Dispense del Corso di Analisi III
Corso di Laurea Triennale in Matematica
Università di Firenze

Prof. Rolando Magnanini

Dipartimento di Matematica U. Dini, Università di Firenze, viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze

E-mail address: magnanin@math.unifi.it

Indice

Capitolo 1

Complementi

1.1. Limite inferiore e limite superiore

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione numerica. Si definiscono allora limite superiore e inferiore, rispettivamente:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} a_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} a_n.$$

A volte si usano i simboli $\lim'$ o $\underline{\lim}$ per il limite inferiore e $\lim''$ o $\overline{\lim}$ per il limite superiore. Si osservi che le successioni

$$b_k = \inf_{n\geq k} a_n \quad \text{e} \quad c_k = \sup_{n\geq k} a_n$$

sono una crescente e l'altra decrescente, per cui si può scrivere:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} a_n.$$

Esempio 1.1.1. (i) Se $a_n = (-1)^n$, allora $b_k = -1$ e $c_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi $\liminf a_n = -1$ e $\limsup a_n = 1$.

(ii) Se $a_n = (-1)^n/n$, osserviamo che $b_{2k+1} = -1/(2k+1)$ e $c_{2k} = 1/(2k)$ e quindi $\liminf a_n = \lim b_k = \lim b_{2k+1} = 0$ e $\limsup a_n = \lim c_k = \lim c_{2k} = 0$.

Proposizione 1.1.2. (Caratterizzazione nel caso finito) *Sia $L \in \mathbb{R}$; allora*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = L$$

se e solo se si verifica che

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* N *tale che* $a_n \le L + \varepsilon$ *per ogni* $n \ge N$;

(ii) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *esiste* $n_k > k$ *tale che* $a_{n_k} \ge L - \varepsilon$.

Analogamente

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = L$$

se e solo se si verifica che

(i) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* N *tale che* $a_n \ge L - \varepsilon$ *per ogni* $n \ge N$;

(ii) *per ogni* $k \in \mathbb{N}$ *esiste* $n_k > k$ *tale che* $a_{n_k} \le L + \varepsilon$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $c_N < L + \varepsilon$ e quindi $a_n < L + \varepsilon$ per ogni $n \ge N$. Inoltre $L - \varepsilon < L \le c_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k > k$ tale che $a_{n_k} \ge L - \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $a_n \le L + \varepsilon$ per ogni $n \ge N$ risulta che $c_N \le L + \varepsilon$. Inoltre, se per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k > k$ tale che $a_{n_k} \ge L - \varepsilon$, si avrà che $c_k \ge a_{n_k} \ge L - \varepsilon$ e quindi, se $k \ge N$, avremo $L - \varepsilon \le c_k \le c_N \le L + \varepsilon$, cioè la tesi. □

Proposizione 1.1.3. *Risulta che* $\liminf a_n \le \limsup a_n$.

Inoltre, $\liminf a_n = \limsup a_n = L$ *se e solo se* $\lim a_n = L$.

Dimostrazione. La prima affermazione è ovvia. Dimostriamo la seconda.

($\Rightarrow$) Se $\liminf a_n = +\infty$, allora $b_k \to +\infty$ se $k \to +\infty$ e quindi, per ogni M, esiste N tale che $a_k \ge b_k > M$ per ogni $k > N$ e perciò $\lim a_n = +\infty$. Si procede analogamente se $\limsup a_n = -\infty$.

Se invece $\liminf a_n = \limsup a_n = L$, dalla proposizione precedente, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono N_1 ed N_2 tali che $a_n \le L + \varepsilon$ per ogni $n \ge N_1$ e $a_n \ge L - \varepsilon$ per ogni $n \ge N_2$. Posto $N = \max(N_1, N_2)$, se $n \ge N$, avremo $L - \varepsilon \le a_n \le L + \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che $L - \varepsilon \le a_n \le L + \varepsilon$ se $n \ge N$; dunque $L - \varepsilon \le \liminf a_n \le \limsup a_n \le L + \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε si conclude. □

Proposizione 1.1.4. *Ogni successione ha una sottosuccessione che converge al limite superiore (o inferiore).*

Dimostrazione. Per ogni sottosuccessione $\{a_{n_j}\}$ di $\{a_n\}$, si ha

$$\limsup a_{n_j} \le \limsup a_n.$$

D'altra parte, scelto $\varepsilon = 1$, esiste $n_1 > 1$ tale che $a_{n_1} > \limsup a_n - 1$; scelto $\varepsilon = 1/2$, esiste $n_2 > n_1$ tale che $a_{n_2} > \limsup a_n - 1/2$, e così via; esiste quindi una successione di indici $n_1 < n_2 < \cdot < n_k < \cdots$ tali che $a_{n_k} > \limsup a_n - 1/k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Perciò $\liminf a_{n_k} \ge \limsup a_n$. □

Concludiamo questo paragrafo con alcune definizioni. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione di A.

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \inf_{\substack{x \in A \\ 0<|x-x_0|<\delta}} f(x),$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{\substack{x \in A \\ 0<|x-x_0|<\delta}} f(x).$$

Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi in $\mathbb{R}^N$. Si definiscono

$$E' = \liminf_{n \to \infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k,$$

$$E'' = \limsup_{n \to \infty} I_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_n.$$

Se $E' = E''$ si dice che la successione $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1.2. Cardinalità e insiemi numerabili

Il concetto fondamentale per introdurre la cardinalità è quello di corrispondenza biunivoca, cioè di applicazione $f : A \to B$ iniettiva e suriettiva.

Due insiemi A e B sono *equipotenti* (oppure si dice che hanno la *stessa cardinalità*) se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B. In tal caso si scrive

$$C(A) = C(B).$$

La relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza (riflessiva, simmetrica e transitiva) e la cardinalità di un insieme può essere pensata come la classe di equivalenza alla quale esso appartiene.

Un caso particolarmente semplice è costituito dagli insiemi finiti per i quali la cardinalità coincide con il numero di elementi dell'insieme.

Un insieme è *finito* se è equipotente a $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. L'intero n è allora la cardinalità dell'insieme.

Osservazione 1.2.1. (i) Gli insiemi finiti non sono equipotenti a nessun loro sottoinsieme proprio, cioè se A è finito e $B \subset A$ allora $C(B) < C(A)$.
(ii) L'insieme delle parti di un insieme di cardinalità n ha cardinalità 2^n.

Un insieme A si dice *infinito* se non esiste alcun n tale che A sia equipotente a I_n.

L'esempio più semplice di insieme infinito è $\mathbb{N}$. Infatti, se esso fosse finito e $B \subset \mathbb{N}$, allora $C(B) < C(\mathbb{N})$, cioè non esisterebbe alcuna $f : B \to \mathbb{N}$ biunivoca. Invece l'insieme $2\mathbb{N}$ dei numeri pari è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{N}$ e $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ tale che $f(n) = 2n$ è biunivoca.

Un insieme si dice *numerabile* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Si dice che un insieme è *al più numerabile* se è numerabile o finito.

Osservazione 1.2.2. (i) Ogni sottoinsieme B di un insieme numerabile A è al più numerabile (B non è altro che una successione estratta da A).

(ii) L'unione numerabile di insiemi finiti è numerabile.

Infatti, se $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sono finiti, possiamo definire tra la loro unione e $\mathbb{N}$ la corrispondenza biunivoca $A_1 \leftrightarrow \{1, \cdots, n_1\}$, $A_2 \leftrightarrow \{n_1 + 1, \cdots, n_1 + n_2\}, \cdots$.

Esempio 1.2.3. $\mathbb{Q}$ è un insieme numerabile.

È chiaro che basta dimostrare che l'insieme dei razionali positivi è numerabile.

(i) Ogni numero razionale positivo r si può scrivere nella forma $r = \frac{m}{n}$ con m e n interi primi tra loro. Definiamo l'altezza di r, con $h(r) = m + n$. Per ogni k naturale esistono al più $k - 1$ razionali con altezza k, quindi l'insieme dei numeri razionali positivi è unione numerabile di insiemi finiti.

(ii) Un'altra dimostrazione è quella illustrata in figura.

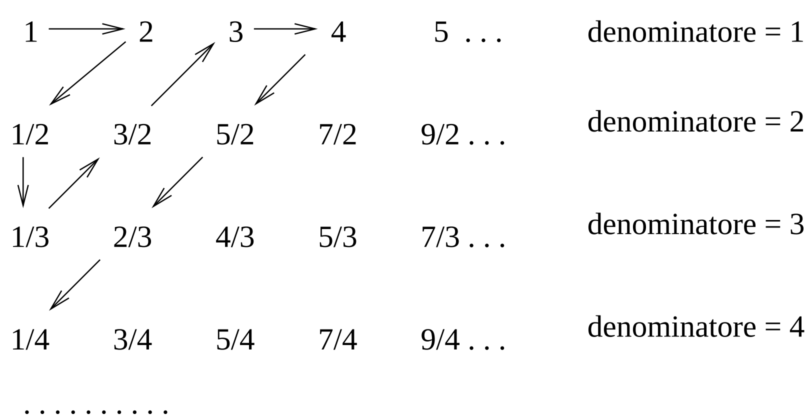

Figura 1. Processo di diagonalizzazione.

Proposizione 1.2.4. *Se A è un insieme numerabile, l'insieme S_A delle successioni finite di elementi di A è numerabile.*

Dimostrazione. Sia $A = \{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$; allora $S_A = \{(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}),\ k \in \mathbb{N},\ a_{j_i} \in A\}$.

Sia $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\}$ la successione dei numeri primi. Associamo l'intero $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}$ ad ogni $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}) \in S_A$. Tale corrispondenza è biunivoca. □

Corollario 1.2.5. *Le coppie ordinate di numeri naturali sono un insieme numerabile. Quindi $\mathbb{Q}$ è numerabile.*

Proposizione 1.2.6. *L'unione di una infinità numerabile di insiemi numerabili è numerabile.*

Dimostrazione. Si usa il processo di diagonalizzazione sulla lista:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, \ldots\}, \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n}, \ldots\}, \\ A_3 &= \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots, a_{3n}, \ldots\}, \end{aligned}$$

(si contano prima gli elementi a_{ij} con i+j=2, poi quelli con $i + j = 3$ e cosìvia). □

Esempio 1.2.7. (Cantor) Gli insiemi infiniti non sono tutti numerabili: per esempio l'intervallo $(0, 1)$ non è numerabile.

Infatti, se fosse numerabile si potrebbero elencare i suoi elementi, scrivendoli in forma decimale:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ x_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ x_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \end{aligned}$$

dove gli a_{ij} sono numeri interi compresi tra 0 e 9. Il numero $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ con $a_j = 1$ se a_{jj} è pari e $a_j = 2$ se a_{jj} è dispari, non è compreso nella successione perché è diverso da tutti quelli elencati.

Si dice che $(0, 1)$ ha la *potenza del continuo.*

Osservazione 1.2.8. Anche $\mathbb{R}$ e $(0, 1)^N$ hanno la potenza del continuo.

Esistono insiemi con cardinalità ancora maggiore ($C(A) \leq C(B)$ se esiste una applicazione $f : A \to B$ iniettiva).

Proposizione 1.2.9. *Sia $P(X)$ l'insieme delle parti di X. Allora*

$$C(X) < C(P(X)).$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che esiste una applicazione $f : X \to P(X)$ iniettiva, ma non ne esiste una $g : P(X) \to X$ biunivoca.

La costruzione di f è banale basta prendere $f : x \mapsto \{x\}$.

Supponiamo che esista g. Sia $A = \{x \in X : x \notin g^{-1}(x)\}$. Siccome $A \in P(X)$, sia $a = g(A)$. Se $a \in A$, allora $a \notin g^{-1}(a) = A$, che è assurdo. Lo stesso, se $a \notin A = g^{-1}(a)$, allora $a \in A$ che è ancora assurdo. □

1.3. Decomposizioni di aperti di $\mathbb{R}^N$

Useremo le seguenti notazioni: per $x \in \mathbb{R}^N$ ed $r > 0$ poniamo

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < r\},$$
$$Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y_i - x_i| < r,\ i = 1, \dots, N\}.$$

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$; un punto $x \in E$ si dice *interno* se esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq E$ (oppure $Q(x,r) \subseteq E$). Si dice che $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è *aperto* se ogni suo punto è interno. Un insieme si dice *chiuso* se è il complementare di un aperto. Indichiamo con $\mathring{E}$ l'*interno di* E e cioè l'insieme dei punti interni di E; è chiaro che E è aperto se e solo se $E = \mathring{E}$

Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *compatto* se da ogni ricoprimento di K si può estrarre un sotto-ricoprimento finito di K.

Teorema 1.3.1. (Cantor) *Ogni aperto di $\mathbb{R}$ è unione al più numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di $\mathbb{R}$. Preso $x \in A$, sia A_x l'unione di tutti gli intervalli aperti contenenti x e contenuti in A. Per costruzione A_x è un intervallo.

Se x e y sono due punti distinti di A allora o $A_x = A_y$ o $A_x \cap A_y = \varnothing$ Infatti se $A_x \cap A_y \neq \varnothing$ allora $A_x \cup A_y$ è un intervallo contenuto in A e contenente sia x che y.

Poiché A_x è un intervallo, allora contiene almeno un razionale e quindi gli intervalli A_x che sono distinti (e quindi disgiunti) sono al più un'infinità numerabile e la loro unione è uguale A. □

Un insieme aperto di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, in generale, non può essere decomposto in un'unione numerabile di cubi aperti a due a due disgiunti; il Teorema 1.3.2 dimostra che esso può essere però decomposto in un'unione numerabile di cubi chiusi con interni a due a due disgiunti.

Premettiamo alcune notazioni. Fissati $n \in \mathbb{N}$ ed $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$, poniamo:

$$Q_{m,n} = \{x \in \mathbb{R}^N : (m_i - 1)2^{-n} \leq x, \leq m_i 2^{-n}, i = 1, \dots, N\}$$
$$\mathcal{Q}_n = \{Q_{m,n} : m \in \mathbb{Z}^N\},$$

È chiaro che

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^N = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}^N} Q_{m,n}$;

(ii) $\mathring{Q}_{m,n} \cap \mathring{Q}_{m',n} = \varnothing$ se $m \neq m', n \in \mathbb{N}$;

(iii) per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ ed $r > 0$ esistono $n \in \mathbb{N}$ e $Q_{m,n} \in \mathcal{Q}_n$ tali che $x \in Q_{m,n} \subset B(x,r)$ (basterà scegliere m_i uguale alla parte intera di $x_i 2^{-n}, i = 1, \ldots, N$, ed $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-n}\sqrt{N} < r$).

Infine, un insieme P si dirà un *plurintervallo* se è l'unione finita di cubi chiusi.

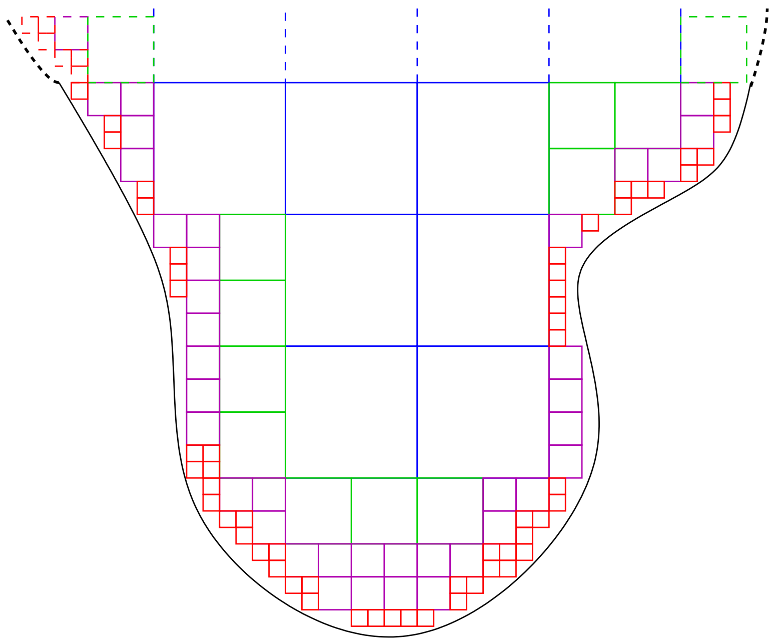

Figura 2. Decomposizione diadica di un aperto.

Teorema 1.3.2. (Decomposizione diadica di un aperto di $\mathbb{R}^N$) *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora A è unione di un'infinità numerabile di intervalli chiusi a due a due privi di punti interni in comune. Inoltre tali intervalli si possono scegliere tutti con diametro più piccolo di qualsiasi numero prefissato.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ e scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-n}\sqrt{N} < \varepsilon$. L'aperto A contiene al più un'infinità numerabile di cubi di $\mathcal{Q}_n$; indichiamo con B_1 la loro unione.

C'è allora un'infinità numerabile di cubi di $\mathcal{Q}_{n+1}$ contenuti in $A \setminus \mathring{B}_1$. Iterando questo ragionamento, possiamo dire che esiste al più un'infinità numerabile di cubi di $\mathcal{Q}_{n+k}$ contenuti nel complementare dell'interno di $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} B_i$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato.

L'unione $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} B_i$ consiste allora di un'infinità numerabile di cubi a due a due privi di punti interni in comune ed è chiaro che essa è contenuta in

A. D'altra parte, se $x \in A$ esiste $r > 0$ con $B(x,r) \subseteq A$ e quindi, per la proprietà (iii), esistono $k \in \mathbb{N}$ ed $m \in \mathbb{Z}^N$ tali che $x \in Q_{m,n+k} \subset B(x,r)$, ossia

$$x \in \bigcup_{i=0}^{k} B_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i.$$

□

Corollario 1.3.3. *(i) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora esiste una successione crescente di plurintervalli P_n tale che*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = A.$$

(ii) Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ compatto. Allora esiste una successione decrescente di plurintervalli Q_n tale che

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathring{Q}_n = K.$$

Dimostrazione. (i) Basterà prendere come P_n l'unione di tutti i cubi in $\bigcup_{i=0}^{n} B_i$ contenuti nel cubo $Q(0,n)$. Ciò garantisce che i cubi scelti siano in numero finito e che $P_n \subseteq P_{n+1}$.

(ii) Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $K \subset Q(0,\nu)$; $Q(0,\nu) \setminus K$ è aperto, esiste allora una successione crescente in P_n tale che

$$Q(0,\nu) \setminus K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

Basterà allora scegliere $Q_n = \overline{Q(0,\nu) \setminus P_n}$. □

1.4. Alcuni risultati sulle funzioni convesse

Siano $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Una funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice *convessa* in $[a,b]$ se, per ogni t_0 ed $t_1 \in [a,b]$, risulta

$$\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) \leq (1-\lambda)\,\varphi(t_0) + \lambda\,\varphi(t_1) \quad \text{per ogni} \quad \lambda \in [0,1]. \tag{1.1}$$

È chiaro che φ è convessa se e solo se è convesso l'insieme:

$$\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a,b], s > \varphi(t)\}.$$

Inoltre, si dirà che φ è *concava* se $-\varphi$ è convessa.

Proposizione 1.4.1. *Siano $\varphi_n, n \in \mathbb{N}$, funzioni convesse in $[a,b]$.*

Allora

(i) se $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$, sono numeri non negativi, la funzione $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \varphi_n$ è convessa in $[a,b]$;

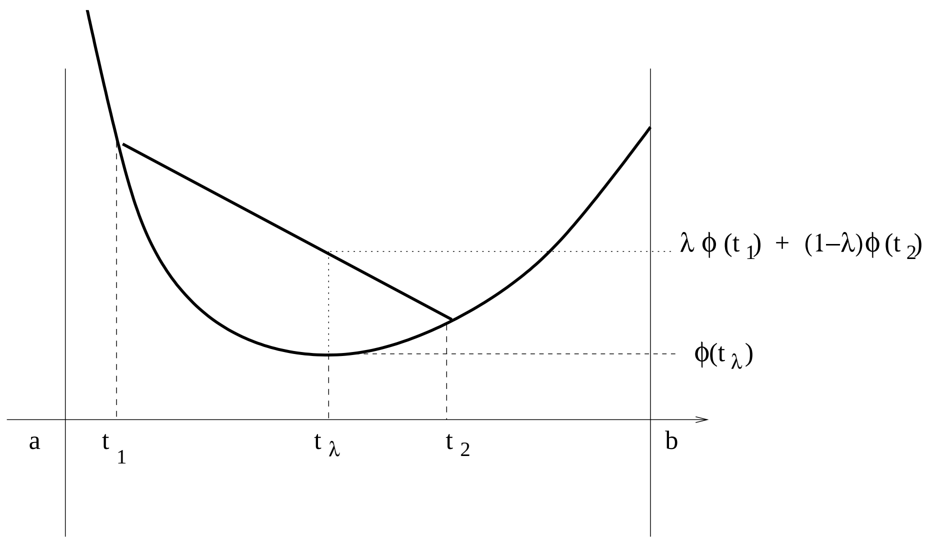

Figura 3. Funzione convessa; $t_\lambda = (1-\lambda)t_0 + \lambda t_1$.

(ii) se φ_n converge in $[a,b]$ ad una funzione φ, questa risulta convessa in $[a,b]$.

Dimostrazione. Fissati t_0 ed $t_1 \in [a,b]$, risulta:

$$\varphi_n((1-\lambda)t_0 + \lambda t_1) \leq (1-\lambda)\,\varphi_n(t_0) + \lambda\,\varphi_n(t_1),$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. La conclusione (i) si ottiene moltiplicando per $\alpha_n \geq 0$ e poi sommando su $n \in \mathbb{N}$. La (ii) segue invece semplicemente passando al limite sia a destra che a sinistra nella disuguaglianza. □

Proposizione 1.4.2. *Sia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ una famiglia di funzioni convesse in $[a,b]$. Allora la funzione φ definita da*

$$\varphi(t) = \sup_{i\in I} \varphi_i(t),\ \ t \in [a,b],$$

è convessa in $[a,b]$.

Dimostrazione. Siano $t_0, t_1 \in [a,b]$ e $\lambda \in (0,1)$.

Se il valore $\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1)$ è finito, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $i \in I$ tale che

$$\varphi((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1)\ <\ \varphi_i((1-\lambda)\,t_0 + \lambda\,t_1) + \varepsilon \leq \\ (1-\lambda)\,\varphi_i(t_0) + \lambda\,\varphi_i(t_1) + \varepsilon \leq (1-\lambda)\,\varphi(t_0) + \lambda\,\varphi(t_1) + \varepsilon,$$

e quindi si conclude per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Se $\varphi((1-\lambda)\,t_0+\lambda\,t_1)=+\infty$, fissato n esiste $i\in I$ tale che

$$n<\varphi_i((1-\lambda)\,t_0+\lambda\,t_1)\le(1-\lambda)\,\varphi_i(t_0)+\lambda\,\varphi_i(t_1)$$

e quindi anche $(1-\lambda)\,\varphi(t_0)+\lambda\,\varphi(t_1)=+\infty$. □

Teorema 1.4.3. *Sia* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *convessa in* $[a,b]$.

Allora la funzione ψ *definita da*

$$\psi(t,s)=\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \tag{1.2}$$

per ogni $t,s\in[a,b]$ *con* $t\neq s$, *è crescente rispetto a ciascuna variabile.*

Dimostrazione. Si noti che $\psi(s,t)=\psi(t,s)$ per ogni $t,s\in[a,b]$ con $t\neq s$; basta quindi dimostrare la monotonia rispetto ad una delle due variabili.

