigma^{\frac{N+1}{2}} e^{-\sigma} \left[\frac{\sigma}{(1\mp\varepsilon)s}\right]^{-\frac{N+1}{2}} m\left(\frac{\sigma}{(1\mp\varepsilon)s}\right) d\sigma = c_N\, \Gamma\left(\frac{N+3}{2}\right) \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q)\right] \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Perciò, posto $c'_N = c_N\, \Gamma\left(\frac{N+3}{2}\right)$, il LEMMA 1 implica;

$$c_N (1-\varepsilon)^{\frac{N+1}{2}} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q)\right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \le \liminf_{s\to\infty} s^{\frac{N+1}{2}} \int_{B(p,R)} w(x,s)\,dx \le$$

$$\le \limsup_{s\to\infty} s^{\frac{N+1}{2}} \int_{B(p,R)} w(x,s)\,dx \le c_N (1+\varepsilon)^{\frac{N+1}{2}} \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q)\right] \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Facendo tendere ε a zero si conclude. □

TEOREMA. Sia $\Gamma \subset \Omega$ una superficie invariante per u. Allora per ogni $q \in \partial\Omega$ si ha;

$$\prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q)\right] = \text{costante}.$$

Dim. Sappiamo già che, se Γ è invariante per u, allora Γ è una superficie parallela a $\partial\Omega$. Inoltre, sotto opportune ipotesi su $\partial\Omega$, posto $R = dist(\Gamma, \partial\Omega)$, per ogni $p \in \Gamma$ esiste un solo $q \in \partial\Omega$ tale che $\partial B(p,R) \cap \partial\Omega = \{q\}$.

Poiché Γ è invariante, il contenuto calorico di $B(p,R)$ non dipende da p su Γ e quindi anche

$$\int_{B(p,R)} w(x,s)\,dx = s^2 \int_{B(p,R)} \left(\int_0^{+\infty} u(x,t)\, e^{-s^2 t} dt \right) dx =$$

$$= s^2 \int_0^{+\infty} \left(\int_{B(p,R)} u(x,t)\,dx \right) e^{-s^2 t}\, dt$$

non dipende da p su $\partial\Omega$. Dunque

$$c_N \left\{ \prod_{j=1}^{N-1} \left[\frac{1}{R} - k_j(q) \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} = \lim_{s\to\infty} s^{\frac{N+1}{2}} \int_{B(p,R)} w(x,s)\,dx$$

non dipende da p e quindi da q su Γ (si noti che $p = q + R\nu(q)$, dove $\nu(q)$ è la normale interna a $\partial\Omega$ in q). $\square$

COROLLARIO. Se $N=2$ e $\partial\Omega$ è connessa, allora u ammette una curva invariante Γ in Ω se e solo se $\partial\Omega$ è o una circonferenza o una linea retta.

Dim. Per il teorema precedente, la curvatura di $\partial\Omega$ risulta essere costante; ciò è possibile solo se $\partial\Omega$ è una circonferenza (costante positiva) o una retta (costante nulla). $\square$