Siano $t<s$ e $\lambda\in(0,1)$; risulta:

$$\varphi(\lambda\,t+(1-\lambda)\,s)\le\lambda\;\varphi(t)+(1-\lambda)\;\varphi(s)=\varphi(t)+(1-\lambda)[\varphi(s)-\varphi(t)]$$

e quindi

$$\frac{\varphi(\lambda\,t+(1-\lambda)\,s)-\varphi(t)}{(1-\lambda)(s-t)}\le\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t}=\psi(t,s).$$

Se $t<u<s$, esiste $\lambda\in(0,1)$ tale che $u=\lambda t+(1-\lambda)s$, e quindi

$$\psi(t,u)\le\psi(t,s).$$

Perciò ψ cresce per ogni t fissato. □

Teorema 1.4.4. *Sia* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *convessa. Allora:*

(i) *per ogni* $t\in(a,b)$ *esistono finiti i numeri*

$$\varphi'(t^+)=\lim_{h\to0^+}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h},\;\;\varphi'(t^-)=\lim_{h\to0^-}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h};$$

(ii) φ *è continua in* (a,b);

(iii) $\varphi'(t^-)\le\varphi'(t^+)$ *per ogni* $t\in(a,b)$;

(iv) *la derivata* φ' *esiste eccettuata al più un'infinità numerabile di punti ed inoltre* φ' *è crescente.*

Dimostrazione. (i) Fissiamo $h>0$ ed α,β,s e t in modo che $a<\alpha<t<t+h<s-h<s<\beta<b$; per il Teorema 1.4.3 si ha:

$$\psi(\alpha,t)\le\psi(t+h,t)\le\psi(t,s)\le\psi(s,s-h)\le\psi(s,\beta)$$

e quindi

$$\psi(\alpha,t)\le\varphi'(t^+)=\lim_{h\to0^+}\psi(t+h,t)\le\psi(t,s)\le$$

$$\lim_{h\to0^+}\psi(s,s-h)=\varphi'(s^-)\le\psi(s,\beta).$$

Perciò vale la (i) e risulta che

$$\varphi'(t^+) \le \varphi'(s^-) \quad \text{se} \quad t < s. \tag{1.3}$$

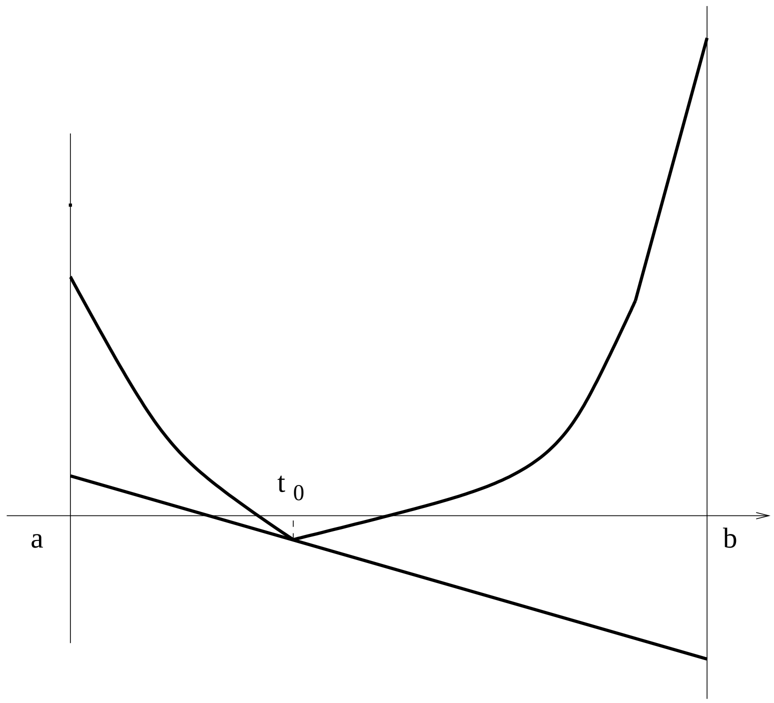

Figura 4. Retta di supporto in t_0.

(ii) Per ogni $t \in (a, b)$ risulta:

$$\lim_{s \to t^\pm} [\varphi(s) - \varphi(t)] = \varphi'(t^\pm) \lim_{s \to t^\pm} (s - t) = 0,$$

dato che $\varphi'(t^\pm)$ è finito per la (i).

(iii) Se $h > 0$ è tale che $a < t - h < t < t + h < b$, si ha che

$$\psi(t - h, t) \le \psi(t - h, t + h) \le \psi(t, t + h)$$

e quindi, facendo tendere h a zero, si ottiene che $\varphi'(t^-) \le \varphi'(t^+)$.

(iv) Sia $I = \{t \in (a, b) : \varphi'(t^-) < \varphi'(t^+)\}$. Per ogni $t \in I$, scegliamo un solo numero razionale nell'intervallo $(\varphi'(t^-), \varphi'(t^+))$; abbiamo così definito un'applicazione dall'insieme I a $\mathbb{Q}$. Quest'applicazione è iniettiva, perchè ogni volta che $t, s \in I$ e $t \ne s$, gli intervalli $(\varphi'(t^-), \varphi'(t^+))$ e $(\varphi'(s^-), \varphi'(s^+))$ sono disgiunti per la (1.3). Ciò implica che I è numerabile. Inoltre, se $t \notin I$, la (1.3) implica che φ' cresce. $\square$

Corollario 1.4.5. *Se φ è convessa in $[a,b]$, allora per ogni $t \in (a,b)$ esiste $p_t \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + p_t(s-t),$$

per ogni $s \in [a,b]$.

Dimostrazione. Sia $p_t \in [\varphi'(t^-), \varphi'(t^+)]$. Allora, se $s > t$, si ha:

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} \geq \varphi'(t^+) \geq p_t,$$

mentre se $s < t$

$$\frac{\varphi(s)-\varphi(t)}{s-t} \leq \varphi'(t^-) \leq p_t,$$

per la (1.3). In ogni caso, vale la tesi del corollario. □

Una retta $s = \varphi(t_0) + p_{t_0}(t-t_0)$ tale che

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + p_{t_0}(t-t_0)$$

per ogni $t \in [a,b]$ si dice una *retta di supporto* per φ in t_0.

1.5. Estensioni di funzioni continue

Sia f una funzione continua definita su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ a valori in $\mathbb{R}$. Il *modulo di continuità* di f in E è la funzione crescente $\omega_f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ definita da

$$\omega(f,\delta) = \sup_{\substack{|x-y|<\delta \\ x,y\in E}} |f(x)-f(y)|, \quad \delta > 0. \tag{1.4}$$

La funzione f è uniformemente continua su E se e solo se $\omega(f,\delta) \to 0$ per $\delta \to 0$.

Supponiamo che esistano due numeri positivi a, b tali che

$$\omega(f,\delta) \leq a\delta + b \quad \text{per ogni} \quad \delta > 0.\text{[1]} \tag{1.5}$$

Possiamo allora definire il *modulo di continuità concavo* di f in E come la funzione $c_f : (0,\infty) \to [0,\infty)$ tale che

$$c_f(\delta) = \inf\{a\delta + b : as + b \geq \omega(f,s) \text{ per ogni } s > 0\}.$$

Teorema 1.5.1. *Sia f uniformemente continua su un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ con modulo di continuità $\omega(f,\delta)$ soddisfacente* (1.5).

Esiste un funzione f^* continua su $\mathbb{R}^N$ tale che

(i) $f^* = f$ *in* E;

(ii) $\sup_{\mathbb{R}^N} f^* = \sup_E f, \quad \inf_{\mathbb{R}^N} f^* = \inf_E f$;

(iii) $c_{f^*} = c_f$.

[1] Si osservi che, se E è limitato ed f è continua in E, allora (1.5) è sicuramente soddisfatta.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo:

$$g(x) = \inf_{y \in E}\{f(y) + c_f(|x-y|)\} \quad \text{e} \quad f^*(x) = \min[g(x), \sup_E f].$$

(i) Per come c_f è stata definita, $c_f(|x-y|) \geq |f(x) - f(y)|$ e quindi per $x \in E$ si ha:

$$f(y) + c_f(|x-y|) \geq f(y) + |f(x) - f(y)| \geq f(x)$$

per ogni $y \in E$. Perciò $g(x) \geq f(x)$ per $x \in E$ e quindi $g(x) = f(x)$ per $x \in E$, dato anche che $f(x) = f(x) + c_f(|x-x|) \geq g(x)$.

(ii) Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e ogni $y \in E$, risulta che

$$\inf_E f + \inf_{y \in E} c_f(|x-y|) \leq g(x) \leq f(y) + c_f(|x-y|)$$

e quindi

$$\inf_E f = \inf_E g \geq \inf_{\mathbb{R}^N} g \geq \inf_E f + \inf_{\mathbb{R}^N} \inf_{y \in E} c_f(|x-y|) = \inf_E f,$$

ossia $\inf_{\mathbb{R}^N} f^* = \inf_{\mathbb{R}^N} g = \inf_E f$. D'altra parte, è chiaro che $\sup_E f \leq \sup_{\mathbb{R}^N} f^* \leq \sup_E f$.

(iii) Basta dimostrare che $c_g = c_f$. Fissati $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $y \in E$ tale che

$$g(x_1) \geq f(y) + c_f(|x_1 - y|) - \varepsilon$$

e quindi

$$g(x_1) - g(x_2) \geq f(y) + c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon.$$

Se $|x_2 - y| \leq |x_1 - x_2|$, abbiamo che

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) \quad &\geq \quad c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon \geq -c_f(|x_2 - y|) - \varepsilon \geq \\ &\quad -c_f(|x_2 - x_1|) - \varepsilon, \end{aligned}$$

dato che $c_f(\delta)$ è crescente.

Altrimenti, $|x_1 - y| > |x_2 - y| - |x_2 - x_1| > 0$. Poiché $c_f(\delta)$ è concava, la funzione ψ del Teorema 1.4.3 relativa a c_f è decrescente nelle due variabili. Perciò :

$$\begin{aligned} &\frac{c_f(|x_1 - y|) - c_f(0)}{|x_1 - y|} = \psi(|x_1 - y|, 0) \geq \psi(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|, 0) \geq \\ &\psi(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|, |x_2 - x_1|) = \\ &\frac{c_f(|x_1 - y| + |x_2 - x_1|) - c_f(|x_2 - x_1|)}{|x_1 - y|} \geq \frac{c_f(|x_2 - y|) - c_f(|x_2 - x_1|)}{|x_1 - y|}, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue ancora dal fatto che $c_f(\delta)$ cresce.

Poiché $c_f(0) = 0$, concludiamo che

$$c_f(|x_1 - y|) - c_f(|x_2 - y| \geq -c_f(|x_2 - x_1|)$$

e quindi nei due casi esaminati otteniamo

$$g(x_1) - g(x_2) \geq -c_f(|x_2 - x_1|) - \varepsilon.$$

Scambiando il ruolo di x_1 ed x_2 abbiamo infine che

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq c_f(|x_2 - x_1|),$$

tenendo conto che ε è arbitrario. □

Osservazione 1.5.2. È chiaro che $\omega(f, \delta) \to 0$ se $c_f(\delta) \to 0$ per $\delta \to 0^+$, dato che $\omega(f, \delta) \leq c_f(\delta)$.

Viceversa, dato che esistono $\overline{a}$ e b tali che $\omega(f, s) \leq \overline{a}s + \overline{b}$ per ogni $s \geq 0$, per ogni $\delta > 0$ ed $a > \overline{a}$ si ha:

$$c_f(\delta) \leq a\,\delta + \sup_{s\geq 0}\{\omega(f, s) - a\,s\} \leq$$
$$a\,\delta + \sup_{0\leq s\leq \frac{\overline{b}}{a-\overline{a}}}\{\omega(f, s) - a\,s\} \leq a\,\delta + \omega(f, \overline{b}/(a - \overline{a})).$$

Perciò :

$$\lim_{\delta\to 0^+} c_f(\delta) \leq \omega(f, \overline{b}/(a - \overline{a}))$$

per ogni $a > \overline{a}$ e quindi $\lim\limits_{\delta\to 0^+} c_f(\delta) = 0$.

Esercizi

1. Se $a_n \geq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

   Vale anche

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \geq \limsup_{n\to\infty} b_n?$$

2. Confrontare $\limsup\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ con

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

   Trovare degli esempi in cui il primo numero è differente dagli altri.

3. Sia f una funzione continua in $(0, 1)$ e tale che

$$\liminf_{x\to 0} f(x) < \limsup_{x\to 0} f(x).$$

   Allora per ogni valore $l \in (\liminf_{x\to 0} f(x), \limsup_{x\to 0} f(x))$ esiste una successione x_n in $(0, 1)$, convergente a 0 e tale che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l.$$

4. Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi e si definiscano:

$$E' = \liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \quad E'' = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k.$$

   Provare che $E' \subseteq E''$. Trovare un esempio in cui valga l'inclusione stretta.

5. Con le notazioni dell'esercizio precedente, dimostrare che

$$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{X}_{E_n} = \mathcal{X}_{E''}.$$

6. Sia

$$E_n = \{x \in [0, 2\pi] : \frac{\sin(nx)}{n} > 0\},\ n \in \mathbb{N}.$$

   Calcolare E' ed E''.

7. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in A$ esiste un $\delta > 0$ per il quale $A \cap (x, x + \delta) = \varnothing$. Dimostrare che A è numerabile.

8. Sia f una funzione crescente in un intervallo aperto non vuoto $I \subset \mathbb{R}$. È noto che i punti di discontinuità di f sono solo di prima specie (salti finiti). Sia allora S l'insieme di tali punti di discontinuità in I. Dimostrare che
   (i) S è al più numerabile;
   (ii) se $A = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$, allora esiste una funzione crescente f i cui punti di discontinuità sono esattamente quelli di A.

9. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle successioni a valori 0 o 1 e sia $f : \mathcal{S} \to [0, 2]$ la funzione definita da

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^n},\ \ x = \{x_0, x_1, \dots\} \in \mathcal{S}.$$

   (i) Dimostrare che ogni elemento di $[0, 2]$ ha al più due immagini inverse secondo f;
   (ii) determinare l'insieme D degli elementi di $[0, 2]$ che hanno due immagini inverse;
   (iii) dimostrare che D e $f^{-1}(D)$ sono infiniti e numerabili.

10. Sia I un insieme qualsiasi e sia $f : I \to [0, +\infty)$. Si definisca

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sup\Big\{\sum_{i\in J} f(i) : J \subset I, J \text{ finito}\Big\}.$$

   Dimostrare che se $\sum_{i\in I} f(i) < \infty$ allora l'insieme $A = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$ è al più numerabile.

11. Sia f continua in $[a,b]$ e tale che, fissati comunque x e y in $[a,b]$, si ha $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Provare che f è convessa. (Si veda *Courant-Hilbert, Methods of Mathematical Physics, vol. II,* per un controesempio a questo esercizio, nel caso in cui l'ipotesi di continuità sia rimossa.)
12. Costruire una funzione convessa in un intervallo che sia non derivabile in un'infinità numerabile di punti arbitrariamente scelta nell'intervallo.
13. Dimostrare l'inverso del Corollario 1.4.5: se ogni punto del grafico di φ ammette una retta di supporto, allora φ è convessa.
14. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che la funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$\varphi(t) = \int_a^t f(s)\, ds, \quad t \in [a,b],$$
è convessa.
15. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione crescente e sia $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Dimostrare che la funzione $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da
$$\varphi(t) = \int_a^b f(|t-s|)\, ds, \quad t \in [a,b],$$
è convessa.
16. Sia f convessa in $(0,+\infty)$; provare che esiste $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Capitolo 2

La misura di Lebesgue

2.1. Misura di aperti

Se $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$ è un intervallo, poniamo

$$m(I) = m(\mathring{I}) = \text{ misura di } I = (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N).$$

Se P è un plurintervallo allora si potrà scrivere che $P = \bigcup_{j=1}^{n} I_j$ dove $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_k = \varnothing$ per $j \neq k$. Si definisce allora

$$m(P) = m(\mathring{P}) = \sum_{j=1}^{n} m(I_j).$$

È chiaro che questa definizione non dipende dalla particolare decomposizione di P; è chiaro inoltre che

$$m(P \cup Q) = m(P) + m(Q) \quad \text{se} \quad \mathring{P} \cap \mathring{Q} = \varnothing. \tag{2.1}$$

In generale si ha

$$m(P \cup Q) + m(P \cap Q) = m(P) + m(Q).$$

e quindi

$$m(P \cup Q) \leq m(P) + m(Q). \tag{2.2}$$

Infatti, dato che $P = \overline{P \setminus Q} \cup (P \cap Q)$, $Q = \overline{Q \setminus P} \cup (P \cap Q)$ e $P \cup Q = \overline{P \setminus Q} \cup (P \cap Q) \cup \overline{Q \setminus P}$, si ha:

$$m(P) + m(Q) = m(\overline{P \setminus Q}) + m(P \cap Q) + m(\overline{Q \setminus P}) + m(P \cap Q) = \\ m(P \cup Q) + m(P \cap Q) \geq m(P \cup Q),$$

dato che ognuna di queste unioni è fra plurintervalli con interni a due a due disgiunti. Si noti inoltre che (2.1) implica che $m(P) \leq m(Q)$ se $P \subseteq Q$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto definiamo:

$$m(A) = \text{misura di } A = \sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo } \subset A\}. \tag{2.3}$$

Osservazione 2.1.1. Dato che $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ con $\mathring{I}_j \cap \mathring{I}_k \neq \varnothing$ se $j \neq k$ per il Teorema 1.3.2, si ha:

$$m(A) = \sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k). \tag{2.4}$$

Infatti ogni $P_n = \bigcup_{k=1}^{n} I_k$ è un plurintervallo contenuto in A e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) = m(P_n) \leq m(A)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui $\sum_{k\in\mathbb{N}} m(I_k) \leq m(A)$. D'altra parte, se $m(A) < \infty$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $P \subset A$ tale che $m(P) > m(A) - \varepsilon/2$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo J_k contenente I_k al suo interno e tale che

$$m(J_k) < m(I_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

L'unione degli interni di tutti i J_k è allora un ricoprimento aperto di P, da cui possiamo estrarre un sottoricoprimento finito; possiamo supporre che questo sia fatto dai primi n intervalli J_k. Perciò

$$m(A) - \varepsilon/2 < m(P) \leq m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} J_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} m(J_k) <$$
$$\sum_{k=1}^{n} m(I_k) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) + \varepsilon/2.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \geq m(A)$.

Se invece $m(A) = \infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $P \subset A$ tale che $m(P) > n$ e quindi si ripete il ragionamento di prima.

Teorema 2.1.2. (Subadditività ed additività sugli aperti) *Siano $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti tutti contenuti in un intervallo I di $\mathbb{R}^N$. Allora*

(i) $m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$*;*

(ii) $m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n)$ *se* $A_m \cap A_n = \varnothing$ *per* $m \neq n$*.*

Dimostrazione. (i) Sia $P \subset A_1 \cup A_2$. Esistono due successioni crescenti di plurintervalli P_n e Q_n tali che

$$A_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n, \quad A_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n.$$

Allora $A_1 \cup A_2 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (P_n \cup Q_n)$ e quindi esisterà $n \in \mathbb{N}$ tale che $P \subseteq P_n \cup Q_n$. Perciò (2.2) e (2.3) implicano che

$$m(P) \leq m(P_n \cup Q_n) \leq m(P_n) + m(Q_n) \leq m(A_1) + m(A_2),$$

per ogni $P \subset A_1 \cup A_2$. Quindi $m(A_1 \cup A_2) \leq m(A_1) + m(A_2)$. Iterando quest'ultima disuguaglianza otteniamo:

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{k} m(A_n),$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Infine, se $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, dato che P è compatto esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$P \subset \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

e quindi

$$m(P) \leq m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{k} m(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

e dunque la tesi.

(ii) Per quanto già osservato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $m(A_n) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} m(I_{k,n})$ dove $A_n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_{k,n}$ e gli $I_{k,n}, k \in \mathbb{N}$, sono a due a due privi di punti interni in comune.

Dato che gli A_n sono a due a due disgiunti tutti gli $I_{k,n}$, $n, k \in \mathbb{N}$, sono a due a due privi di punti interni in comune ed inoltre

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} I_{k,n}.$$

Perciò

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n,k=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} m(I_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n).$$

$\square$

Osservazione 2.1.3. È chiaro che, scegliendo $A_k = \varnothing$ per $k \geq n$, dal teorema otteniamo anche che

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

e

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k) \quad \text{se} \quad A_j \cap A_k = \varnothing, j \neq k.$$

2.2. Misura di Peano - Jordan

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Poniamo allora

$$p_e(E) = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo con } \mathring{P} \supseteq E\},$$
$$p_i(E) = \sup\{m(P) : P \text{ plurintervallo con } P \subseteq E\}.$$

Se $p_i(E) = p_e(E)$ si dice che E è *misurabile secondo Peano - Jordan* con misura $p(E) = p_i(E) = p_e(E)$.

Esempio 2.2.1. (Insieme non misurabile secondo Peano-Jordan) L'insieme $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ non è misurabile secondo Peano-Jordan, perché ogni $P \subseteq E$ è vuoto, mentre ogni P con $\mathring{P} \supseteq E$ ha misura maggiore o uguale ad 1.

D'altra parte, E è numerabile, cioè $E = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Quindi questo esempio ci informa anche che l'unione numerabile di insiemi misurabili secondo Peano-Jordan (ciascun insieme $\{q_n\}$) non è in generale misurabile secondo Peano-Jordan. La misura di Lebesgue che stiamo per definire ovvierà a questo inconveniente.

2.3. Misure esterna ed interna di Lebesgue

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Si pone allora

$$m_e(E) = \textit{misura esterna di } E = \inf\{m(A) : A \text{ aperto } \supseteq E\}. \tag{2.5}$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^N$ un compatto. Si pone per definizione

$$m(K) = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo, } \mathring{P} \supset K\}.$$

È chiaro che se P è un plurintervallo chiuso allora la misura (del compatto) P coincide con la misura del plurintervallo P precedentemente definita.

Sia $E \in \mathbb{R}^N$ un insieme limitato. Si pone per definizione

$$m_i(E) = \textit{misura interna di } E = \sup\{m(K) : K \text{ compatto } \subseteq E\}.$$

Osservazione 2.3.1. È chiaro che la misura esterna di un aperto limitato A coincide con la sua misura precedentemente definita. Analogamente, anche la misura interna di un compatto K coincide con la sua misura precedentemente definita.

Infatti, per esempio, se A è aperto allora, per ogni aperto $B \supseteq A$, si ha $m(A) \leq m(B)$ e quindi $m(A) \leq m_e(A)$; d'altra parte $A \subseteq A$ e quindi $m_e(A) \leq m(A)$.

Teorema 2.3.2. (Subadditività della misura esterna) *Siano* $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *insiemi limitati di* $\mathbb{R}^N$ *tutti contenuti in un intervallo. Allora risulta che*

$$m_e\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k).$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste un aperto A_k contenente E_k e tale che $m(A_k) < m_e(E_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}$.

L'insieme $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k$ è limitato e contenuto nell'aperto $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ e quindi per il Teorema 2.1.2

$$\begin{aligned} m_e\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\Big) \quad &\leq \quad m\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} m(A_k) < \sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \\ &\sum_{k\in\mathbb{N}} m_e(E_k) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Si conclude allora per l'arbitrarietá di $\varepsilon > 0$. □

2.4. Insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue

Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ limitato e siano K ed A un compatto ed un aperto tali che $K \subseteq E \subseteq A$. Dato che

$$K \subset \bigcup \{\mathring{I} : I \text{ intervallo}, \, I \subset A, \mathring{I} \cap K \neq \varnothing\} \subseteq A$$

e che K è compatto, esiste un numero finito di intervalli $I_1, \ldots, I_n \subset A$ tali che $K \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \mathring{I}_k$.

Posto $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k$, P è un plurintervallo e $K \subset \mathring{P} \subset P \subset A$. Perciò

$$m(K) \leq m(P) \leq m(A)$$

e dunque vale sempre la disuguaglianza

$$m_i(E) \leq m_e(E). \tag{2.6}$$

Si dice allora che un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^N$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $m_i(E) = m_e(E)$; in questo caso si pone

$$m(E) = \textit{misura (di Lebesgue) di } E = m_i(E) = m_e(E). \tag{2.7}$$

Osservazione 2.4.1. Gli insiemi aperti o chiusi limitati sono misurabili secondo Lebesgue e la loro misura (di Lebesgue) coincide con quelle precedentemente definite.

Infatti se, per esempio, A è aperto, esiste una successione crescente di plurintervalli (chiusi) tali che $m(A) = \lim_{n\to\infty} m(P_n)$. Ogni insieme P_n è compatto e $P_n \subset A$. Quindi $m(P_n) \leq m_i(A)$ da cui $m(A) \leq m_i(A)$. Abbiamo già osservato che $m(A) = m_e(A)$.

In modo analogo si dimostra che $m(K) = m_i(K) = m_e(K)$.

Osservazione 2.4.2. È evidente che, se E è limitato, risulta:

$$p_i(E) \leq m_i(E) \leq m_e(E) \leq p_e(E).$$

Perciò ogni insieme misurabile secondo Peano-Jordan è anche misurabile secondo Lebesgue e le due misure coincidono.

Come abbiamo visto l'insieme $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ non è misurabile secondo Peano-Jordan; esso è invece misurabile secondo Lebesgue ed ha misura nulla poiché

$$0 \leq m_i(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq m_e(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_e(\{q_n\}) = 0.$$

Lemma 2.4.3. (Superadditività finita) *Siano $H, K \subset \mathbb{R}^N$ compatti e disgiunti. Allora*

$$m(H \cup K) \geq m(H) + m(K).$$

In particolare, se E ed F sono insiemi limitati e disgiunti, allora

$$m_i(E \cup F) \geq m_i(E) + m_i(F).$$

Dimostrazione. Sia P un plurintervallo tale che $\mathring{P} \supset H \cup K$ e $m(P) < m(H \cup K) + \varepsilon$.

Dato che H e K sono compatti e disgiunti, la distanza $d(H,K)$ tra di essi è positiva. Scegliamo allora una decomposizione diadica di $\mathbb{R}^N$ in modo che il diametro di ogni cubo $Q_{m,n}$ sia più piccolo di $d(H,K)$. Possiamo definire quindi senza ambiguità i plurintervalli

$$P_H = \bigcup_{H\cap \mathring{Q}_{m,n} \neq \varnothing} Q_{m,n} \cap P, \quad P_K = \bigcup_{K\cap \mathring{Q}_{m,n} \neq \varnothing} Q_{m,n} \cap P.$$

Risulta che $P \supseteq P_H \cup P_K$, $\mathring{P}_H \supset H$, $\mathring{P}_K \supset K$ e $\mathring{P}_H \cap \mathring{P}_K = \varnothing$. Perciò :

$$m(H \cup K) + \varepsilon > m(P) \geq m(P_H \cup P_K) = m(P_H) + m(P_K) \geq m(H) + m(K).$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude che $m(H \cup K) \geq m(H) + m(K)$.

Ora, per ogni H compatto, $H \subseteq E$, ed ogni K compatto, $K \subseteq F$, si ha che H e K sono disgiunti e quindi

$$m(H) + m(K) \leq m(H \cup K) \leq m_i(E \cup F).$$

Per l'arbitrarietà di H in E e di K in F, si conclude che $m_i(E \cup F) \geq m_i(E) + m_i(F)$. □

Teorema 2.4.4. (Primo principio di Littlewood) *Condizione necessaria e sufficiente perché un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^N$ sia misurabile secondo Lebesgue è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un compatto K ed un insieme F tali che*

$$K \cup F = E \quad e \quad m_e(F) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Se E è misurabile, (2.7) implica che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un compatto $K \subseteq E$ ed un aperto $A \supseteq E$ tali che $m(A) - m(K) < \varepsilon$. Posto $F = E \setminus K$ si ha che $E = K \cup F$ e $m_e(F) \leq m(A \setminus K)$, dato che $A \setminus K$ è un aperto che contiene F.

D'altra parte, $A \setminus K$, A e K sono misurabili perché aperti o compatti, e $(A \setminus K) \cup K = \varnothing$; quindi $m(A) = m_i(A) \geq m_i(A \setminus K) + m_i(K) = m(A \setminus K) + m(K)$, e dunque $m_e(F) \leq m(A \setminus K) = m(A) - m(K) < \varepsilon$.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un compatto K ed un insieme F con $E = K \cup F$ e $m_e(F) < \varepsilon$, otteniamo

$$m_e(E) \leq m_e(K) + m_e(F) < m(K) + \varepsilon \leq m_i(E) + \varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $m_e(E) \leq m_i(E)$. Si conclude con (2.6). □

2.5. Complementare, intersezione e unione

Teorema 2.5.1. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e contenuto in un intervallo I. Allora anche $I \setminus E$ è misurabile e risulta che $m(I \setminus E) = m(I) - m(E)$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$, esistono un compatto $K \subseteq E$ ed un aperto A, $E \subseteq A$, tali che $m(A) - m(K) < \varepsilon$. Si ha che $I \setminus E = (I \setminus A) \cup F$, dove $F = (I \setminus E) \setminus (I \setminus A)$, e $I \setminus A$ è compatto. Inoltre, $F \subseteq (A \cap I) \setminus K$. Perciò

$$m_e(F) \leq m_e((A \cap I) \setminus K) \leq m(A \setminus K) = m(A) - m(K) < \varepsilon.$$

Per il primo principio di Littlewood allora $I \setminus E$ è misurabile. D'altra parte, $I = (I \setminus E) \cup E$ e $(I \setminus E) \cap E = \varnothing$; quindi

$$m(I) \geq m_i(I \setminus E) + m_i(E) = m_e(I \setminus E) + m_e(E) \geq m(I).$$

□

Teorema 2.5.2. *L'intersezione di un numero finito o di un'infinità numerabile di insiemi limitati misurabili contenuti in un intervallo I è misurabile.*

Dimostrazione. Siano $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ insiemi misurabili contenuti in I e sia $\varepsilon > 0$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono un compatto $K_n \subseteq E_n$ ed un insieme F_n tali che $E_n = K_n \cup F_n$ e $m_e(F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Dato che

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \Big) \cup F,$$

con $F \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, e $m_e(F) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_e(F_n) < \varepsilon$, per il primo principio di Littlewood si ha che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è misurabile, perché $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ è compatto. □

Teorema 2.5.3. (Subaddittività ed additività numerabile) *Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili e tutti contenuti in un intervallo I.*

Allora l'insieme $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ è misurabile e

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n). \tag{2.8}$$

Se inoltre gli insiemi E_n sono a due a due disgiunti, si ha:

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n). \tag{2.9}$$

Dimostrazione. (i) Dato che

$$E = I \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (I \setminus E_n),$$

la misurabilità di E segue dai Teoremi 2.5.1 e 2.5.2.

Inoltre il Teorema 2.3.2 implica:

$$m(E) = m_e(E) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m_e(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

(ii) Siano E_1 ed E_2 misurabili e disgiunti. Per il Lemma 2.4.3 ed il Teorema 2.3.2 otteniamo:

$$m(E_1) + m(E_2) \leq m_i(E_1) + m_i(E_2) \leq m_i(E_1 \cup E_2) \leq$$
$$m_e(E_1 \cup E_2) \leq m_e(E_1) + m_e(E_2) = m(E_1) + m(E_2).$$

Quindi $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.

Iterando questo risultato otteniamo che

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} E_n \Big) \leq m(E)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui $\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \leq m(E)$. □

Osservazione 2.5.4. Se E_1 ed E_2 sono limitati e misurabili ed I è un intervallo contenente sia E_1 che E_2, allora

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap (I \setminus E_2)$$

e quindi anche $E_1 \setminus E_2$ è misurabile.

2.6. Insiemi misurabili non limitati

Un insieme non limitato $E \subseteq \mathbb{R}^N$ si dice *misurabile secondo Lebesgue* se per ogni $r > 0$ è misurabile l'insieme (limitato) $E \cap Q(0, r)$. Se E è misurabile si pone per definizione

$$m(E) = \lim_{r\to\infty} m(E \cap Q(0, r)).$$

Teorema 2.6.1. *Siano E ed $E_1, \dots, E_n, \dots$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$. Allora*

(i) $\mathbb{R}^N \setminus E$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *e* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ *sono misurabili;*

(ii) *risulta*

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \tag{2.10}$$

e inoltre, se gli E_n sono a due a due disgiunti,

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n). \tag{2.11}$$

Dimostrazione. (i) Risulta che $(\mathbb{R}^N \setminus E) \cap Q(0, r) = Q(0, r) \setminus (E \cap Q(0, r))$,

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \cap Q(0, r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap Q(0, r))$$

e

$$\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \cap Q(0, r) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E_n \cap Q(0, r)),$$

per ogni $r > 0$.

(ii) Sia $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$; per il Teorema 2.5.3 si ha:

$$\begin{aligned} m(E \cap Q(0, r)) &= m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \cap Q(0, r)\Big) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n \cap Q(0, r)) \le \\ &\sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n) \end{aligned}$$

Dunque

$$m(E) = \lim_{r\to\infty} m(E \cap Q(0, r)) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(E_n).$$

Se gli E_n sono a due a due disgiunti, si ha per il Teorema 2.5.3

$$\sum_{n=1}^{k} m(E_n \cap Q(0,r)) = m\Big(\bigcup_{n=1}^{k} (E_n \cap Q(0,r)) \Big) \leq m(E)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $r \to \infty$, si ottiene $\sum\limits_{n=1}^{k} m(E_n) \leq m(E)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n) \leq m(E).$$

□

Concludiamo questo paragrafo con alcuni risultati sulla misura di Lebesgue, che ci saranno utili in seguito.

Teorema 2.6.2. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile (anche non limitato) allora*

$$\begin{aligned} m(E) &= \inf\{m(A) : A \textit{ aperto } \supseteq E\} = \\ & \sup\{m(K) : K \textit{ compatto } \subseteq E\}. \end{aligned}$$

Dimostrazione. (i) Se $m(E) = \infty$, allora $m(A) = \infty$ per ogni aperto $A \supseteq E$. Se invece $m(E) < \infty$, siano $E_n = E \cap (Q(0,n) \setminus Q(0,n-1))$, $n \in \mathbb{N}$. Ogni E_n è misurabile e limitato e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A_n \supseteq E_n$ tale che

$$m(A_n) < m(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

L'insieme $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ è aperto e contiene E ed inoltre

$$m(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} m(A_n) < \sum_{n \in \mathbb{N}} m(E_n) + \varepsilon = m(E) + \varepsilon.$$

(ii) Poniamo $F_n = E \cap Q(0,n)$, $n \in \mathbb{N}$. Esiste un compatto $K_n \subseteq F_n$ tale che $m(K_n) > m(F_n) - 1/n$. Perciò

$$\begin{aligned} m(E) &= \lim_{n\to\infty} m(F_n) \leq \lim_{n\to\infty} \{m(K_n) + 1/n\} = \\ & \lim_{n\to\infty} m(K_n) \leq \lim_{n\to\infty} m(F_n) = m(E). \end{aligned}$$

□

Corollario 2.6.3. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile.*

(i) *Esistono una successione crescente di compatti K_n contenuti in E ed una successione decrescente di aperti contenenti E tali che*

$$\lim_{n\to\infty} m(K_n) = m(E) = \lim_{n\to\infty} m(A_n).$$

(ii) *Se* $m(E) < \infty$, *allora* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq E \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ *e*

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big) = m(E) = m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Dimostrazione. (i) Per il teorema precedente esistono aperti $A_n^* \supseteq E$ e compatti $K_n^* \subseteq E$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} m(K_n^*) = m(E) = \lim_{n\to\infty} m(A_n^*).$$

Posto $A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j^*$ e $K_n = \bigcup_{j=1}^{n} K_j^*$, si ha che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed inoltre $A_n^* \supseteq A_n \supseteq E$ e $K_n^* \subseteq K_n \subseteq E$. Perciò

$$\begin{aligned} m(E) \quad &= \quad \lim_{n\to\infty} m(K_n^*) \leq \lim_{n\to\infty} m(K_n) \leq \\ &\quad\ \lim_{n\to\infty} m(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} m(A_n^*) = m(E). \end{aligned}$$

(ii) La tesi segue da (i) osservando che

$$\lim_{n\to\infty} m(K_n) = \ m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n\Big)$$

e che

$$\lim_{n\to\infty} m(A_n) = m\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big),$$

dato che $\{A_n\}_n \in \mathbb{N}$ decresce e $m(A_1) < \infty$ essendo $m(E) < \infty$. □

2.7. Esempi notevoli

Concludiamo il capitolo con alcuni esempi importanti.

Esempio 2.7.1. (Aperto di misura piccola con frontiera grande) Siano $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i razionali di $\mathbb{R}$. Definiamo

$$A_n = \left(r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right), \quad i \in \mathbb{N}$$

e

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

L'insieme A è aperto e contiene tutti i numeri razionali; quindi $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \subseteq \overline{A} \subseteq \mathbb{R}$ e cioè $\overline{A} = \mathbb{R}$. Inoltre

$$m(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{1-1/2}\right) = \varepsilon.$$

Si ha quindi che $\mathbb{R} \setminus A$ è chiuso e $m(\mathbb{R} \setminus A) = \infty$; $\mathbb{R} \setminus A$ è la frontiera di A perché

$$\partial A = \overline{A} \setminus A = \mathbb{R} \setminus A.$$

Esempio 2.7.2. (L'insieme di Cantor) Consideriamo l'intervallo chiuso $[0,1]$ e dividiamolo in 3 sottointervalli di uguale lunghezza; rimuoviamo l'intervallo centrale aperto e poniamo

$$A_1 = (1/3, 2/3), \quad C_1 = [0,1] \setminus A_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

Indichiamo, rispettivamente con Δ_0 e Δ_1, le componenti connesse di sinistra e di destra dell'insieme C_1. Suddividiamo poi in 3 parti uguali ognuno dei sottointervalli Δ_0 e Δ_1 e rimuoviamo di nuovo gli intervalli centrali aperti. L'insieme rimosso è

$$A_2 = (1/3^2, 2/3^2) \cup (7/3^2, 8/3^2),$$

mentre

$$C_2 = [0,1] \setminus (A_1 \cup A_2) = [0, 1/3^2] \cup [2/3^2, 3/3^2] \cup [6/3^2, 7/3^2] \cup [8/3^2, 1]$$

è quello che rimane.

Procedendo come prima, indichiamo rispettivamente con Δ_{00} e Δ_{01} le componenti connesse di sinistra e di destra di $\Delta_0 \cap C_2$ e con Δ_{10} e Δ_{11} le componenti connesse di sinistra e di destra di $\Delta_1 \cap C_2$.

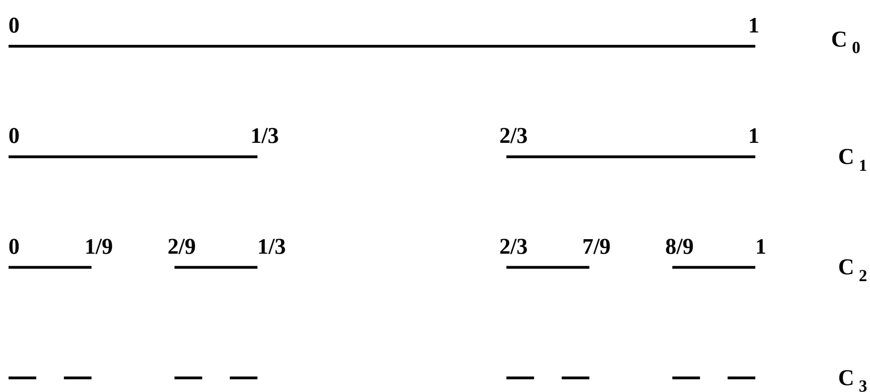

Figura 1. La costruzione dell'insieme di Cantor.

Procedendo in questo modo, definiamo una successione di insiemi aperti A_n, unione di 2^{n-1} intervalli aperti di lunghezza uguale a 3^{-n}. L'insieme C_n corrispondente è allora definito da

$$C_n = [0,1] \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{0,1\}} \Delta_{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}.$$

L'*insieme di Cantor* è ciò che resta dopo aver rimosso tutti gli A_n, cioè

$$K = [0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

L'insieme di Cantor K ha le molte proprietà interessanti che elenchiamo e dimostriamo qui di seguito.

(i) $m(K) = 0$. Infatti, osserviamo che $m(A_n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$ e quindi

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = 1,$$

per cui $m(K) = 1 - m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = 0$.

(ii) È evidente che K contiene tutti gli estremi degli intervalli in A_n.

(iii) K è compatto, perché chiuso e limitato.

(iv) K è *perfetto* (cioè è chiuso e ogni suo punto è di accumulazione di punti di K). Infatti, se $x \in K$ allora $x \in C_n$ per ogni n. C_n è formato da 2^n intervalli di lunghezza $1/3^n$. Sia x_n l'estremo sinistro dell'intervallo di C_n che contiene x o l'estremo destro se quello sinistro coincide con x. In questo modo,

$$0 < |x - x_n| < 1/3^n$$

e quindi $x_n \to x$ se $n \to \infty$.

(v) K non ha punti interni. Infatti, se K contenesse un intervallo aperto (a, b), questo avrebbe misura nulla e quindi non sarebbe un intervallo.

(vi) (Rappresentazione ternaria di un numero in K) Per ogni numero reale x, $0 \le x \le 1$, esiste una successione $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di interi con $i_n \in \{0, 1, 2\}$ tale che

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}.$$

Tale successione è unica, tranne quando x è della forma $\dfrac{q}{3^n}$ con $q \in \mathbb{N}$, nel qual caso di successioni ne esistono esattamente due. Viceversa, per ogni successione $\{i_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di interi con $i_n \in \{0, 1, 2\}$, la serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{i_n}{3^n}$ converge ad un numero reale x, $0 \le x \le 1$.

Come si costruisce la successione: si divide l'intervallo $[0, 1]$ in 3 intervalli:

$$B_0 = [0, 1/3], \quad B_1 = [1/3, 2/3], \quad B_2 = [2/3, 1],$$

cioè $B_i = [i/3, (i + 1)/3]$, $i = 0, 1, 2$, e si prende $i_1 = i$ se $x \in B_i$. Una volta scelto i_1 Si divide poi l'intervallo B_{i_1} che contiene x in 3 subintervalli, $B_{i_1 i} = [i_1/3+i/3^2, i_1/3+(i+1)/3^2]$, $i = 0, 1, 2$, e si prende $i_2 = i$ se $x \in B_{i_1 i}$. E così via.

Se però $x = q/3^n$ (per esempio $x = 8/9$) allora esiste un indice i_n tale che $x \in B_{i_1\cdots i_{n-1}(i_n-1)} \cap B_{i_1\cdots i_{n-1}i_n}$ (e.g. $8/9 \in B_{21} \cap B_{22}$), e quindi x apparterrà a tutti gli intervalli $B_{i_1\cdots(i_n-1)22\cdots}$ e $B_{i_1\cdots i_n 00\cdots}$ (e.g $8/9 \in B_{2122\cdots} \cap B_{2200\cdots}$).

Se K è l'insieme di Cantor, allora K = insieme dei punti di $[0,1]$ che hanno almeno una espansione ternaria che non contiene 1.

Infatti nella costruzione di K, ad ogni passo si divide per 3 l'intervallino precedente e si elimina il nuovo intervallino centrale che abbiamo deciso di associare alla cifra 1.

(vii) K non è numerabile. Infatti la (vi) ci dice che c'è una corrispondenza biunivoca di K con l'insieme delle successioni di 0 e di 2: e quindi con l'insieme delle successioni di 0 e di 1 cioè , in definitiva, con le rappresentazioni binarie dei numeri reali nell'intervallo $[0,1]$ che non è numerabile.

In altre parole, ad ogni $x \in K$ associamo la sua rappresentazione ternaria

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n} \quad \text{con} \quad i_n \in \{0,2\}$$

e quindi, ponendo $i_n = 2\,j_n$ con $j_n \in \{0,1\}$, associamo ad x la rappresentazione binaria

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_n}{2^n}$$

di un numero in $[0,1]$. Tale $f : K \to [0,1]$ è una corrispondenza biunivoca.

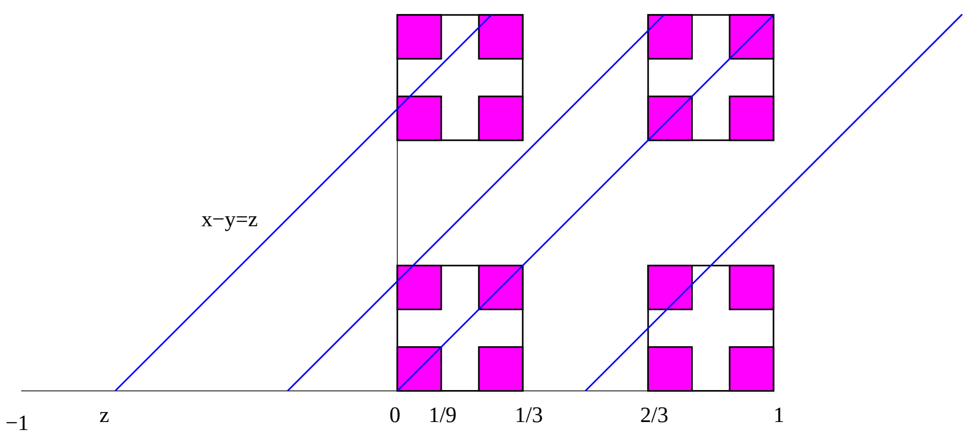

Figura 2. Ogni retta $x - y = z$, $-1 \leq z \leq 1$, interseca ogni $C_n \times C_n$ in almeno un punto.

(viii) L'insieme $K - K = \{x - y : x, y \in K\}$ contiene tutto l'intervallo $[-1,1]$, cioè per ogni $z \in [-1,1]$ esistono x, y in K tali che $x - y = z$. Infatti, sia π la proiezione da $[0,1] \times [0,1]$ su $[-1,1]$ così definita:

$$\pi(x,y) = x - y.$$

Osserviamo (vedi Fig. 2) che

$$\pi(C_1 \times C_1) \supset [-1,1], \quad \pi(C_2 \times C_2) \supset [-1,1], \quad \dots, \quad \pi(C_n \times C_n) \supset [-1,1], \dots$$

Se $z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi(C_n \times C_n)$, per ogni n esistono x_n e y_n tali che $z = x_n - y_n$. Quando $n \to \infty$ x_n e y_n convergono rispettivamente a due punti x ed y di K e quindi $z = x - y$. Dunque

$$\pi(K \times K) \supset \bigcap_{n=0}^{\infty} \pi(C_n \times C_n) \supset [-1, 1].$$

Esempio 2.7.3. (L'insieme di Vitali) Nell'insieme $\mathbb{R}$ introduciamo la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Osserviamo che per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in (0,1)$ tale che $y \sim x$. Infatti esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $0 < x - q < 1$ e quindi basta scegliere $y = x - q$.

Sia $V \subset (0,1)$ l'insieme formato scegliendo da ogni classe di equivalenza dell'insieme quoziente $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ *un solo elemento* appartenente a $(0,1)$; V si può costruire per l'assioma della scelta. L'insieme V ha le seguenti proprietà.

(i) Se $r, s \in \mathbb{Q}$ e $r \neq s$, allora $(r + V) \cap (s + V) = \varnothing$. Altrimenti esisterebbero $y, z \in V$ tali che $r+y = s+z$ e quindi $y-z = s-r \in \mathbb{Q}$, $s - r \neq 0$. Questo è assurdo poiché y e z appartengono a classi diverse.

(ii) Per ogni $x \in (0,1)$ esiste $r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}$ tale che $x \in r + V$. Infatti esiste $y \in V$ che rappresenta x; posto $r = x - y$, allora $r \in \mathbb{Q}$ e

$$-1 = 0 - 1 < r = x - y < 1 - 0 = 1.$$

Le proprietà (i) e (ii) ci fanno concludere che V non è misurabile. Infatti, se V lo fosse, posto

$$E = \bigcup_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} (r + V),$$

anche E sarebbe misurabile e si avrebbe $E \subseteq (-1, 2)$. Perciò sarebbe $m(E) \leq 3$. D'altra parte, per la proprietà (i) si ha che

$$3 \geq m(E) = \sum_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} m(r + V) = \sum_{r \in (-1,1) \cap \mathbb{Q}} m(V),$$

dato che $m(r + V) = m(V)$ per ogni r. Ciò implica che $m(V) = 0$, e quindi $m(E) = 0$.

Per la proprietà (ii) però , $E \supseteq (0,1)$ e quindi $m(E) \geq 1$ — assurdo.

Esercizi

1. Dimostrare che la misura di un plurintervallo P non dipende dalla particolare decomposizione di P in intervalli con interni a due a due disgiunti.

2. La misura di un compatto K si può anche definire, a partire dalla misura di un aperto, così :

$$m(K) = m(I) - m(\mathring{I} \setminus K),$$

dove I è un intervallo contenente K.

Dimostrare che questa definizione non dipende dal particolare intervallo scelto e che è equivalente alla definizione già data.

3. Se E e F sono misurabili, dimostrare che

$$m(E) + m(F) = m(E \cup F) + m(E \cap F).$$

4. Se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è misurabile, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$, allora anche l'insieme traslato $x_0 + E = \{x_0 + y : y \in E\}$ e l'insieme dilatato $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$ sono misurabili e risulta che

$$m(x_0 + E) = m(E) \quad \text{e} \quad m(\lambda E) = \lambda^N m(E).$$

5. Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ con frontiera di misura di Lebesgue nulla. Dimostrare che E è misurabile secondo Lebesgue e la sua misura eguaglia quelle del suo interno e della sua chiusura.

6. Dimostrare che ogni sottoinsieme misurabile dell'insieme di Vitali ha misura zero.

7. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ con $m(E) > 0$. Allora E contiene un sottoinsieme non misurabile.

8. In che relazione stanno

$$m(\liminf_{n\to\infty} E_n) \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} m(E_n),$$

e

$$m(\limsup_{n\to\infty} E_n) \quad \text{e} \quad \limsup_{n\to\infty} m(E_n)?$$

Costruire degli esempi in cui i numeri di ciascuna coppia sono tra loro diversi.

9. Si dice che un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ genera una tassellatura se

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}^N} (E + n) = \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad (E + n) \cap (E + m) = \varnothing \quad \text{per} \quad n \neq m.$$

Dimostrare che se E genera una tassellatura, allora $m(E) = 1$.

10. Siano $E_n \subset (0, 1)$, $n = 1, \ldots, k$ insiemi misurabili e sia $\sum\limits_{n=1}^{k} m(E_n) > k-1$.

Allora l'insieme $\bigcap\limits_{n=1}^{k} E_n$ ha misura positiva.

11. Sia $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi misurabili dell'intervallo $(0,1)$ e supponiamo che
$$\limsup_{n\to\infty} m(E_n) = 1.$$
Dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{E_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che l'insieme $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_{n_k}$ ha misura positiva.
12. Dimostrare che l'insieme di Cantor è misurabile secondo Peano-Jordan.
13. Costruire un insieme perfetto, privo di punti interni e con misura positiva.
14. Trovare un sottoinsieme del quadrato di lato 1 che abbia misura zero e tale che dati comunque due numeri a e b tra 0 e 1, l'insieme contiene la frontiera di un rettangolo con lati che misurano a e b.

Capitolo 3

Spazi e funzioni misurabili

3.1. Spazi misurabili

Sia X un insieme qualsiasi. Una collezione $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di X è una σ-algebra se:

(i) $X \in \mathcal{M}$,

(ii) $E \in \mathcal{M}$ implica che $E^c = X \setminus E \in \mathcal{M}$,

(iii) $E_n \in \mathcal{M}$ per $n \in \mathbb{N}$ implica che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{M}$.

Esempio 3.1.1. Sono σ-algebre:

(a) l'insieme delle parti di un qualsiasi insieme X;

(b) la famiglia formata dal solo X e dall'insieme vuoto $\varnothing$ in un insieme qualsiasi X;

(c) i sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di $X = \mathbb{R}^N$;

(d) i sottoinsiemi misurabili secondo Lebesgue di un qualunque insieme misurabile secondo Lebesgue $X = E$.

Osservazione 3.1.2. È chiaro che ogni σ-algebra contiene l'insieme vuoto. Inoltre, ponendo nella (iii) $E_n = \varnothing$ per $n = m+1, m+2, \dots,$ anche le unioni finite di insiemi di una σ-algebra $\mathcal{M}$ stanno ancora in $\mathcal{M}$. Infine, le intersezioni numerabili di insiemi di $\mathcal{M}$ sono contenute ancora in $\mathcal{M}$, perché

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^c\Big)^c.$$

Proposizione 3.1.3. *Sia $\mathcal{F}$ una qualsiasi collezione di sottoinsiemi di un insieme X. Allora esiste una σ-algebra $\mathcal{M}^*$ in X che è la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{F}$; $\mathcal{M}^*$ si dice la σ- algebra generata da $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Sia Ω la famiglia di σ-algebre in X contenenti $\mathcal{F}$; Ω non è vuota perché contiene almeno l'insieme delle parti di X.

Sia allora

$$\mathcal{M}^* = \bigcap_{\mathcal{M}\in\Omega} \mathcal{M}.$$

È facile verificare che $\mathcal{M}^*$ è ancora una σ-algebra e contiene $\mathcal{F}$. $\square$

Sia (X, τ) uno spazio topologico. La σ-algebra generata da τ e cioè la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli aperti di X si indica con $\mathcal{B}$ e i suoi elementi sono detti *insiemi boreliani.*

Osservazione 3.1.4. (i) Sono insiemi boreliani le unioni numerabili di chiusi e le intersezioni numerabili di aperti.

(ii) Tutti i boreliani di $\mathbb{R}^N$ sono insiemi misurabili secondo Lebesgue, perché fra questi ci sono anche gli aperti.

Se $\mathcal{M}$ è una σ-algebra in X, $(X, \mathcal{M})$ si dice uno *spazio misurabile* e gli elementi di $\mathcal{M}$ si dicono *insiemi misurabili.*

3.2. Funzioni misurabili

Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile e sia Y uno spazio topologico; una funzione $f : X \to Y$ si dice *misurabile* se, per ogni aperto A in Y è misurabile la retroimmagine $f^{-1}(A)$ di A secondo f.

Si noti il parallelismo tra le definizioni di spazio e funzione misurabile e quelle di spazio topologico e funzione continua. In particolare, sappiamo che la composizione di funzioni continue è continua; la seguente proposizione tratta il caso analogo per le funzioni misurabili.

Proposizione 3.2.1. *Siano $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile ed Y, Z spazi topologici. Sia $f : X \to Y$ misurabile e sia $g : Y \to Z$ continua.*

Allora $g \circ f : X \to Z$ è misurabile.

Dimostrazione. Sia A un aperto di Z; dato che $g^{-1}(A)$ è aperto in Y, allora l'insieme

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

è misurabile. $\square$

Studieremo con attenzione particolare le funzioni a valori nella *retta reale estesa* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; gli aperti di $\overline{\mathbb{R}}$ sono unioni di tre tipi di intervalli: $(a,b), [-\infty,b)$ e $(a,+\infty]$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Le operazioni di somma e moltiplicazione in $\overline{\mathbb{R}}$ obbediscono alle seguenti convenzioni:

$$(+\infty)+(+\infty)=+\infty,$$
$$+\infty+x=x+(+\infty)=+\infty \quad \text{per ogni} \quad x\in\mathbb{R},$$
$$(+\infty)\cdot x=x\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty \text{ se } x>0,\\ -\infty \text{ se } x<0,\end{cases}$$

per ogni $x \neq 0$.

Il seguente risultato rende più agevole determinare la misurabilità di una funzione a valori nella retta estesa.

Teorema 3.2.2. *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se per ogni $t \in \mathbb{R}$ è misurabile uno degli insiemi di livello*

$$\begin{aligned}
L_+(f,t) &= f^{-1}((t,+\infty]) = \{x\in X : f(x)>t\},\\
L_+^*(f,t) &= f^{-1}([t,+\infty]) = \{x\in X : f(x)\geq t\},\\
L_-(f,t) &= f^{-1}([-\infty,t)) = \{x\in X : f(x)<t\},\\
L_-^*(f,t) &= f^{-1}([-\infty,t]) = \{x\in X : f(x)\leq t\}.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Se f è misurabile, allora ogni insieme di livello è misurabile, essendo la retroimmagine di un aperto o del complementare di un aperto.

Viceversa, dimostriamo preliminarmente che la misurabilità di ciascun insieme di livello è equivalente a quella di ogni altro nella lista. Infatti, dato che

$$\begin{aligned}
L_+^*(f,t) = f^{-1}([t,+\infty]) &= f^{-1}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(t-1/n,+\infty]\Big) = \\
&= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_+(f,t-1/n),
\end{aligned}$$

$L_+^*(f,t)$ è misurabile se ogni $L_+(f,t)$ lo è; dato che $L_-(f,t) = X \setminus L_+^*(f,t)$, $L_-(f,t)$ è misurabile se $L_+^*(f,t)$ è misurabile, perché è il complementare di un insieme misurabile; analogamente, il fatto che

$$L_-^*(f,t) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} L_-(f,t+1/n)$$

implica che $L_-^*(f,t)$ è misurabile se ogni $L_-(f,t)$ lo è, mentre $L_+(f,t) = X \setminus L_-^*(f,t)$. implica che $L_+(f,t)$ è misurabile se $L_-^*(f,t)$ lo è.

Infine, per il Teorema 1.3.1, ogni aperto A di $\overline{\mathbb{R}}$ è l'unione numerabile di intervalli I_n dei tre tipi: $(a,b), [-\infty,b), (a,+\infty]$. Perciò per quanto appena dimostrato $f^{-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(I_n)$ è misurabile se uno degli insiemi della lista lo è per ogni $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Esempio 3.2.3. (i) Sia $E \subseteq X$. La funzione caratteristica $\mathcal{X}_E$ è misurabile se e solo se E è misurabile.

Infatti

$$L_+(\mathcal{X}_E, t) = \begin{cases} \varnothing, & \text{se } t \geq 1, \\ E, & \text{se } 0 \leq t < 1, \\ X, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

(ii) Ogni funzione continua su uno spazio topologico X è chiaramente misurabile se la σ-algebra definita su X contiene gli aperti di X.

Esempio 3.2.4. Un esempio importante di funzioni misurabili sono le funzioni semicontinue.

Sia X uno spazio topologico; si dice che $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è *semicontinua inferiormente* se $L_+(f,t)$ è aperto per ogni $t \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, se in ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Si dice che f è *semicontinua superiormente* se $L_-(f,t)$ è aperto per ogni $t \in \mathbb{R}$ o se in ogni $x_0 \in X$ si ha:

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0).$$

Per esempio, la funzione caratteristica di un aperto è inferiormente semicontinua in $\mathbb{R}^N$; la funzione caratteristica di un chiuso è superiormente semicontinua in $\mathbb{R}^N$.

Siano X e Y spazi topologici. Si dice che $f : X \to Y$ è *boreliana* (o misurabile secondo Borel) se

$$f^{-1}(V) \in \mathcal{B}_X, \quad \text{per ogni aperto} \quad V \subset Y.$$

È chiaro che gni $f : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ boreliana è misurabile secondo Lebesgue.

Proposizione 3.2.5. *Siano X ed Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione boreliana. Allora risulta che $f^{-1}(B)$ è un boreliano di X per ogni boreliano B di Y.*

Dimostrazione. La famiglia $\Omega = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{B}_X\}$ è una σ-algebra in Y che Ω contiene tutti gli aperti di Y, dato che f è boreliana. Perciò $\mathcal{B}_Y \subseteq \Omega$ e quindi $f^{-1}(B)$ è un boreliano di X se B è un boreliano di X. $\square$

Teorema 3.2.6. *Sia $(X, \mathcal{M})$ uno spazio misurabile.*

(i) Siano $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili e sia $c \in \mathbb{R}$. Allora sono misurabili le funzioni $f + g$ cf ed fg.

(ii) Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, misurabili. Sono allora misurabili anche le funzioni:

$$S(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x), \qquad s(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x),$$

$$l'(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \qquad l''(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x).$$

Dimostrazione. (i) Si ha che

$$L_+(f+g,t) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} L_+(f,q) \cap L_+(g,t-q)$$

e l'unione è numerabile. È facile inoltre dimostrare che $c\,f$ è misurabile per ogni $c \in \mathbb{R}$ se f è misurabile.

Dato che $f\,g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$, per quanto appena dimostrato, basterà dimostrare il caso particolare in cui $f = g = h$ e cioè $f\,g = h^2$. Risulta

$$L_+(h^2,t) = \begin{cases} X \text{ se } t < 0, \\ L_-(h,-\sqrt{t}) \cup L_+(h,\sqrt{t}) \text{ se } t \geq 0, \end{cases}$$

e quindi h^2 è misurabile se h lo è.

(ii) Si ha che

$$L_+(S,t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} L_+(f_n,t) \text{ e } L_-(s,t) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\infty} L_-(f_n,t).$$

La misurabilità di l' ed l'' si ottiene iterando le operazioni di inf e sup . □

Corollario 3.2.7. *Se $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili, sono misurabili anche le funzioni*

$$\max(f,g), \ \min(f,g),$$
$$f^+ = \max(f,0), \ f^- = \max(0,-f), \ |f| = f^+ - f^-$$

e l'insieme $\{x \in X \ f(x) > g(x)\}$.

Osservazione 3.2.8. Sia $E \in \mathcal{M}$. Dato che E è anch'esso uno spazio misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{M}_E = \{E \cap F : F \in \mathcal{M}\}$, possiamo estendere i risultati fin qui dimostrati per funzioni misurabili su X alle funzioni misurabili su un ogni insieme misurabile E.

3.3. Approssimazione mediante funzioni semplici

Una funzione $s : X \to \mathbb{R}$ si dice *semplice* se è misurabile ed assume un numero finito di valori. Se $c_1, \dots, c_n$ sono i valori *distinti* di una funzione semplice s, allora, posto $E_k = \{x \in X : s(x) = c_k\}$, $k = 1, \dots, n$, gli E_k sono tutti misurabili, a due a due disgiunti e la loro unione è tutto X; quindi si può scrivere

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{X}_{E_k}(x),\ x \in X.$$

Teorema 3.3.1. (Approssimazione mediante funzioni semplici) *Sia data una funzione $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile. Allora esiste una successione crescente di funzioni semplici s_n che converge ad f puntualmente.*

Se in più f è limitata, allora le funzioni s_n convergono ad f uniformemente.

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{N}$ e poniamo:

$$E_n = f^{-1}([n, +\infty]) \ \text{ e } \ E_{n,k} = f^{-1}([(k-1)/2^n, k/2^n)),\ k = 1, \dots, n2^n.$$

La funzione

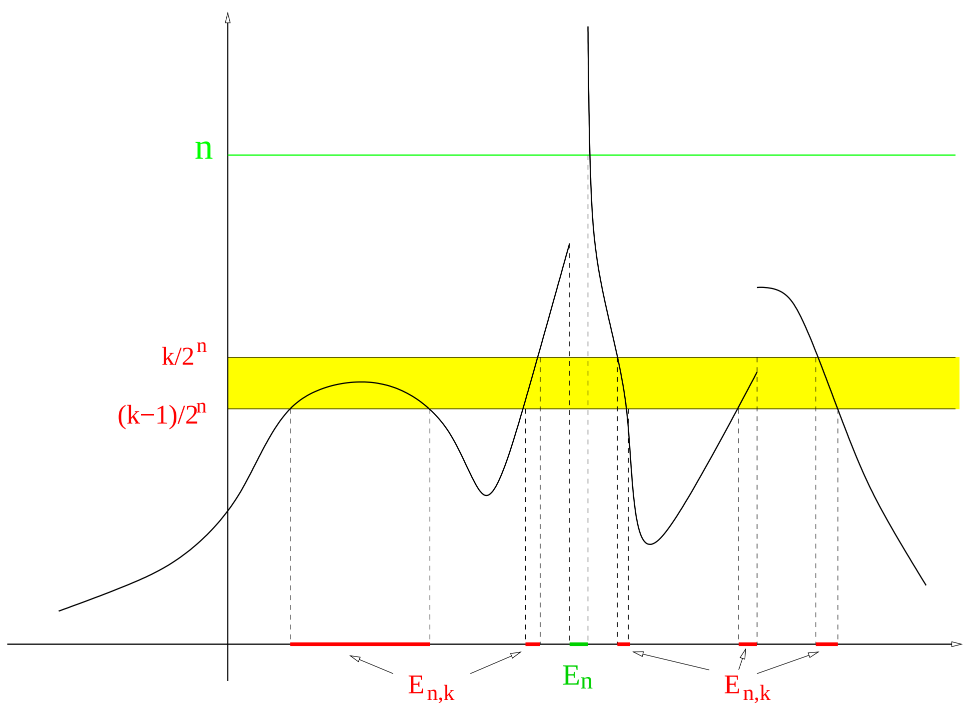

Figura 1. Approssimazione con funzioni semplici

$$s_n(x) = n\mathcal{X}_{E_n}(x) + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\mathcal{X}_{E_{n,k}}(x)$$

è semplice perché E_n ed $E_{n,k}$ sono misurabili. Inoltre $s_n \leq f$ per costruzione.

Si noti che

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k-1} \cup E_{n+1,2k}$$

e quindi se $x \in E_{n,k}$ risulta

$$s_n(x) = \frac{k-1}{2^n} \leq \min[(2k-1)/2^{n+1}, 2k/2^{n+1}] \leq s_{n+1}(x).$$

Analogamente

$$E_n = E_{n+1} \cup \bigcup_{k=n2^{n+1}+1}^{(n+1)2^{n+1}} E_{n+1,k}$$

e quindi se $x \in E_n$ risulta ancora

$$s_n(x) = n < n+1 = s_{n+1}(x) \quad \text{se} \quad x \in E_{n+1}$$

e, se $k = n2^{n+1}+1, \dots, (n+1)2^{n+1}$,

$$s_n(x) = n \leq \frac{k-1}{2^{n+1}} = s_{n+1}(x) \quad \text{se} \quad x \in E_{n+1,k}\ .$$

Perciò $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

Se ora $f(x) = +\infty$, allora $s_n(x) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $s_n(x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$. Se $f(x) < \infty$, esiste $n_0 \in N$ tale che $f(x) < n_0$. Se $n > n_0$ si ha allora

$$0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$$

e quindi $s_n(x) \to f(x)$.

Se infine f è limitata, preso $n > \sup\limits_X f$, si avrà $0 \leq f(x) - s_n(x) < \frac{1}{2^n}$ per ogni $x \in X$ e cioè $\sup\limits_X |f - s_n| \leq \frac{1}{2^n} \to 0$ se $n \to \infty$. □

Osservazione 3.3.2. Sia ora $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Tutte le proprietà fin qui dimostrate per le funzioni misurabili si possono estendere al caso di funzioni non ovunque definite, purché *quasi ovunque definite*, cioè definite ovunque tranne che in un insieme di misura nulla. Questo è dovuto al fatto che, se E è misurabile ed E_0 ha misura nulla, anche $E \cup E_0$ e $E \setminus E_0$ sono misurabili e $\mu(E) = \mu(E \cup E_0) = \mu(E \setminus E_0)$.

Per esempio, se $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è definita q.o. e misurabile, allora se $E_n = \{x \in X : f_n(x) \text{ non è definito }\}$ si ha $\mu(E_n) = 0$. Posto $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si ha $\mu(E) = 0$ ed ogni f_n è definita nell'insieme $X \setminus E$. La funzione $S(x) =$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, per esempio, sarà misurabile in $X \setminus E$, per la proposizione già dimostrata, e quindi anche in X perché $\mu(E) = 0$.

3.4. I tre principi di Littlewood

Si consideri $\mathbb{R}^N$ con la σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Le seguenti affermazioni passano sotto il nome di *principi di Littlewood.*

(i) Ogni insieme misurabile (di misura finita) è quasi un chiuso.

(ii) Ogni successione di funzioni misurabili che converge quasi ovunque è quasi uniformemente convergente.

(iii) Ogni funzione misurabile è quasi continua.

L'affermazione (i) è il contenuto del Teorema 2.4.4 che abbiamo già dimostrato nel caso di insiemi misurabili limitati e che si può estendere facilmente al caso di insiemi di misura finita.

Il significato del secondo principio di Littlewood è reso evidente dal seguente risultato.

Teorema 3.4.1. (Egoroff-Severini) *Sia E un insieme misurabile e limitato e siano f ed f_n, $n \in \mathbb{N}$, funzioni misurabili in E e quasi ovunque finite.*

Allora

$$f_n \to f \quad q.o.\ in \quad E$$

se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset E$ tale che

$$m(E \setminus K) < \varepsilon \quad e \quad f_n \to f \quad \text{uniformemente su} \quad K. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Se $f_n \to f$ q.o. in E, il sottoinsieme dei punti di E tali che $f_n(x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ ha la stessa misura di E; possiamo quindi supporre senza perdere di generalità che $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in E$. Osserviamo allora che possiamo scrivere che

$$E = \Big\{ x \in E : \limsup_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \Big\}.$$

Dati n ed $m \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$E_{n,m} = \Big\{ x \in E : \sup_{k\geq n} |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \Big\}.$$

Si osserva che, per ogni $m \in \mathbb{N}$, $E_{n,m} \subseteq E_{n+1,m}$ ed inoltre

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,m} \quad \text{per ogni} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Per il Teorema 4.1.2, fissati $\varepsilon > 0$ ed $m \in \mathbb{N}$ esiste un indice $\nu = \nu(\varepsilon, m)$ tale che

$$m(E \setminus E_{\nu,m}) < \varepsilon/2^{m+1}.$$

Sia $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{\nu(\varepsilon,m),m}$; allora $E \setminus F = \bigcup_{m=1}^{\infty} (E \setminus E_{\nu(\varepsilon,m),m})$ e quindi

$$m(E \setminus F) \leq \sum_{m=1}^{\infty} m(E \setminus E_{\nu(\varepsilon,m),m}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esiste inoltre un compatto $K \subset F$ tale che $m(F \setminus K) < \varepsilon/2$ e quindi

$$m(E \setminus K) = m(E \setminus F) + m(F \setminus K) < \varepsilon.$$

Siccome $K \subset F = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_{\nu(\varepsilon,m),m}$, per ogni m esiste un indice $\nu(\varepsilon, m)$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{m} \quad \text{per ogni} \quad n \geq \nu(\varepsilon, m) \quad \text{ed ogni} \quad x \in K,$$

cioè f_n converge uniformemente ad f in K.

Viceversa, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un compatto $K \subset E$ che soddisfa (3.1), per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste un compatto $K_m \subset E$ tale che $f_n \to f$ uniformemente su K_m e $m(E \setminus K_m) < 1/m$. Allora $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$ e

$$m(E \setminus F) = m\Big(\bigcap_{m \in \mathbb{N}} (E \setminus K_m) \Big) = \lim_{m \to \infty} m(E \setminus K_m) = 0.$$

□

Una funzione f definita su un insieme misurabile E si dice *quasi continua* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $K \subset E$ tale che $m(E \setminus K) < \varepsilon$ ed f ristretta a K è continua.

Lemma 3.4.2. *Le funzioni semplici definite in insiemi di misura finita sono quasi continue.*

Dimostrazione. Sia $f = \sum_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{E_j}$ dove $c_1, \ldots, c_n$ sono distinti e $E_j = \{x \in E \,:\, f(x) = c_j\}$. Gli insiemi E_j sono misurabili, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso $K_j \subset E_j$ tale che $m(E_j \setminus K_j) < \varepsilon/n$. L'insieme $K = \bigcup_{j=1}^{n} K_j$ è un chiuso e $m(E \setminus K) < \varepsilon$. I chiusi K_j sono disgiunti ed f è costante su ogni K_j, quindi f è continua su K. □

Il terzo principio di Littlewood è riassunto nel seguente teorema.

Teorema 3.4.3. *(*Lusin*) Sia E un insieme misurabile di misura finita e sia f quasi ovunque finita in E. Allora, f è misurabile in E se e solo se f è quasi continua in E.*

Dimostrazione. ($\Rightarrow$) Supponiamo che f sia misurabile e $f \geq 0$. Esiste una successione s_n di funzioni semplici che converge quasi ovunque a f.

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. Per ogni n esiste un chiuso $K_n \subset E$ tale che $m(E \setminus K_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ e s_n è continua su K_n. Per il teorema di Egoroff-Severini esiste inoltre un chiuso $K_0 \subset E$ tale che $m(E \setminus K_0) < \varepsilon/2$ e s_n converge uniformemente ad f in K_0. In $K = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} K_n$ la successione s_n converge uniformemente ad f e, siccome le s_n sono continue in K, allora anche f è continua in K. Rimane da osservare che

$$m(E \setminus K) \leq \sum_{n=0}^{\infty} m(E \setminus K_n) < \varepsilon.$$

Se f cambia segno, basta scrivere $f = f^+ - f^-$ con f^+ e f^- funzioni misurabili non negative.

($\Leftarrow$) Supponiamo che f sia quasi continua e sia $t \in \mathbb{R}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso K con $m(E \setminus K) < \varepsilon$ ed f è continua in K. Quindi

$$\{x \in E \ : \ f(x) \geq t\} = \{x \in K \ : \ f(x) \geq t\} \cup \{x \in E \setminus K \ : \ f(x) \geq t\},$$

dove il primo insieme a secondo membro è chiuso, perché f è continua in K mentre il secondo è contenuto in $E \setminus K$ ed ha quindi misura esterna minore di ε. Per il primo principio di Littlewood, l'insieme di livello a primo membro è misurabile. $\square$

Osservazione 3.4.4. Si dice che una funzione è continua quasi ovunque in E se

$$m\left(\{x \in E \ : \ f \text{ è discontinua in } x\}\right) = 0.$$

I concetti di funzione continua quasi ovunque e di funzione quasi continua non coincidono. Per esempio: $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ è misurabile, quindi è quasi continua, ma è discontinua in ogni punto di $[0,1]$.

3.5. Esempi notevoli

Esempio 3.5.1. (La scala di Cantor) Usando l'insieme di Cantor si può costruire una funzione s continua e non decrescente in $[0,1]$ con $s'(x) = 0$ q.o. in $[0,1]$ e s non costante. Useremo alcune notazioni usate nell'Esempio 2.7.2.

La funzione è così definita:

$$s(0) = 0, \quad s(1) = 1, \quad s = 1/2 \ \text{ in } \ \overline{A}_1 = [1/3, 2/3].$$

Cioè s nella chiusura di A_1 è uguale alla media dei valori in 0 e 1. Si divide poi $[0,1/3]$ in 3 intervalli e si pone $s = 1/4$ in quello centrale chiuso, cioè nell'intervallo centrale si assegna ad s il valore della media negli estremi.

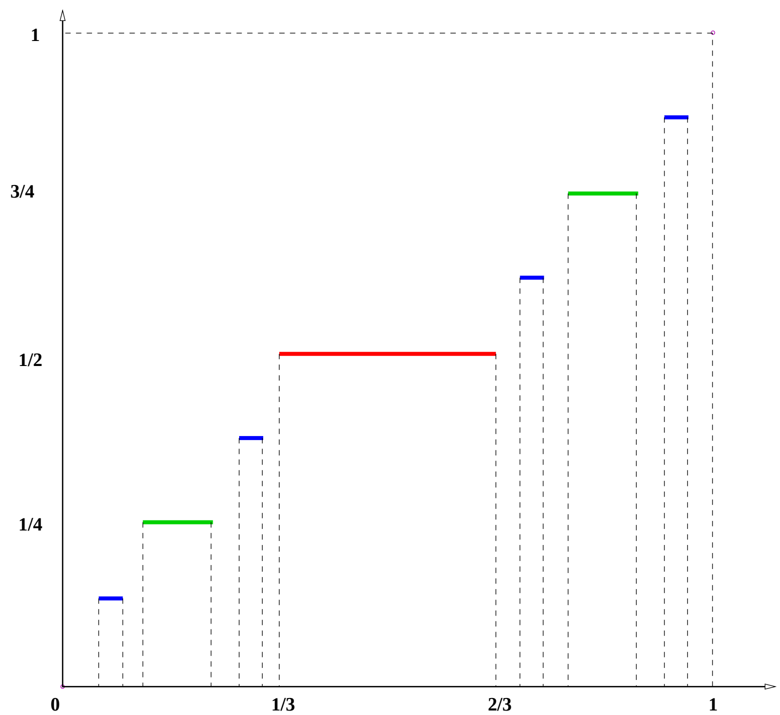

Figura 2. La scala di Cantor.

Analogamente si divide $[2/3, 1]$ in 3 parti e si pone $s = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}$ in $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$ e così via.

In questo modo s risulta definita in $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$ cioè quasi ovunque in $[0, 1]$; s può essere prolungata con continuità a tutto $[0, 1]$ osservando che la successione di funzioni continue i cui grafici sono disegnati in Figura 3 converge uniformemente ad una funzione continua che coincide con s negli insiemi $\overline{A}_n$.

Osserviamo che s è costante su ciascuno degli intervalli componenti A_n e quindi $s' = 0$ quasi ovunque in $[0, 1]$, dato che la misura totale di tutti quegli intervalli è ugale ad 1.

Una descrizione alternativa della scala di Cantor si ottiene nel modo seguente. Sia x un numero reale in $(0, 1)$ con espansione ternaria $\{a_n\}$. Sia

$$N = \begin{cases} \infty, & \text{se } \ a_n \neq 1 \ \text{ per ogni } \ n \in \mathbb{N}, \\ \min\{n : a_n = 1\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

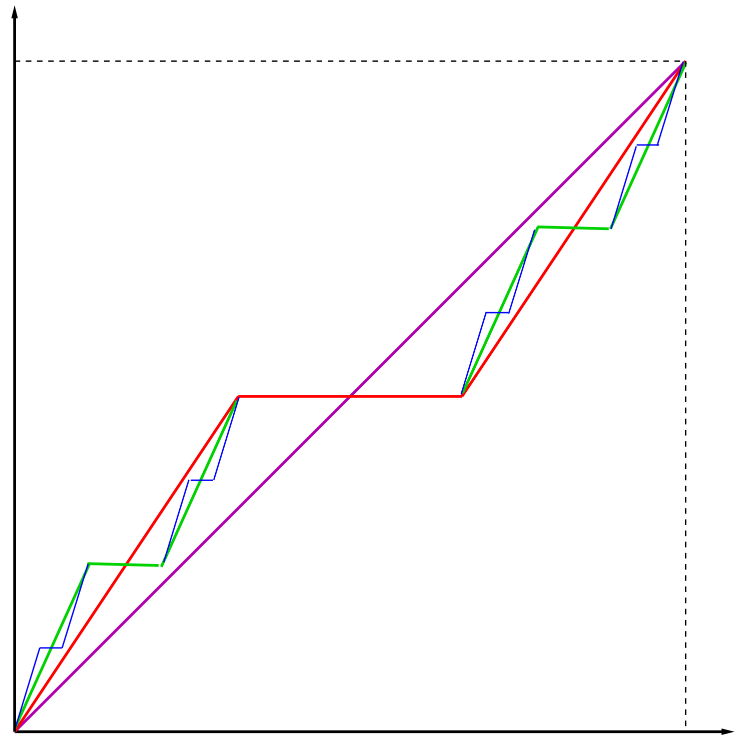

Figura 3. Approssimazione della scala di Cantor.

Si pone allora

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n, & \text{se } n < N, \\ 1, & \text{se } n = N, \\ 0, & \text{se } n > N, \end{cases}$$

e

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}.$$

Si noti bene che:

(i) la definizione è ben posta anche se x ammette due espansioni ternarie; per esempio, a $\frac{1}{3}$ si possono associare le successioni $(1, 0, 0, \cdots)$ e $(0, 2, 2, \cdots)$; nel primo caso si ha $N = 1$ e quindi $b = (1, 0, 0, \cdots)$, da cui segue $s(1/3) = 1/2$; nel secondo caso, $N = \infty$ e quindi $b = (0, 1, 1, \cdots)$, da cui segue che $s(1/3) = \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} = 1/2$;

(ii) la definizione è coerente con la precedente, cioè s ha lo stesso valore su $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$; per esempio, se $x \in (1/3, 2/3)$, allora $a = (1, a_2, a_3, \cdots)$, $N = 1$ e $b = (1, 0, 0, \cdots)$, cioè $s(x) = 1/2$.

Con questa rappresentazione si può dimostrare che

$$|x-y| \le \frac{1}{3^k} \quad \text{implica che} \quad |s(x)-s(y)| \le \frac{1}{2^k}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$ (si veda [**Fa**]).

Da questa proprietà segue che

$$|s(x)-s(y)| \le C|x-y|^{\frac{\ln 2}{\ln 3}},$$

cioè s è hölderiana con costante $\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Infatti, se k è il più grande intero tale che $|x-y| \le \frac{1}{3^k}$, allora $\frac{1}{3^{k+1}} < |x-y|$ e quindi

$$|s(x)-s(y)| \le \frac{1}{2^k} = e^{-k\ln 2} < e^{\ln 2 + \frac{\ln 2}{\ln 3}\ \ln|x-y|} = 2\ |x-y|^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Esempio 3.5.2. Consideriamo ora la funzione

$$l(x) = s(x) + x;$$

l è strettamente crescente e continua, quindi è un omeomorfismo tra $[0,1]$ e $[0,2]$.

Inoltre

$$m\left(l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right)\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n\right),$$

perché l'immagine di ogni intervallo componente l'unione ha la stessa misura del intervallo stesso. Quindi, se K è l'insieme di Cantor,

$$m\left(l(K)\right) = 1,$$

perché $m\left(l\left([0,1] \setminus K\right)\right) = 1$.

Dal momento che $l(K)$ ha misura positiva, per l'esercizio 7 del Capitolo 2, esiste un sottoinsieme $E \subset l(K)$ non misurabile. Osserviamo che $l^{-1}(E) \subset K$ quindi è misurabile ed ha misura 0.

Si può allora scrivere

$$\mathcal{X}_E(x) = \mathcal{X}_{l^{-1}(E)} \circ l^{-1}(x).$$

l^{-1} è una funzione continua, $\mathcal{X}_{l^{-1}(E)}$ è una funzione misurabile, ma $\mathcal{X}_E$ non è misurabile.

Esempio 3.5.3. (In $\mathbb{R}$ esistono insiemi misurabili che non sono boreliani) Abbiamo visto nell'esempio precedente che, usando la scala di Cantor in modo opportuno è possibile scrivere

$$\mathcal{X}_E = f \circ g,$$

dove $\mathcal{X}_E$ non è misurabile, f è misurabile e g è continua.

Osserviamo che f non può essere una funzione boreliana, altrimenti $f \circ g$ sarebbe ancora una funzione boreliana e quindi sarebbe misurabile.

Esiste quindi una funzione f che è misurabile ma non è boreliana. Questo significa che le retroimmagini di aperti sono tutte misurabili, ma non sono tutte boreliani.

Esercizi

1. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili su $\mathbb{R}^N$ definite quasi ovunque e che convergono quasi ovunque ad una funzione f. Dimostrare che f è definita quasi ovunque ed è misurabile se estesa uguale a zero dove non è definita.
2. Se $\{x \in E : f(x) \geq q\}$ è misurabile per ogni $q \in \mathbb{Q}$, allora f è misurabile.
3. Sia $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una qualunque funzione. Allora la funzione $f(x) = \liminf_{y \to x} g(y)$ è semicontinua inferiormente e quindi misurabile.

   La tesi è sempre vera se sostituiamo $\mathbb{R}$ con uno spazio topologico qualsiasi?
4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi e siano
$$\begin{aligned} \phi_\delta(x) &= \sup\{|f(s) - f(t)| : s, t \in (x - \delta, x + \delta)\}, \\ \phi(x) &= \inf\{\phi_\delta(x) : \delta > 0\}. \end{aligned}$$
   Dimostrare che ϕ è superiormente semicontinua e che $\phi(x) = 0$ se e solo se f è continua in x.
5. Dimostrare l'equivalenza delle definizioni di funzione semicontinua inferiormente o superiormente date nell'Esempio 3.2.4.
6. La funzione caratteristica di un insieme E è semicontinua inferiormente se e solo se E è aperto.
7. Sia K compatto di $\mathbb{R}^N$ e sia f semicontinua inferiormente. Allora f ammette minimo in K. Che cosa succede se K è un qualsiasi spazio topologico compatto?
8. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni reali non negative su $\mathbb{R}$. Si considerino i seguenti quattro enunciati:
   a) Se f_1 e f_2 sono semicontinue superiormente, $f_1 + f_2$ è semicontinua superiormente.
   b) Se f_1 e f_2 sono semicontinue inferiormente, $f_1 + f_2$ è semicontinua inferiormentei.
   c) Se ogni f_n è semicontinua superiormente, $\sum_1^\infty f_n$ è semicontinua superiormente.
   d) Se ogni f_n è semicontinua inferiormente, $\sum_1^\infty f_n$ è semicontinua inferiormente.

Si provi che tre di questi enunciati sono veri e uno è falso. Cosa succede se si omette la condizione di non negatività?

9. La funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{se } x = p/q \text{ con } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \text{ primi tra loro,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$
è semicontinua superiormente.

10. Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è semicontinua inferiormente se e solo se
$$f(x) = \sup\{g(x) \,:\, g \in C[a, b],\, g \le f \ \text{ su } \ [a, b]\}.$$
per ogni $x \in [a, b]$.

11. Sia f una funzione continua di una variabile reale e sia E un insieme di numeri reali di misura di Lebesgue nulla. È sempre vero che $m(f(E)) = 0$?

12. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un sottoinsieme misurabile di misura finita e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile.

    Dimostrare che f è quasi ovunque finita in E se e solo se f è *quasi limitata in* E, nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso $K \subseteq E$ ed una costante $c > 0$ tali che
$$|f| \le c \ \text{ in } \ K \ \text{ e } \ m(E \setminus K) < \varepsilon.$$

Capitolo 4

L'integrale di Lebesgue

4.1. Misure positive

Una *misura positiva* è una funzione definita su una σ-algebra $\mathcal{M}$ a valori in $[0,\infty]$ e *numerabilmente additiva,* cioè tale che, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi a due a due disgiunti di $\mathcal{M}$, risulta:

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n). \tag{4.1}$$

Per evitare banalità supporremo sempre che μ sia *finita,* cioè che esista almeno un $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < \infty$. La terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$ si dice uno *spazio di misura.*

Esempio 4.1.1. Ecco alcuni esempi di spazi di misura.

(a) $X = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M}$ = σ-algebra degli insiemi misurabili secondo Lebesgue, $\mu = m =$ misura di Lebesgue.

(b) Sia X un insieme qualunque, $\mathcal{M}$ l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ di X e si definisca

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad E \text{ è infinito,} \\ \text{cardinalità di } E & \text{se} \quad E \text{ è finito;} \end{cases}$$

questa formula definisce una misura che si dice la *misura che conta* (e.g. $X = \mathbb{N}$).

(c) Sia X un insieme qualsiasi, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $x_0 \in X$ e

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x_0 \in E, \\ 0 & \text{se} \quad x_0 \notin E; \end{cases}$$

la misura definita in questo modo si dice la *delta di Dirac.*

Teorema 4.1.2. *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Allora:*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = \mu(E_1) + \cdots + \mu(E_n)$ *se* $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$ *sono a due a due disgiunti;*

(iii) $E \subset F$ *implica* $\mu(E) \leq \mu(F)$ *per* $E, F \in \mathcal{M}$;

(iv) se $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *è una successione crescente (i.e* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *per* $n \in \mathbb{N}$*) di insiemi misurabili, risulta che*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big);$$

(v) se $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *è una successione decrescente (i.e* $E_n \supseteq E_{n+1}$ *per* $n \in \mathbb{N}$*) di insiemi misurabili, risulta che*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \quad \textit{se} \quad \mu(E_1) < \infty.$$

Dimostrazione. (i) Sia $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E) < \infty$ e si ponga $E_1 = E$ e $E_k = \varnothing$ per $k = 2, 3, \ldots$ in (4.1).

(ii) Si ponga $E_k = \varnothing$ per $k = n+1, n+2, \ldots$ in (4.1).

(iii) Poiché $F = E \cup (F \setminus E)$ e $E \cap (F \setminus E) = \varnothing$, (ii) implica che $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) \geq \mu(E)$.

(iv) Sia $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, allora $E_n \subseteq E$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $\mu(E_n) \leq \mu(E)$. Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_n) = \infty$ si ha anche $\mu(E) = \infty$ e quindi la tesi. Altrimenti si pone $F_1 = E_1$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$ e si ha

$$\begin{aligned} \mu(E) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(F_k) = \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\Big) = \\ &\quad \lim_{n\to\infty} \mu(E_n). \end{aligned}$$

(v) Per la (iv)

$$\lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (E_1 \setminus E_n)\Big) = \mu\Big(E_1 \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big)$$

e quindi

$$\mu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_1 \setminus E_n) = \mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big),$$

da cui si conclude poiché $\mu(E_1) < \infty$. □

Esempio 4.1.3. Se $\mu(E_1) = \infty$ allora in generale l'asserzione (ii) del Teorema 4.1.2 non vale. Infatti, se $E_n = [n, +\infty), n \in \mathbb{N}$, e μ è la misura di Lebesgue m, si ha $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n = \varnothing$, $E_n \supseteq E_{n+1}$ e $m(E_n) = \infty, n \in \mathbb{N}$.

4.2. Misure esterne

Una *misura esterna* μ_e su un insieme X è una funzione definita sull'insieme delle parti di X a valori in $[0, \infty]$ tale che

(i) $\mu_e(\varnothing) = 0$;

(ii) $\mu_e(E) \leq \mu_e(F)$ se $E \subseteq F$;

(iii) $\mu_e\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_e(E_n)$ per ogni successione di sottoinsiemi E_n di X.

Le misure esterne permettono di costruire della misure, perchè esiste sempre una σ-algebra sulla quale si comportano come misure.

Un sottoinsieme E di X si dice μ_e*-misurabile* se decompone additivamente ogni sottoinsieme di X, cioè se

$$\mu_e(F) = \mu_e(F \cap E) + \mu_e(F \setminus E),$$

per ogni $F \subset X$.

Si noti che, dato che $F = (F \setminus E) \cup (F \cap E)$, per la (iii) vale sempre la disuguaglianza $\mu_e(F) \leq \mu_e(F \cap E) + \mu_e(F \setminus E)$.

Teorema 4.2.1. (Caratheodory) *Sia μ_e una misura esterna. La collezione $\mathcal{M}$ di insiemi μ_e-misurabili è una σ-algebra e la restrizione di μ_e a $\mathcal{M}$ è una misura. Inoltre, se $\mu_e(E) = 0$, allora E è μ_e-misurabile.*

Dimostrazione. È chiaro che $\varnothing \in \mathcal{M}$.

Se $E \in \mathcal{M}$, allora

$$\mu_e(F) = \mu_e(F \cap E) + \mu_e(F \setminus E) = \mu_e(F \setminus E^c) + \mu_e(F \cap E^c),$$

quindi $E^c \in \mathcal{M}$.

Facciamo ora vedere che, se E_1 ed E_2 sono elementi di $\mathcal{M}$, anche l'unione $E_1 \cup E_2$ appartiene ad $\mathcal{M}$. Applichiamo per questo la definizione alle coppie di insiemi F, E_1 e $F \setminus E_1, E_2$; otteniamo:

$$\mu_e(F) = \mu_e(F \cap E_1) + \mu_e(F \setminus E_1),$$
$$\mu_e(F \setminus E_1) = \mu_e((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu_e((F \setminus E_1) \setminus E_2),$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mu_e(F) \quad &= \quad \mu_e(F \cap E_1) + \mu_e((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu_e((F \setminus E_1) \setminus E_2) \geq \\ &\quad\quad \mu_e((F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu_e(F \setminus (E_1 \cup E_2)), \end{aligned}$$

dato che $(F \cap E_1) \cup ((F \setminus E_1) \cap E_2) = F \cap (E_1 \cup E_2)$. La disuguaglianza opposta è sempre vera. Per induzione è chiaro inoltre che, se $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{M}$, anche $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{M}$.

Facciamo ora vedere che, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$ e gli E_n sono a due a due disgiunti, allora

$$\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(F \cap E_n)$$

per ogni $F \subset X$. In particolare, si avrà che

$$\mu_e\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(E_n),$$

e cioè che μ_e è numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$.

Cominciamo a dimostrare per induzione che

$$\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i).$$

È chiaro che questa è soddisfatta per $n = 1$. Sia $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ e supponiamo che

$$\mu_e(F \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i);$$

risulta:

$$\begin{aligned}
\mu_e(F \cap F_{n+1}) \quad = \quad & \mu_e(F \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu_e((F \cap F_{n+1}) \setminus F_n) = \\
& \mu_e(F \cap F_n) + \mu_e((F \cap (F_{n+1}) \setminus F_n)) = \\
& \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i) + \mu_e((F \cap E_{n+1}) = \\
& \sum_{i=1}^{n+1} \mu_e(F \cap E_i).
\end{aligned}$$

Infine, si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(F \cap E_n) \quad \geq \quad & \mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \geq \mu_e\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \\
& \sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap E_i)
\end{aligned}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi la tesi. Nell'ultima catena di disuguaglianze, la prima segue dalla subadditività di μ_e, mentre la seconda dalla sua monotonia.

Siamo ora in grado di concludere la dimostrazione facendo vedere che, se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, anche $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$. Infatti, fissato $n \in \mathbb{N}$ e posto $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$, si ha che sia $F_n \in \mathcal{M}$ che $F_n \setminus F_{n-1} \in \mathcal{M}$ e quindi

$$\begin{aligned}
\mu_e(F) &= \mu_e(F \cap F_n) + \mu_e(F \setminus F_n) \geq \\
&\mu_e(F \cap F_n) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\
&\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{i=1}^{n}(F_i \setminus F_{i-1})\Big) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\
&\sum_{i=1}^{n} \mu_e(F \cap (F_i \setminus F_{i-1})) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big).
\end{aligned}$$

Facendo tendere n all'infinito, si ottiene perciò:

$$\begin{aligned}
\mu_e(F) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_e(F \cap (F_n \setminus F_{n-1})) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\
&\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \setminus F_{n-1}))\Big) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \\
&\mu_e\Big(F \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) + \mu_e\Big(F \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big),
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che gli insiemi $F_n \setminus F_{n-1}$ sono a due a due disgiunti. Come al solito, la disuguaglianza contraria è sempre verificata. $\square$

Sia (X, d) uno spazio metrico. Una misura esterna su X si dice una *misura di Caratheodory* se

$$\mu_e(E \cup F) = \mu_e(E) + \mu_e(F),$$

per ogni coppia di insiemi E, F tali che $d(E, F) > 0$.

Proposizione 4.2.2. *Se μ_e è una misura esterna di Caratheodory su (X, d), allora i boreliani sono μ_e-misurabili.*

Esempio 4.2.3. (La misura di Hausdorff) Sia $X = \mathbb{R}^N$ con la distanza euclidea. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dice che $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ è un δ-ricoprimento di E se $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ e $0 \leq \text{diam}(U_i) \leq \delta$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $0 \leq s < \infty$ e $0 < \delta \leq \infty$. Poniamo:

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s)\left[\frac{\text{diam}(U_i)}{2}\right]^s : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } E\right\},$$

dove

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}, \quad \Gamma(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}.$$

(Si noti che se s è intero, $\alpha(s)$ non è altro che il volume della pallina unitaria s-dimensionale.)

Poiché la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$ è decrescente, dato che ogni δ-ricoprimento è anche un δ'-ricoprimento se $\delta < \delta'$, allora possiamo definire

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Si dice che $\mathcal{H}^s$ è la *misura di Hausdorff s-dimensionale* su $\mathbb{R}^N$; si può dimostrare che $\mathcal{H}^s_\delta$ ed $\mathcal{H}^s$ hanno le seguenti proprietà :

(i) $\mathcal{H}^s_\delta$ e $\mathcal{H}^s$ sono misure esterne;

(ii) $\mathcal{H}^s$ è una misura di Caratheodory, quindi i boreliani sono misurabili secondo $\mathcal{H}^s$;

(iii) $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta i punti di $\mathbb{R}^N$;

(iv) $\mathcal{H}^N = m$ su $\mathbb{R}$, la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^N$;

(v) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ su $\mathbb{R}^N$ per ogni $s > N$;

(vi) $\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$ per ogni $\lambda > 0$ ed $E \subset \mathbb{R}^N$;

(vii) $\mathcal{H}^s(L(E)) = \mathcal{H}^s(E)$ per ogni isometria L di $\mathbb{R}^N$.

Si può anche dimostrare che, se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e, se $0 \le s < t < \infty$, allora $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ implica che $\mathcal{H}^t(E) = 0$ o, in altre parole, $\mathcal{H}^t(E) > 0$ implica che $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

La *dimensione di Hausdorff* di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è allora definita da

$$\dim_H(E) = \inf \left\{ 0 \le s < \infty \;\middle|\; \mathcal{H}^s(E) = 0 \right\}.$$

4.3. Integrale di Lebesgue di funzioni non-negative

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $s : X \to [0, +\infty)$ una funzione semplice, cioè

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{E_i}$$

con $c_i \ge 0$, $i = 1, \ldots k$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i = X$ e $E_i \cap E_j = \varnothing$ per $i \ne j$.

Se $E \in \mathcal{M}$ è misurabile, si pone per definizione:

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E \cap E_i),$$

dove si intende $c_i \mu(E \cap E_i) = 0$ se $c_i = 0$, anche se $\mu(E \cap E_i) = \infty$.

Sia $f : X \to [0, \infty]$ misurabile; l'*integrale (di Lebesgue) di* f *su* E (rispetto alla misura μ) è definito da

$$\int_E f\,d\mu = \sup\left\{ \int_E s\,d\mu : s \text{ semplice },0 \le s \le f \text{ in } E \right\}.$$

Se l'integrale di f è finito, si dice che f è *sommabile in* E.

Esempio 4.3.1. (i) Sia $\mu = \delta_{x_0}$, la delta di Dirac concentrata in $x_0 \in X$. Se $s = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathcal{X}_{E_j}$ è una funzione semplice, allora x_0 appartiene ad un solo E_j, cioè $\mu(E_j) = 0$ se $j \neq i$ e $\mu(E_i) = 1$; quindi

$$\int_X s\ d\mu = c_i = s(x_0).$$

Se f è misurabile e non-negativa, si ha dunque

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{s(x_0) : s \text{ semplice}, 0 \le s \le f\right\} = f(x_0).$$

Una funzione è quindi sommabile se $f(x_0) < \infty$.

(ii) Sia $X = \mathbb{N}$ e sia μ la misura che conta. È facile dimostrare che f è sommabile se e solo se $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n) < \infty$ e si ha che

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

(iii) Se $X = I$ è un insieme qualsiasi e μ è la misura che conta allora

$$\int_I f\,d\mu = \sup\left\{ \sum_{i\in J} f(i) : J \subset I, J \text{ finito} \right\}$$

e si scrive anche

$$\int_I f\,d\mu = \sum_{i\in I} f(i).$$

Proposizione 4.3.2. *Siano* $f, g : X \to [0, \infty]$ *funzioni misurabili ed* $E, F \in \mathcal{M}$.

Allora

(i) $\int\limits_E f\,d\mu = \int\limits_X f\,\mathcal{X}_E\,d\mu$;

(ii) *se* $f \le g$ *in* E, *si ha* $\int\limits_E f\,d\mu \le \int\limits_E g\,d\mu$;

(iii) *se* $E \subseteq F$, *si ha* $\int\limits_E f\,d\mu \le \int\limits_F f\,d\mu$;

(iv) *se* $f = 0$ *in* E, *si ha* $\int\limits_E f\,d\mu = 0$;

(v) *se* $\mu(E) = 0$, *si ha* $\int\limits_E f\, d\mu = 0$.

Dimostrazione. (i) È banale osservando che se $0 \leq s = \sum\limits_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{E_i} \leq f$, allora

$$\int\limits_X s\, \mathcal{X}_E\, d\mu = \int\limits_E s\, d\mu.$$

(ii) Per ogni funzione semplice s con $0 \leq s \leq f$, risulta $s \leq g$ e quindi

$$\int\limits_E s\, d\mu \leq \int\limits_E g\, d\mu.$$

Passando all'estremo superiore, si ottiene la tesi.

(iii) Risulta

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_X f\, \mathcal{X}_E\, d\mu \leq \int\limits_X f\, \mathcal{X}_F d\mu = \int\limits_F f\, d\mu.$$

(iv) Ogni s semplice con $0 \leq s \leq f$ è nulla in E e quindi $\int\limits_E s\, d\mu = 0$.

(v) Per ogni s semplice con $0 \leq s \leq f$, si ha

$$\int\limits_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E \cap E_i) = 0.$$

□

Osservazione 4.3.3. Con la (i), se $f : E \to [0, +\infty]$ è misurabile in E, possiamo definire ancora il suo integrale in X.

Lemma 4.3.4. *Siano* $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ *insiemi misurabili di* X, *a due a due disgiunti e tali che* $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Se s *è una funzione semplice non negativa, allora*

$$\int\limits_E s\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{E_n} s\, d\mu.$$

In altre parole, la funzione $\nu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ *definita da*

$$\nu(E) = \int\limits_E s\, d\mu, \;\; E \in \mathcal{M},$$

è una misura.

Dimostrazione. Come al solito, possiamo scrivere

$$s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{F_i},$$

dove $\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i = X$ e $F_i \cap F_j = \varnothing$ se $i \neq j$. Perciò

$$\begin{aligned}\int_E s\,d\mu &= \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E \cap F_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \cap F_i\Big) = \\ & \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap E_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} c_i \mu(E_n \cap F_i) = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} s\,d\mu.\end{aligned}$$

□

4.4. Teorema di Beppo Levi e lemma di Fatou

Il seguente teorema è fondamentale.

Teorema 4.4.1. (di convergenza monotona o di Beppo Levi) *Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione crescente di funzioni misurabili e non negative su* X. *Allora*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $f : X \to [0, \infty]$ definita da $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ per ogni $x \in X$. Dato che la successione numerica $\int\limits_X f_n\,d\mu$ è crescente e $\int\limits_X f_n\,d\mu \le \int\limits_X f\,d\mu$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu.$$

Viceversa, sia s semplice con $0 \le s \le f$. Fissato un numero $\alpha \in (0, 1)$, poniamo $E_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \alpha s(x)\}$, $n = 1, 2, \cdots$. Risulta che

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \quad \text{e} \quad E_n \subseteq E_{n+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Perciò

$$\int_X f_n\,d\mu \ge \int_{E_n} f_n\,d\mu \ge \alpha \int_{E_n} s\,d\mu = \alpha\,\nu(E_n),$$

dove ν è la misura definita nel Lemma 4.3.4. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \alpha \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = \alpha\, \nu(X) = \alpha \int_X s \, d\mu.$$

per la (iv) del Teorema 4.1.2.

Passando al limite per $\alpha \to 1^-$, si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X s \, d\mu.$$

Passando all'estremo superiore rispetto ad s, si conclude che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \geq \int_X f \, d\mu.$$

□

Osservazione 4.4.2. Applicando la Proposizione 4.3.2 (i), il teorema si può estendere a successione di funzioni misurabili in un insieme misurabile E.

Lemma 4.4.3. (Lemma di Fatou) *Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X. Allora*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $g_n(x) = \inf_{k\geq n} f_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Allora $g_n \leq f_n$, $g_n \leq g_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

per ogni $x \in X$.

Per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, si ha allora

$$\begin{aligned}\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \quad &= \quad \int_X \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu = \\ &\liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.\end{aligned}$$

□

Esempio 4.4.4. Nel lemma di Fatou, in generale, non vale il segno di uguaglianza. Sia infatti

$$f_n(x) = n\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})}(x), \ n \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Allora $f_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

D'altra parte $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1 > 0 = \int_{\mathbb{R}^N} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

È chiaro che questo stesso esempio ci informa anche che il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi non vale se l'ipotesi di monotonia delle f_n viene rimossa.

Esempio 4.4.5. Il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi non vale se la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Infatti la successione $f_n(x) = \frac{1}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, converge (uniformemente) decrescendo a zero, ma

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \infty \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

A proposito di questo esempio si veda il Corollario 4.5.4.

4.5. Linearità dell'integrale di funzioni non-negative

Teorema 4.5.1. *Siano $f : X \to [0, +\infty]$ misurabile e $c \geq 0$. Allora*

$$\int_X cf\,d\mu = c\int_X f\,d\mu.$$

Dimostrazione. Se s è semplice e $0 \leq s \leq f$, allora cs è semplice, $0 \leq cs \leq cf$ e $cs = \sum_{i=j}^{k} cc_i\mathcal{X}_{E_i}$. Perciò

$$\begin{aligned}\int_X cf\,d\mu \quad &\geq \quad \int_X cs\,d\mu = \sum_{i=1}^{k} cc_i\mu(E_i) = c\sum_{i=1}^{k} c_i\mu(E_i) = \\ & c\int_X s\,d\mu,\end{aligned}$$

e quindi

$$c\int_X f\,d\mu \leq \int_X cf\,d\mu.$$

Poiché questa disuguaglianza è valida per ogni $c > 0$ ed ogni f misurabile e non-negativa, applicandola a cf e c^{-1} al posto di f e c, rispettivamente, otteniamo

$$c^{-1}\int_X cf\,d\mu \leq \int_X c^{-1}cf\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

$\square$

Lemma 4.5.2. *Siano s e t funzioni semplici ed E un insieme misurabile. Allora*

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu.$$

Dimostrazione. Siano $s = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathcal{X}_{F_i}$ e $t = \sum_{j=1}^{l} d_j \mathcal{X}_{G_j}$ e gli insiemi F_i e G_j sono a due a due disgunti rispettivamente. Si osservi che

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} F_i = \bigcup_{j=1}^{l} G_j = \bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{l}(F_i \cap G_j)$$

e che gli insiemi $F_i \cap G_j$ sono a due a due disgunti; inoltre

$$s + t = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(c_i + d_j)\mathcal{X}_{F_i \cap G_j}.$$

Quindi

$$\int_X (s+t)\,d\mu = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}(c_i + d_j)\mu(F_i \cap G_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{l}\mu(F_i \cap G_j) + \sum_{j=1}^{l} d_j \sum_{i=1}^{k}\mu(F_i \cap G_j) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} c_i\mu(F_i) + \sum_{j=1}^{l} d_j\mu(G_j) =$$
$$\int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu.$$

□

Teorema 4.5.3. *Siano $f, g : X \to [0,\infty]$ funzioni misurabili. Allora*

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Inoltre, se ogni funzione $f_n : X \to [0,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$, è misurabile, si ha che

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione. Per il Teorema 3.3.1, esistono due successioni crescenti di funzioni semplici non negative s_n e t_n che convergono rispettivamente ed f e g. Per il Teorema 4.4.1 allora

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n+t_n)\,d\mu =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_X s_n\,d\mu + \int_X t_n\,d\mu \right] =$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_X s_n\,d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X t_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Infine

$$\int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\,d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \sum_{n=1}^{k} f_n\,d\mu =$$
$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\,d\mu,$$

ancora per il Teorema 4.4.1. □

Il seguente risultato è la versione del Teorema di Beppo Levi per successioni decrescenti di funzioni non negative.

Corollario 4.5.4. *Sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una successione decrescente di funzioni misurabili e non negative in un insieme misurabile* E *e sia*

$$\int_X f_1(x)\,d\mu < \infty.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$; allora $0 \le f \le f_1$ e risulta:

$$\int_X f_1\, d\mu + \int_X f\, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n + f_n)\, d\mu + \int_X f\, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_X (f_1 - f_n)\, d\mu + \int\limits_X f_n\, d\mu \right\} + \int_X f\, d\mu =$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f_1 - f_n)\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu + \int_X f\, d\mu =$$

$$\int_X (f_1 - f)\, d\mu + \int_X f\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\, d\mu =$$

$$\int\limits_X f_1\, d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu,$$

dove si è applicato il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi dato che la successione $f_1 - f_n$ è crescente. Poiché f_1 è sommabile, si conclude. $\square$

Corollario 4.5.5. *Sia $f : X \to [0, \infty]$ una funzione misurabile. Allora*

(i) *l'applicazione $\nu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definita da*

$$\nu(E) = \int\limits_X f\, d\mu, \;\; E \in \mathcal{M},$$

è una misura;

(ii) *se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente ed $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, risulta:*

$$\int\limits_E f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f\, d\mu;$$

(iii) *se $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente, $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$ e $\int\limits_{E_1} f\, d\mu < \infty$, risulta:*

$$\int\limits_F f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} d\mu.$$

Dimostrazione. Esercizio 9. $\square$

Osservazione 4.5.6. Siano $E \in \mathcal{M}$, $f : E \to [0, \infty]$ una funzione misurabile ed E_0 un insieme di misura nulla. Allora

$$\int\limits_E f\, d\mu = \int\limits_{E\cup E_0} f\, d\mu = \int\limits_{E\setminus E_0} f\, d\mu.$$

È chiaro quindi che tutti i risultati fin qui dimostrati valgono se le proprietà in gioco sono verificate quasi ovunque.

Per esempio, se ogni $f_n : E \to [0, \infty]$ è definita quasi ovunque e la disuguaglianza $f_n \leq f_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, è verificata quasi ovunque, posti

$$E_n = \{x \in E : f_n(x) \text{ non è definito}\},$$
$$F_n = \{x \in E : f_n(x) > f_{n+1}(x)\},$$

si ha che $\mu(E_n) = \mu(F_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Posto allora $Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n \cup F_n)$, risulta che $\mu(Z) = 0$ e che ogni f_n è definita in $E \setminus Z$ ed inoltre $f_n \leq f_{n+1}$ in $E \setminus Z$.

Per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, si ha dunque

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_{E\setminus Z} \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus Z} f_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu.$$

4.6. Integrale di Lebesgue di funzioni misurabili qualunque

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Si dice che f è *sommabile in* se

$$\int_X |f| \, d\mu < \infty.$$

In questo caso si pone per definizione

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu,$$

dove $f^+ = \max(f, 0)$ e $f^- = \max(-f, 0)$. Si noti che $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$ e $0 \leq f^+, f^- \leq |f|$.

Proposizione 4.6.1. (Una funzione sommabile è q.o. finita) *Sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile.*

Posto $E_\infty = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ risulta che $\mu(E_\infty) = 0$.

Dimostrazione. Sia $E_n = \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\infty > \int_X |f| \, d\mu \geq \int_{E_n} |f| \, d\mu \geq n \, \mu(E_n).$$

Dato che $E_n \supseteq E_\infty$, $n \in \mathbb{N}$, si ha allora

$$\mu(E_\infty) \leq \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_X |f| \, d\mu = 0.$$

□

Teorema 4.6.2. *La classe $\mathcal{L}_1(X)$ delle funzioni sommabili in X è uno spazio vettoriale. Inoltre, l'integrale di Lebesgue su X è un'applicazione lineare di $\mathcal{L}_1(X)$ in $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. È chiaro che $cf \in \mathcal{L}_1(X)$ se $f \in \mathcal{L}_1(X)$ e, dato che $|f+g| \leq |f| + |g|$, se f e g sono sommabili, anche $f+g$ lo è.

Inoltre risulta:

$$(cf)^+ - (cf)^- = cf = c(f^+ - f^-) = cf^+ - cf^-$$

e quindi

$$\begin{aligned} &(cf)^+ + cf^- = (cf)^- + cf^+ \quad \text{se} \quad c > 0, \\ &(cf)^+ + (-c)f^+ = (cf)^- + (-c)f^- \quad \text{se} \quad c < 0. \end{aligned}$$

Trattandosi, nei due casi, di somme di funzioni positive sia a primo che a secondo membro, possiamo applicare i Teoremi 4.5.1 e 4.5.3 per ottenere

$$\begin{gathered} \int_X (cf)^+ \, d\mu + c \int_X f^- d\mu = \\ \int_X (cf)^+ d\mu + \int_X cf^- d\mu = \int_X (cf)^- d\mu + \int_X cf^+ d\mu = \\ \int_X (cf)^- d\mu + c \int_X f^+ d\mu \quad \text{se} \quad c > 0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \int_X (cf)^+ d\mu - c \int_X f^- d\mu = \\ \int_X (cf)^+ d\mu + \int_X (-c) f^- d\mu = \int_X (cf)^- d\mu + \int_X (-c) f^+ d\mu = \\ \int_X (cf)^- d\mu - c \int_X f^+ d\mu \quad \text{se} \quad c < 0. \end{gathered}$$

Osservando che gli integrali in gioco sono tutti finiti, possiamo riordinare le due uguaglianze ottenendo comunque

$$\int_X cf \, d\mu = \int_X (cf)^+ d\mu - \int_X (cf)^- d\mu = c \int_X f^+ d\mu - c \int_X f^- d\mu = c \int_X f \; d\mu.$$

In maniera simile, dato che

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

si ha:

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^+ + f^+ + g^+.$$

Poiché tutte le funzioni in gioco sono non negative, abbiamo:

$$\int_X (f+g)^+ d\mu + \int_X f^- d\mu + \int_X g^- d\mu = \int_X (f+g)^- d\mu + \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu.$$

Poiché tutti gli addendi sono finiti, riordinando i termini otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X (f+g)^+ d\mu - \int_X (f+g)^- d\mu = \\ &\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu + \int_X g^+ d\mu - \int_X g^- d\mu = \\ &\int_X f d\mu + \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

□

Corollario 4.6.3. *Se f è sommabile in X si ha:*

$$\Big|\int_X f\, d\mu\Big| \le \int_X |f|\, d\mu.$$

Dimostrazione. Risulta:

$$\Big|\int_X f\, d\mu\Big| = \Big|\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu\Big| \le \int_X f^+ d\mu + \int_X f^- d\mu = \int_X |f|\, d\mu.$$

□

Esempio 4.6.4. (i) La funzione di Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = 1$ per $x \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = 0$ per $x \notin \mathbb{Q}$ è sommabile, perché è q.o. uguale ad 0 e

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Essa però non è integrabile secondo Riemann, perché per ogni partizione $\mathbb{P}$ di $[0,1]$, le somme di Riemann inferiori $s(f,\mathbb{P})$ sono non-positive, mentre quelle superiori $S(f,\mathbb{P})$ sono minorate da 1.

(ii) La funzione $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x \in [0,\infty),$$

è integrabile secondo Riemann, perché

$$\lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Essa però non è sommabile, perché

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty.$$

Teorema 4.6.5. (Assoluta continuità dell'integrale) *Sia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sommabile in* X. *Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\int_E |f|\, d\mu < \varepsilon \text{ per ogni } E \in \mathcal{M} \text{ con } \mu(E) < \delta.$$

Dimostrazione. Sia $g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Allora g_n tende crescendo a $|f|$ q.o. in X. Per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi

$$\int_X |f|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\, d\mu$$

e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_X (|f| - g_\nu)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se $E \subseteq X$ è misurabile e $\mu(E) < \frac{\varepsilon}{2\nu}$ (cioè si è scelto $\delta = \frac{\varepsilon}{2v}$), risulta:

$$\int_E |f|\, d\mu \leq \int_X (|f| - g_\nu)\, d\mu + \int_E g_\nu\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \nu\, \mu(E) < \varepsilon.$$

□

Proposizione 4.6.6. *Sia* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *misurabile. Se*

$$\int_E f\, d\mu = 0$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$, *allora* $f = 0$ *q.o. in* X.

Dimostrazione. Sia $E_n = \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}, n \in \mathbb{N}$. Allora E_n è misurabile e

$$\frac{1}{n}\, \mu(E_n) \leq \int_{E_n} f\, d\mu = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Perciò

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) \leq \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\Big) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(E_n) = 0,$$

cioè $f \leq 0$ q.o. in X.

Scambiando f con $-f$, si ottiene che $f \geq 0$ q.o. in X. □

4.7. Il teorema della convergenza dominata

Esempio 4.7.1. Siano

$$\begin{aligned} &f_1(x) = \mathcal{X}_{(0,1)}(x), \\ &f_n(x) = n\,\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n})}(x) - (n-1)\,\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{n-1})}(x),\ n = 2,3,\cdots . \end{aligned}$$

per $x \in \mathbb{R}$. Si ha che ogni f_n è sommabile in $\mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 0,\ n = 2,3,\dots \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,dx = 1,$$

per cui

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = 1.$$

D'altra parte,

$$\sum_{n=1}^{k} f_n(x) = k\mathcal{X}_{(0,\frac{1}{k})}(x)$$

e quindi $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Perciò

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\,dx \neq \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

Quindi, per funzioni sommabili di segno qualsiasi non si possono in generale scambiare le operazioni di serie e di integrale.

Esempio 4.7.2. Siano

$$f_n(x) = \frac{n}{1+n+n^2x^2} \quad \text{e} \quad g_n(x) = \frac{n}{n^2+x^2},\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}.$$

Si osservi che

(i) f_n converge q.o. a zero in $\mathbb{R}$, ma non uniformemente;

(ii) g_n converge uniformemente a zero in $\mathbb{R}$;

(iii) $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{1+n}} \to 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$;

(iv) $\int\limits_{\mathbb{R}} g_n(x)\,dx = \pi \nrightarrow 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)\,dx$, anche se g_n converge uniformemente a zero!

Teorema 4.7.3. (di Lebesgue, della convergenza dominata) *Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sommabili. Supponiamo che*

(i) *per quasi ogni $x \in X$*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x);$$

(ii) *esiste una funzione g sommabile in tale che*

$$|f_n(x)| \le g(x) \quad \textit{per quasi ogni } x \in X \textit{ e per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

In particolare,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Dimostrazione. Dato che $|f_n - f| \le |f_n| + |f| \le 2g$ q.o. in X e $|f_n - f| \to 0$ q.o. in X, per il lemma di Fatou si ha

$$\int_X 2g \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X [2g - |f_n - f|] \, d\mu =$$

$$= \int_X 2g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu$$

e quindi $\limsup\limits_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu \le 0$. Inoltre

$$\left| \int_X f_n \, d\mu - \int_X f \, d\mu \right| \le \int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \text{ se } n \to \infty.$$

□

Osservazione 4.7.4. Nell'Esempio 4.7.2, la successione $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pur non convergendo uniformemente a zero, ma solo quasi ovunque, è però dominata da una funzione sommabile: $0 \le f_n(x) \le \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

La successione $\{g_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ non può essere dominata da una funzione sommabile. Infatti $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(x)$ non è sommabile, essendo, per $\nu = [|x|/\sqrt{2}]$, la parte intera di $|x|/\sqrt{2}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) \ge g_\nu(x) \ge \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{|x|} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2},$$

e quest'ultima funzione non è sommabile in $\mathbb{R}$.

Il seguente Corollario chiarifica l'Esempio 4.7.1.

Corollario 4.7.5. *Siano $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, sommabili e tali che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ *converge assolutamente per quasi ogni* $x \in X$ *ad una funzione sommabile in* X *e risulta che*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu.$$

Dimostrazione. Sia $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|$; per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, g è sommabile:

$$\int_X g \, d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

Allora g è q.o. finita in X per la Proposizione 4.6.1, cioè $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge assolutamente per quasi ogni $x \in X$.

Infine, dato che

$$\left| \sum_{n=1}^{k} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{k} |f_n(x)| \leq g(x), \; x \in X, \; k \in \mathbb{N},$$

per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3 si conclude che

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \, d\mu.$$

□

Una conseguenza molto utile del Teorema della Convergenza Dominata è il seguente teorema di derivazione sotto il segno di integrale.

Teorema 4.7.6. *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e sia* $A \subseteq \mathbb{R}^M$ *aperto. Sia inoltre* $F : A \times X \to \mathbb{R}$ *e supponiamo che* $F(x, \cdot)$ *sia sommabile in* X *per ogni* $x \in A$ *e che* $F(\cdot, y)$ *sia di classe* $C^1(A)$ *per quasi ogni* $y \in X$.

Se esistono funzioni g_k *sommabili in* X *e tali che per ogni* $x \in A$ *e* $k = 1, \ldots, N$ *risulta che*

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \right| \leq g_k(y), \; y \in X, \tag{4.2}$$

allora la funzione definita da $G(x) = \int_X F(x, y) \, d\mu(y)$ *è di classe* $C^1(A)$ *e risulta:*

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(x) = \int_X \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \, d\mu(y), \; k = 1, \ldots, N. \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Sia e_k il versore k-simo della base canonica di $\mathbb{R}^N$, $x \in A$ e $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una qualsiasi successione infinitesima tale che $x + h_n\, e_k \in A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dato che F è di classe C^1 nella variabile x, per il Teorema di Lagrange, abbiamo:

$$\frac{G(x + h_n\ e_k) - G(x)}{h_n} = \int_X \frac{F(x + h_n\, e_k, y) - F(x, y)}{h_n}\, d\mu(y) =$$
$$\int_X \frac{\partial F}{\partial x_k}(x + h_n\,\theta\, e_k, y)\, d\mu(y),$$

dove $\theta = \theta_n(x, y) \in (0, 1)$. Si consideri ora la successione di funzioni

$$f_n(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x + h_n\,\theta\, e_k, y),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

La continuità di $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}$ in x implica che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \ \text{ per ogni } \ x \in A \ \text{ e quasi ogni } \ y \in E,$$

se $n \to \infty$, mentre, per l'ipotesi (4.2), risulta che

$$|f_n(x, y)| \le g_k(y),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3. concludiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x, y)\, d\mu(y) = \int_E \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)\ d\mu(y)$$

e quindi, data l'arbitrarietà di $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che G è derivabile rispetto ad x_k e (4.3) vale.

Il fatto che $\dfrac{\partial G}{\partial x_k}$ sia continua in x segue ancora dal Teorema 4.7.3 applicato alla successione $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x_n, y)$, che è dominata da $g_k(y)$ e converge a $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x, y)$ per ogni successione di punti di $x_n \in A$ che converge ad x. □

4.8. Il teorema di Fubini-Tonelli

4.8.1. Misura di un prodotto cartesiano.

Teorema 4.8.1. *Sia E misurabile in $\mathbb{R}^N$ e sia F misurabile in $\mathbb{R}^M$. Allora $E \times F$ è misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ e si ha*

$$m_{N+M}(E \times F) = m_N(E)\, m_M(F). \tag{4.4}$$

Dimostrazione. In quanto segue indichiamo semplicemente con m la misura di Lebesgue m_{N+M} $(M + N)$-dimensionale.

(i) La (4.4) vale sicuramente se E ed F sono intervalli e quindi si estende facilmente al caso in cui E ed F siano plurintervalli.

(ii) Se E ed F sono aperti, allora $E \times F$ è aperto e quindi misurabile in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$. Inoltre, per il Teorema 1.3.2, esistono due successioni crescenti di plurintervalli $P_n \subseteq E$ e $Q_n \subseteq F$ tali che

$$\lim_{n\to\infty} m_N(P_n) = m_N(E) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} m_M(Q_n) = m_M(F).$$

Dato che $\{P_n \times Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e $E \times F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (P_n \times Q_n)$, per il Teorema 4.1.2 e la (i) risulta:

$$\begin{aligned} m(E \times F) &= \lim_{n\to\infty} m(P_n \times Q_n) = \lim_{n\to\infty} m_N(P_n)\, m_M(Q_n) = \\ & m_n(E)\, m_M(F). \end{aligned}$$

In modo analogo si procede sul caso in cui E ed F siano compatti.

(iii) Siano E ed F limitati, misurabili e di misura positiva. Allora fissato $0 < \varepsilon < \min[m_N(E), m_M(F)]$ esistono A e B aperti, H e K compatti tali che $H \subseteq E \subseteq A$, $K \subseteq F \subseteq B$ e

$$m_N(A) - m_N(H) < \varepsilon, \quad m_M(B) - m_M(K) < \varepsilon.$$

Perciò, dato che $A \times B$ è aperto e $A \times B \supseteq E \times F$, per la (ii) risulta

$$\begin{aligned} m_e(E \times F) &\le m(A \times B) = m_N(A)\, m_M(B) < \\ & [m_N(H) + \varepsilon][m_N(K) + \varepsilon] \le [m_N(E) + \varepsilon][m_M(F) + \varepsilon], \end{aligned}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ha che

$$m_e(E \times F) \le m_N(E)\, m_M(F).$$

Analogamente

$$\begin{aligned} m_i(E \times F) &\ge m(H \times K) = m_N(H)\, m_M(K) > \\ & [m_N(A) - \varepsilon][m_N(B) - \varepsilon] \ge [m_N(E) - \varepsilon][m_M(F) - \varepsilon], \end{aligned}$$

e dunque

$$m_i(E \times F) \ge m_N(E)\, m_M(F)$$

e cioè $E \times F$ misurabile in $\mathbb{R}^{N+M}$ e vale la (4.4).

(iv) Se E ed F sono limitati e $m_N(E) = 0$ o $m_M(F) = 0$, allora, se per esempio $m_N(E) = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $A \supseteq E$ tale che $m_N(A) < \varepsilon$. Perciò , per ogni B aperto limitato contenente F risulta:

$$m_e(E \times F) \le m(A \times B) = m_N(A) \cdot m_M(B) < \varepsilon m_M(B)$$

e quindi $m^e_{N+M}(E \times F) = 0$ e cioè $E \times F$ è misurabile ed ha misura nulla.

(v) Per k intero, sia $Q_k(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x_i| \leq r, i = 1, \ldots, k\}$. Se E ed F sono misurabili e non limitati, si ha che $(E \times F) \cap Q_{M+N}(0,r) = (E \cap Q_N(0,r)) \times (F \cap Q_M(0,r))$ è misurabile per ogni $r > 0$ e risulta:

$$E \times F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap Q_N(0,n)) \times (F \cap Q_M(0,n)).$$

Perciò $E \times F$ è misurabile e

$$\begin{aligned} m(E \times F) &= \lim_{n\to\infty} m((E \times F) \cap Q_{M+N}(0,n)) = \\ &\lim_{r\to\infty} m_N(E \cap Q_N(0,n))\, m_M(F \cap Q_M(0,n)) = \\ &m_N(E)\, m_M(F). \end{aligned}$$

□

Osservazione 4.8.2. Se $m_N(E) = 0$, allora

$$m(E \times \mathbb{R}^N) = \lim_{r\to\infty} m(E \times Q_M(0,r)) = 0.$$

Quindi, per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^M$, *anche se non misurabile*, si ha

$$m_e(E \times F) \leq m_{N+M}(E \times \mathbb{R}^M) = 0.$$

Teorema 4.8.3. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^N$ ed $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabili.*

(i) *L'epigrafico di f,*

$$\mathcal{G} = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : t < f(x)\},$$

è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ e la funzione $F : E \times \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che $F(x,t) = f(x) - t$ è misurabile.

(ii) *Se $f \geq 0$, gli insiemi*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_f &= \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\} \quad e \\ \mathcal{R}_f^* &= \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t \leq f(x)\} \end{aligned}$$

sono misurabili in $\mathbb{R}^{N+1}$ e

$$m_{N+1}(\mathcal{R}_f) = m_{N+1}(\mathcal{R}_f^*) = \int_E f(x)dx.$$

Dimostrazione. (i) Risulta che

$$\mathcal{G} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} L_q \times (-\infty, q)$$

dove $L_q = \{x \in E : f(x) > q\}$. Per il Teorema 4.8.1, ogni $L_q \times (-\infty, q)$ è misurabile e quindi $\mathcal{G}$ è misurabile, perché unione numerabile di insiemi misurabili.

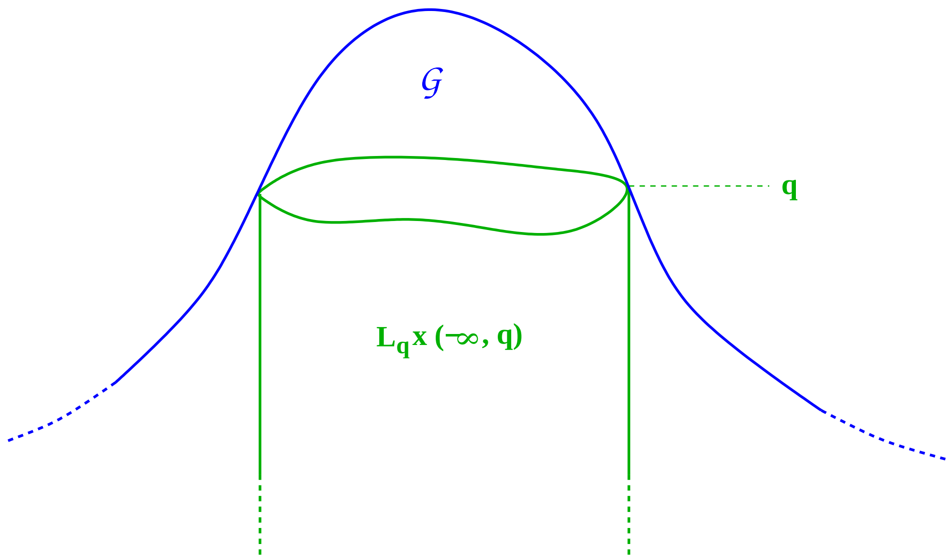

Figura 1. Epigrafico come unione numerabile

Inoltre

$$\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : F(x,t) > s\} = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) - s > t\}$$

è misurabile per ogni $s \in \mathbb{R}$, essendo l'epigrafico della funzione misurabile $x \mapsto f(x) - s$.

(ii) È chiaro che $\mathcal{R}_f$ ed $\mathcal{R}_f{}^*$ sono misurabili (per esempio, $\mathcal{R}_f = \mathcal{G} \cap (\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$. Sia ora $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathcal{X}_{E_i}$ una funzione semplice in $\mathbb{R}^N$. Allora

$$\mathcal{R}_s = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : 0 < t < s(x)\} = \bigcup_{i=1}^{n} (E \cap E_i) \times (0, c_i)$$

e quindi

$$\begin{aligned} m_{N+1}(\mathcal{R}_s) &= \sum_{i=1}^{n} m_{N+1}((E \cap E_i) \times (0, c_i)) = \sum_{i=1}^{n} c_i \, m_N(E \cap E_i) = \\ & \int_E s(x) dx. \end{aligned}$$

Dato che $f \geq 0$, per il Teorema 3.3.1, esiste una successione crescente di funzioni semplici s_n su $\mathbb{R}^N$ che converge puntualmente ad $f \, \mathcal{X}_E$. Allora si ha che $\mathcal{R}_f = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}_{s_n}$ e $\mathcal{R}_{s_n} \subseteq \mathcal{R}_{s_{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$m_{N+1}(\mathcal{R}_f) = \lim_{n\to\infty} m_{N+1}(\mathcal{R}_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_E s_n(x)\, dx = \int_E f(x)\, dx$$

per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi.

Dato che $\mathcal{R}_f^* \subseteq \mathcal{R}_{\alpha f}$ per ogni $\alpha > 1$, si ottiene infine

$$\int_E f(x)\, dx = m_{N+1}(\mathcal{R}_f) \le m_{N+1}(\mathcal{R}_f^*) \le m_{N+1}(\mathcal{R}_{\alpha f}) = \alpha \int_E f(x)\, dx$$

e quindi anche $m_{N+1}(\mathcal{R}_f^*) = \int_E f(x)dx$. $\square$

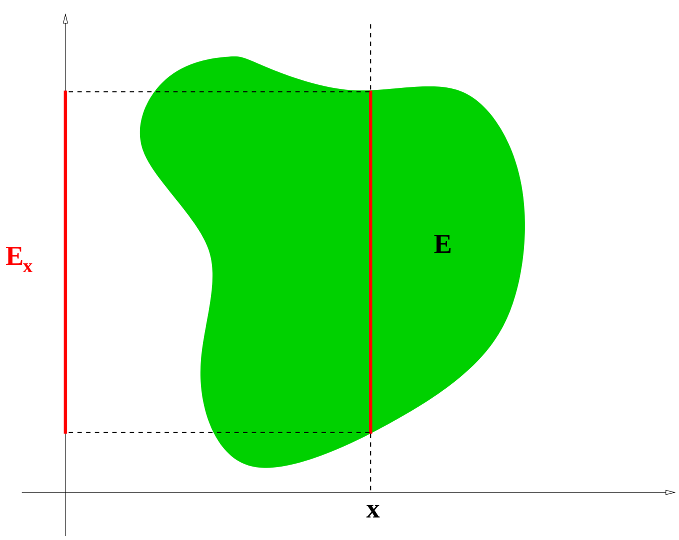

Figura 2. Sezione di un insieme E.

4.8.2. Il teorema delle sezioni.

Teorema 4.8.4. (delle sezioni) *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ misurabile. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$, l'insieme*

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^M : (x, y) \in E\}$$

è misurabile. Inoltre la funzione $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto m_M(E_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$ e risulta che

$$m_{N+M}(E) = \int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)dx.$$

Dimostrazione. (i) Il teorema è ovvio se E è un intervallo o un plurintervallo.

(ii) Se E è un aperto, per il Teorema 1.3.2, esiste una successione crescente di plurintervalli $P^{(n)}$ tali che $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P^{(n)}$ e $\lim_{n\to\infty} m_{N+M}(P^{(n)}) = m_{N+M}(E)$. L'insieme E_x è aperto in $\mathbb{R}^M$ (e perciò misurabile) ed $E_x = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_x^{(n)}$ e quindi $m_M(E_x) = \lim_{n\to\infty} m_M(P_x^{(n)})$.

Inoltre, la funzione $x \mapsto m_M(E_x)$ è misurabile, perché limite di funzioni misurabili. Infine, per il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi, il passo (i) ed il Teorema 4.1.2, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)dx \quad &= \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} m_M(P_x^{(n)})dx = \lim_{n\to\infty} m_{N+M}(P^{(n)}) = \\ & \quad\ m_{N+M}(E).\end{aligned}$$

(iii) Se $m_{N+M}(E) = 0$ esiste una successione decrescente di aperti $A^{(n)}$ contenenti E tale che $\lim_{n\to\infty} m_{N+M}(A^{(n)}) = 0$. Per il passo (ii), ogni $x \mapsto m_M(A_x^{(n)})$ è misurabile e quindi anche $f(x) = \lim_{n\to\infty} m_M(A_x^{(n)})$ è misurabile. Per il lemma di Fatou 4.4.3 ed il passo (ii) inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} m_M(A_x^{(n)})dx = \lim_{n\to\infty} m_{N+M}(A^{(n)}) = 0.$$

Ciò significa che $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$ e, dato che $E_x \subseteq A_x^{(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$m_N(E_x) \leq \lim_{n\to\infty} m_N(A_x^{(n)}) = f(x) = 0$$

per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Dunque $\int_{\mathbb{R}^N} m_N(E_x)dx = 0 = m_{N+M}(E)$.

(iv) Se $m_{N+M}(E) < \infty$, per il Teorema 2.6.2, esiste una successione decrescente di aperti $A^{(n)}$ con $m_{N+M}(A^{(1)}) < \infty$ tale che

$$m_{N+M}(E) = \lim_{n\to\infty} m_{N+M}(A^{(n)}).$$

Inoltre

$$E = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}\right) \setminus Z \quad \text{con} \quad m_{N+M}(Z) = 0.$$

Dato che

$$E_x = \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_x^{(n)}\right) \setminus Z_x$$

per $x \in \mathbb{R}^N$ e che $m_M(Z_x) = 0$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ per la (iii), allora E_x è misurabile per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Inoltre $m_M(A_x^{(1)}) < \infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$, dato che

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_M(A_x^{(1)})dx = m_{N+M}(A^{(1)}) < \infty.$$

Quindi

$$m_M(E_x) = m_M\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_x^{(n)}\Big) = \lim_{n\to\infty} m_M(A_x^{(n)})$$

e dunque $x \mapsto m_M(E_x)$ è misurabile.

Infine

$$\int_{\mathbb{R}^N} m_M(E_x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} m_M(A_x^{(n)})dx = \lim_{n\to\infty} m_{N+M}(A^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} m_{N+M}(E).$$

(v) Se E è misurabile, si pone $E_n = E \cap Q_{N+M}(0,n)$ e si conclude in modo completamente analogo a prima, sfruttando la monotonia di $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi il Teorema 4.4.1 di Beppo Levi. □

Corollario 4.8.5. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile e sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$. Allora f è misurabile se e solo se il suo epigrafico è misurabile.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4.8.3, resta da dimostrare che f è misurabile se è misurabile $\mathcal{G} = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}^N : t < f(x)\}$.

Per il Teorema 4.8.4, per q.o. $t \in \mathbb{R}^N$ la sezione $\mathcal{G}_t = \{x \in E : t < f(x)\} = L_+(f,t)$ è misurabile. D'altra parte, l'insieme dei t tali che $\mathcal{G}_t$ è misurabile è denso in $\mathbb{R}$ (altrimenti il suo complementare non avrebbe misura nulla, contenendo un aperto).

Perciò, per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste una successione di valori $t_n > t$ convergenti a t e tali che ogni $\mathcal{G}_{t_n}$ è misurabile; dunque l'insieme di livello

$$L_+(f,t) = \mathcal{G}_t = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{G}_{t_n}$$

è misurabile. □

Corollario 4.8.6. *Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme limitato e misurabile secondo Peano-Jordan e sia $f : E \to \mathbb{R}$ limitata ed integrabile secondo Riemann.*

Allora f è sommabile in E ed il suo integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann.

Dimostrazione. Si dimostra prima per $f \geq 0$ e poi si estende osservando che $f = f^+ - f^-$.

Abbiamo già dimostrato che E è anche misurabile secondo Lebesgue. Inoltre l'insieme $\mathcal{R}_f$ è misurabile secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^{N+1}$ perché misurabile secondo Peano-Jordan. Per il Corollario 4.8.5, f è misurabile.

Infine,

$$\text{integrale di Riemann di } f = p_{N+1}(\mathcal{R}_f) =$$
$$m_{N+1}(\mathcal{R}_f) = \text{integrale di Lebesgue di } f.$$

□

4.8.3. Il teorema di Fubini-Tonelli.

Teorema 4.8.7. (di Fubini-Tornelli) *Sia $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \to \overline{\mathbb{R}}$ misurabile.*

(i) *Se $f \geq 0$, allora la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^M$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$; la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)dy$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$ e si ha:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x, y)dxdy. \tag{4.5}$$

(ii) *Se f è sommabile, allora la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^M$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$; la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)dy$ è sommabile in $\mathbb{R}^N$ e vale ancora la (4.5).*

Dimostrazione. (i) Sia $\mathcal{R} = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x, y)\}$; per il Teorema 4.8.3, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x, y)dxdy = m_{N+M+1}(\mathcal{R}). \tag{4.6}$$

Per il Teorema 4.8.4, $\mathcal{R}_x = \{(y, t) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x, y)\}$ è misurabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ e quindi la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^M$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$, per il Corollario 4.8.5. Per il Teorema 4.8.4 allora la funzione $x \mapsto m_{M+1}(\mathcal{R}_x)$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$, il che vuol dire che $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)dy$ è misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Infine

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\int_{\mathbb{R}^M} f(x, y)dy \Big) dx = \int_{\mathbb{R}^N} m_{M+1}(\mathcal{R}) = \int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M} f(x, y)dxdy,$$

sempre per il Teorema 4.8.4.

(ii) Dato che $f = f^+ - f^-$, basta dimostrare la tesi quando $f \geq 0$ ed f sommabile.

Per quanto dimostrato in (i), vale la (4.5) ed, inoltre, il secondo membro di (4.5) è finito, poiché f è sommabile. Ne segue che la funzione $x \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^M} f(x,y)dy$ è sommabile in $\mathbb{R}^N$ e, quindi, finita per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.

Dunque la funzione $y \mapsto f(x,y)$ è sommabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. $\square$

Si dice che uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è *σ-finito* se esiste una successione di insiemi $E_n \in \mathcal{M}$ di misura $\mu(E_n)$ finita la cui unione è uguale a X. Se inoltre $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ sono due spazi di misura σ-finiti, si indica con $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ la più piccola σ-algebra contenente tutti prodotti cartesiani di insiemi di $\mathcal{M}_1$ con insiemi di $\mathcal{M}_2$. Con un'opportuna definizione della misura $\mu_1 \times \mu_2$, la terna $(X_1 \times X_2, \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2, \mu_1 \times \mu_2)$ è uno spazio di misura e vale il seguente analogo del Teorema di Fubini-Tonelli.

Teorema 4.8.8. *Siano $(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ due spazi di misura σ-finiti e sia f una funzione misurabile su $X_1 \times X_2$ rispetto alla σ-algebra $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$.*

(i) *Se $f : X_1 \times X_2 \to [0, +\infty]$, allora le funzioni $x \mapsto \int_{X_2} f(x,y)\, d\mu_2$ e $y \mapsto \int_{X_1} f(x,y)\, d\mu_1$ sono, rispettivamente $\mathcal{M}_1$- $\mathcal{M}_2$-misurabili ed i seguenti tre integrali sono uguali (anche se infiniti):*

$$\int\limits_{X_1 \times X_2} f\, d(\mu_1 \times \mu_2), \quad \int\limits_{X_1} \Big(\int\limits_{X_2} f\, d\mu_2 \Big) d\mu_1, \quad \int\limits_{X_2} \Big(\int\limits_{X_1} f\, d\mu_1 \Big) d\mu_2.$$

(ii) *Se f è sommabile in $X_1 \times X_2$, le funzioni $x \mapsto f(x,y)$ e $y \mapsto f(x,y)$ sono sommabili, rispettivamente, per quasi ogni $y \in X_2$ e per quasi ogni $x \in X_1$, le funzioni $x \mapsto \int_{X_2} f(x,y)\, d\mu_2$ e $y \mapsto \int_{X_1} f(x,y)\, d\mu_1$ sono sommabili nei rispettivi spazi ed i tre integrali rimangono uguali*

Esercizi

1. Calcolare la dimensione di Hausdorff dell'insieme $\mathbb{Q}$.
2. Costruire un sottoinsieme di $[0,1]$ com dimensione di Hausdorff maggiore di $\ln 2/\ln 3$ e minore di 1.
3. Sia $s : [0,1] \to [0,1]$ la scala di Cantor. Calcolare
$$\int_0^1 s(x)\, dx.$$
4. Mostrare che il
$$\lim_{a \to +\infty} \int\limits_0^a \frac{\sin x}{x}\, dx$$

converge. Dimostrare poi che

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin x}{x}\right]^+ dx = +\infty,$$

sia nel senso di Riemann che di Lebesgue.

5. Siano f_n misurabili e non negative in E tali che f_n converge ad una funzione f sommabile in E e

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx.$$

Provare che per ogni sottoinsieme misurabile F di E si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_F f_n\,dx = \int\limits_F f\,dx.$$

Vale lo stesso risultato se si rimuove l'ipotesi $f_n \geq 0$?

6. Sia $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile, e siano f_n le funzioni troncate

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad |f(x)| \leq n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n\,dx = \int\limits_E f\,dx.$$

7. Sia $f : \mathbb{R}^N \to \overline{R}$ sommabile e siano $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $\lambda > 0$. Dimoatrare le formule:

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x + x_0)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \quad \text{e}$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda x)\,dx = \lambda^{-N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx.$$

8. Sia f_n una successione di funzioni misurabili tali che $f_n \to f$ q.o. in E misurabile. Se $|f_n(x)|^p \leq g(x)$ con $p \geq 1$ e g sommabile, allora

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E |f_n(x) - f(x)|^p dx = 0.$$

9. Dimostrare il Corollario 4.5.5.

10. Osservare che se H è un insieme misurabile contenuto in $[0,1] \times [0,1]$ allora le sezioni verticali $H_x = \{y \in [0,1] : (x,y) \in H\}$ sono misurabili per quasi ogni $x \in [0,1]$. Vale il viceversa?

11. Sia f non negativa, misurabile in $E \subseteq \mathbb{R}^N$ misurabile. Allora

$$\int_E f = \int_0^{\infty} m_f(t)\,dt,$$

dove $m_f(t)$ è la misura di Lebesgue dell'insieme $\{x \in E : f(x) > t\}$.

12. Calcolare l'integrale di Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

e poi calcolare

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

13. Calcolare il volume di una palla di raggio r in $\mathbb{R}^4$ e quello dell'ellissoide

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{x_i}{a_i} \right)^2 \leq 1 \right\},$$

dove i numeri a_i sono positivi.

14. Sia D il dominio normale $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$, dove $\alpha, \beta : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ sono sommabili e sia $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ sommabile in D. Dimostrare la formula di riduzione:

$$\int_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

15. Dimostrare che se $[a, b]$ è un intervallo limitato e se $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ è limitata ed integrabile secondo Riemann, allora l'insieme

$$\mathcal{R} = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^{N+1}$ secondo Peano-Jordan.

Capitolo 5

Spazi L^p

5.1. Le disuguaglianze di Jensen, Young, Hölder e Minkowski

Teorema 5.1.1. (Disuguaglianza di Jensen) *Sia μ una misura positiva su una σ-algebra $\mathcal{M}$ sull'insieme X.*

Sia $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ convessa e sia f una funzione a valori reali, sommabile su X rispetto a μ e tale che $a < f(x) < b$ per ogni $x \in X$.

Allora, se $\mu(X) = 1$, risulta che

$$\varphi\left(\int_X f\, d\mu\right) \leq \int_X \varphi(f)\, d\mu. \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Sia $t_0 = \int_X f\, d\mu$; è chiaro che $t_0 \in (a, b)$. Applicando il Corollario 1.4.5, si ottiene:

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t_0) \geq p_{t_0}\ [f(x) - t_0]$$

dove $p_{t_0} \in [\varphi(t_0^-), \varphi(t_0^+)]$. La tesi segue integrando su X e tenendo conto che $\mu(X) = 1$. $\square$

Corollario 5.1.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e di misura finita. Sia φ come nel Teorema 5.1.1 e sia $f : E \to (a, b)$ una funzione sommabile su E.*

Allora

$$\varphi\left(\frac{1}{m(E)} \int_E f\, dx\right) \leq \frac{1}{m(E)} \int_E \varphi(f)\, dx.$$

Esempio 5.1.3. (i) Sia $\varphi(t) = e^t$; allora

$$\exp\left(\int_X g\, d\mu\right) \le \int_X e^g\, d\mu.$$

Se $X = \{1, \dots, n\}$ e se $\mu(\{i\}) = 1/n$ e $g(i) = x_i$, allora

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\right) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{x_i}.$$

Ponendo $y_i = e^{x_i}$, si ottiene la disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica:

$$(y_1\ y_2 \cdots y_n)^{1/n} \le \frac{y_1 + y_2 + \cdot + y_n}{n}\ .$$

Per questo le due quantità:

$$\int\limits_X f\, d\mu \quad \text{e} \quad \exp\left(\int_X \log f\, d\mu\right)$$

si dicono rispettivamente *media aritmetica* e *media geometrica* della funzione $f > 0$.

(ii) Se $\mu(\{i\}) = \alpha_i > 0$ con $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$, si ottiene:

$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} \le \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdot + \alpha_n y_n.$$

(iii) Sia $\varphi(t) = \log t$; φ è concava e perciò, se p e $p' > 1$ sono *esponenti coniugati,* e cioè tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, allora per ogni $a, b > 0$, risulta:

$$\log\left(\frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p'}\ b^{p'}\right) \ge \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p'}\log b^{p'} = \log(ab).$$

Dunque si ottiene la *disuguaglianza di Young:*

$$ab \le \frac{1}{p}\ a^p + \frac{1}{p'}\ b^{p'}.$$

Ponendo $\lambda\, a$, con $\lambda > 0$, al posto di a in questa disuguaglianza, si ottiene

$$ab \le \frac{\lambda^{p-1}}{p}\ a^p + \frac{\lambda^{-1}}{p'}\ b^{p'}. \tag{5.2}$$

Si noti che (5.2) è soddisfatta per ogni a, b e $\lambda > 0$ e vale con il segno di uguaglianza solo se

$$b^{p'} = \lambda\, a^p. \tag{5.3}$$

Teorema 5.1.4. (Disuguaglianza di Hölder) *Sia* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *uno spazio di misura e siano* $p, p' > 1$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Se $|f|^p$ e $|g|^{p'}$ sono sommabili su X, allora fg è sommabile su X e si ha:

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^{p'} d\mu \right)^{1/p'} . \tag{5.4}$$

Inoltre, il segno di uguaglianza in (5.4) vale se e solo se esiste $\lambda > 0$ tale che $|g|^{p'} = \lambda\, |f|^p$ quasi ovunque in X.

Dimostrazione. Se uno dei due fattori a secondo membro di (5.4) è nullo allora o $f = 0$ o $g = 0$ q.o. e quindi $f \cdot g = 0$ q.o., cioè la (5.4) vale senz'altro.

Altrimenti, applicando la disuguaglianza di Young (5.2) con $a = |f(x)|$ e $b = |g(x)|$, otteniamo che

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{\lambda^p}{p}\, |f(x)|^p + \frac{\lambda^{-1}}{p'}\, |g(x)|^{p'} \tag{5.5}$$

per quasi ogni $x \in X$, e quindi, integrando su X, abbiamo che

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_X |f|^p\, d\mu + \frac{\lambda^{-1}}{p'} \int_X |g|^{p'}\, d\mu \tag{5.6}$$

per ogni $\lambda > 0$. Ponendo

$$A^p = \int_X |f|^p\, d\mu,\ \ B^{p'} = \int_X |g|^{p'}\, d\mu$$

nella (5.6) ed applicando (5.2) e (5.3), otteniamo

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq AB$$

e cioè la (5.4).

Il segno di uguaglianza vale se e solo se per qualche λ la (5.5) vale con il segno di uguale q.o. e cioè, ancora per (5.2) e (5.3), se esiste λ tale che $\lambda = |g|^{p'}/|f|^p$. per q. o. $x \in X$. □

Teorema 5.1.5. (Disuguaglianza di Minkowski). *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $1 \leq p < \infty$. Se $|f|^p$ e $|g|^p$ sono sommabili su X, anche $|f+g|^p$ è sommabile su X e risulta che*

$$\Big(\int_X |f+g|^p d\mu \Big)^{1/p} \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu \Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p d\mu \Big)^{1/p}. \tag{5.7}$$

Il segno di uguaglianza vale in (5.7) se e solo se $f = \lambda\, g$ su X per qualche $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Se $p = 1$, la disuguaglianza (5.7) segue semplicemente dalla disuguaglianza triangolare puntuale $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$.

Sia $p > 1$; poiché la funzione $\varphi(t) = t^p$ è convessa, risulta che

$$|f(x) + g(x)|^p = 2^p \left|\frac{f(x) + g(x)}{2}\right|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

e quindi $|f + g|^p$ è sommabile su X.

Dimostriamo ora la (5.7). Possiamo supporre che l'integrale al primo membro di (5.7) sia positivo, altrimenti la disuguaglianza è banale. Per la disuguaglianza triangolare risulta:

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \int_X |f + g|^{p-1}(|f| + |g|)\, d\mu. \tag{5.8}$$

La disuguaglianza di Hölder (5.4) implica allora che

$$\int_X |f||f + g|^{p-1} d\mu \leq \Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |f + g|^{p'(p-1)} d\mu\Big)^{1/p'},$$
$$\int_X |g||f + g|^{p-1} d\mu \leq \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |f + g|^{p'(p-1)} d\mu\Big)^{1/p'};$$

quindi queste disuguaglianze e la (5.8) implicano che

$$\int_X |f + g|^p d\mu \leq \left[\Big(\int_X |f|^p d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p d\mu\Big)^{1/p}\right]\Big(\int_X |f + g|^p d\mu\Big)^{1/p'},$$

dato che $p'(p - 1) = p$. La tesi si ottiene dividendo ambo i membri per $\Big(\int_X |f + g|^p d\mu\Big)^{1/p'}$.

Il segno di uguaglianza vale se vale il segno di uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder, cioè deve verificarsi che $|f+g|^{p'} = \lambda_1 |f|^p$ e $|f+g|^{p'} = \lambda_2 |g|^p$ q.o. in X e dunque che $|f| - \lambda|g| = 0$ per qualche $\lambda > 0$, cioè deve valere l'uguaglianza $f = \pm\lambda\, g$ che, inserita il (5.7) quando vale il segno di uguaglianza, implica che $f = \lambda\, g$ con $\lambda > 0$. □

5.2. Gli spazi $L^p(X)$

Sia p un numero tale che $0 < p < \infty$ e sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Si dice che $f \in \mathcal{L}^p(X)$, se f è misurabile in X e se $|f|^p$ è sommabile in X.

Se $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione misurabile, l'*estremo superiore essenziale* di g in X è definito da

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} g(x) = \inf\{t : \mu(L_+(g, t)) = 0\}. \tag{5.9}$$

Esempio 5.2.1. Se $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è la funzione di Dirichlet definita da

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

allora è chiaro che l'estremo superiore di g è uguale ad 1 mentre, dato che

$$m\{x \in [0,1] : g(x) > t\} = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq 0, \\ 1 & \text{se } t < 0, \end{cases}$$

l'estremo superiore essenziale di g è uguale a 0.

Indichiamo con $\mathcal{L}^\infty(X)$ l'insieme di tutte le funzioni misurabili f su X che sono *essenzialmente limitate* in X e cioè tali che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| < \infty.$$

È facile dimostrare che $\mathcal{L}^p(X)$ è uno spazio vettoriale per ogni $p \in (0, \infty]$. Se $1 \leq p \leq \infty$, possiamo definire in $\mathcal{L}^p(X)$ una *seminorma* definita da

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}, \tag{5.10}$$

se $1 \leq p < \infty$ e

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|. \tag{5.11}$$

Infatti, con queste definizioni si ha chiaramente che

$$\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p, \;\; \lambda \in \mathbb{R},$$

per ogni $p \in [1, \infty]$. Inoltre, la disuguaglianza di Minkowski (5.7) per $p \in [1, \infty)$ e quella triangolare per $p = \infty$ implicano che

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

per ogni $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$.

Si osservi che la disuguaglianza di Hölder si potrà scrivere ora come:

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \;\; \text{con} \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Tale disuguaglianza si può estendere al caso in cui f o $g \in \mathcal{L}^\infty(X)$ (e quindi g o $f \in \mathcal{L}^1(X)$): infatti, per ogni $t > \|f\|_\infty$, $\mu[L_+(|f|, t)] = 0$ e quindi

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, d\mu = \int_{X \setminus L_+(|f|,t)} |f||g| \, d\mu \leq t \int_{X \setminus L_+(|f|,t)} |g| \, d\mu = t \int_X |g| \, d\mu = t \, \|g\|_1,$$

e dunque $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$.

La funzione $f \mapsto \|f\|_p$ definita dalle (5.10) e (5.11) non è però una norma non essendo definita positiva. Infatti $\|f\|_p = 0$ se e solo se $f \equiv 0$ q.o. in X. Possiamo però dare all'insieme $\mathcal{L}^p(X)$ una struttura di spazio normato, decidendo di identificare le funzioni che coincidono q.o. in X; d'ora in avanti, lavoreremo perciò con lo spazio $L^p(X)$ che indicherà lo spazio quoziente $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza definita da: $f \sim g$ se e solo se $f = g$ q. o. in X. Con questo accorgimento $L^p(X)$ è uno spazio normato con la norma definita dalle (5.10) e (5.11). I suoi elementi sono classi di equivalenza i cui rappresentanti sono funzioni definite quasi ovunque.

Possiamo definire uno spazio L^p analogo anche per le funzioni misurabili a valori complessi, interpretando $|f|$ come il *modulo* di f.

Osservazione 5.2.2. Se $\mu(X) < \infty$ e se $f \in L^s(X)$ per $s > 0$, la disuguaglianza di Jensen (5.1) — o la disuguaglianza di Hölder (5.4) — implica che

$$\left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |f|^r d\mu\right)^{s/r} \leq \frac{1}{\mu(X)}\int_X |f|^s d\mu,$$

per ogni $0 < r < s$ e quindi la funzione $(0, s] \ni r \mapsto \left(\frac{1}{\mu(X)}\int_X |f|^r d\mu\right)^{1/r}$ è crescente ed, in particolare, si avranno le inclusioni

$$L^\infty(X) \subset \cdots \subset L^p(X) \subset \cdots \subset L^1(X).$$

Infine, se $f \in L^\infty(E)$, abbiamo che

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$$

(il limite a primo membro esiste per la monotonia appena dimostrata e per il fatto che $m(E)^{1/p} \to 1$). D'altra parte, per ogni $\varepsilon > 0$, se poniamo $X_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ risulta che $m(X_\varepsilon) > 0$ ed inoltre

$$\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \geq \left(\int_{X_\varepsilon} |f|^p d\mu\right)^{1/p} \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(X_\varepsilon)^{1/p}.$$

Perciò:

$$\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty,$$

e dunque

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty. \tag{5.12}$$

5.3. Il teorema di Riesz-Fischer

È chiaro che $L^p(X)$, come ogni spazio normato, è uno spazio metrico. Si dirà quindi che una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ converge in $L^p(X)$ ad una funzione $f \in L^p(X)$ se $\|f_n - f\|_p \to 0$ per $n \to \infty$. Si dirà inoltre che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una *successione di Cauchy in* $L^p(X)$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ per ogni $n, m > \nu$.

Teorema 5.3.1. (Riesz-Fischer). *Sia $1 \le p \le \infty$. Allora ogni successione di Cauchy $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^p(X)$ converge in $L^p(X)$ ad una funzione $f \in L^p(X)$; $L^p(X)$ è quindi uno spazio metrico completo.*

Dimostrazione. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^p(X)$. Allora esiste n_1 tale che
$$\|f_n - f_{n_1}\|_p < \frac{1}{2},$$
se $n \ge n_1$; possiamo poi scegliere un indice $n_2 > n_1$ tale che
$$\|f_n - f_{n_2}\|_p < \frac{1}{2^2},$$
se $n \ge n_2$. Iterando questo ragionamento, possiamo costruire una successione di indici $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tali che
$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k},\ k \in \mathbb{N}.$$

Poniamo
$$g_j = \sum_{k=1}^{j} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|;$$
per $j \to \infty$, g_j converge q.o. in X alla funzione
$$g = \sum_{k\in\mathbb{N}} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \tag{5.13}$$
ed inoltre, poiché
$$\|g_j\|_p \le \sum_{k=1}^{j} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} < 1,$$
allora $g_j \in L^p(X)$.

Supponiamo ora che $1 \le p < \infty$. Per il lemma di Fatou, otteniamo che
$$\int_X |g|^p d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \|g_j\|_p^p \le 1.$$
In particolare, g^p e quindi g è quasi ovunque finita in X, cosicché la serie
$$|f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

converge per quasi ogni $x \in X$, cioè possiamo definire la funzione

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)]$$

per quasi ogni $x \in X$.

Se definiamo $f = 0$ dove essa non fosse definita, abbiamo dunque dimostrato che la sottosuccessione

$$f_{n_j} = f_{n_1} + \sum_{k=1}^{j-1}[f_{n_{k+1}} - f_{n_k}]$$

converge q.o. in X ad f.

Ora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che

$$\|f_{n_j} - f_m\|_p < \varepsilon$$

per ogni m e $j > \nu$. Poiché f_{n_j} converge q.o., il lemma di Fatou allora implica che

$$\int_X |f - f_m|^p d\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_X |f_{n_j} - f_m|^p d\mu \le \varepsilon^p$$

per ogni $m > \nu$, cioè $f - f_m \in L^p(X)$ e quindi anche $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(X)$. L'ultima disuguaglianza implica anche che $f_m \to f$ in $L^p(X)$ se $m \to \infty$.

Sia ora $p = \infty$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $L^\infty(X)$. Gli insiemi

$$A_k = \{x \in X : |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\},$$
$$B_{n,m} = \{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\},$$

hanno misura nulla per ogni $k, n, m \in \mathbb{N}$, e quindi anche la loro unione F ha misura nulla.

Essendo $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \le \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty$ in $X \setminus F$, la serie (5.13) converge totalmente e quindi la successione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in $X\setminus F$ ad una funzione f limitata. Se poniamo allora $f \equiv 0$ in F, con gli stessi argomenti usati per il caso $1 \le p < \infty$, risulta che $f \in L^\infty(X)$ e che $f_n \to f$ in $L^\infty(X)$ se $n \to \infty$. □

En passant abbiamo dimostrato il seguente notevole risultato.

Teorema 5.3.2. *Ogni successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(X)$ che converge in $L^p(X)$ ad una funzione $f \in L^p(X)$ contiene una sottosuccessione che converge quasi ovunque ad f in X.*

Osservazione 5.3.3. Ricordiamo che, se $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale normato, esso si dice uno *spazio di Banach* se è anche completo rispetto alla topologia generata dalla norma.

Il teorema di Riesz-Fischer ci dice che lo spazio $L^p(X)$ è uno *spazio di Banach* per ogni p tale che $1 \le p \le \infty$.

Ricordiamo ancora che se $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ (su $\mathbb{R}$), un *prodotto scalare* è una forma bilineare di $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ in $\mathbb{R}$, simmetrica e definita positiva, cioè una applicazione che a ciascuna coppia di vettori x ed $y \in \mathcal{H}$ associa un numero reale (x, y) in modo che valgono le seguenti proprietà per ogni $x, y, z \in \mathcal{H}$:

(a) $(y, x) = (x, y)$;
(b) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
(c) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$;
(d) $(x, x) \ge 0$ e $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$.

Si dice allora che $\mathcal{H}$ è uno *spazio di Hilbert* se $\mathcal{H}$ è uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare (x, y) che è completo ripetto alla norma $\|x\| = (x, x)^{1/2}$.

È facile dimostrare che $L^2(X)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare definito da

$$(f, g) = \int_X f g \, d\mu,$$

per $f, g \in L^2(X)$.

5.4. Le disuguaglianze di Hanner e di Clarkson

In uno spazio vettoriale $\mathcal{H}$ dotato di prodotto scalare (per esempio in $L^2(X)$) è facile dimostrare l'*identità del parallelogramma:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \ x, y \in H.$$

Una conseguenza di questa identità è che la palla unitaria in $\mathcal{H}$ è non solo convessa, ma anche uniformemente convessa, nel senso della definizione seguente.

Sia $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Si dice che $\mathcal{B}$ è *uniformemente convesso* se la pallina unitaria è un insieme uniformemente convesso, cioè se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in \mathcal{B}$ con $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ e $\|x - y\| > \varepsilon$ risulta che $\left\| \dfrac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta$.

Esempio 5.4.1. Sia $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2$ e, per $(x, y) \in \mathcal{B}$, si definisca:

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \ \|(x, y)\|_1 = |x| + |y|.$$

Allora $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_2)$ è uniformemente convesso, mentre $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_1)$ non lo è.

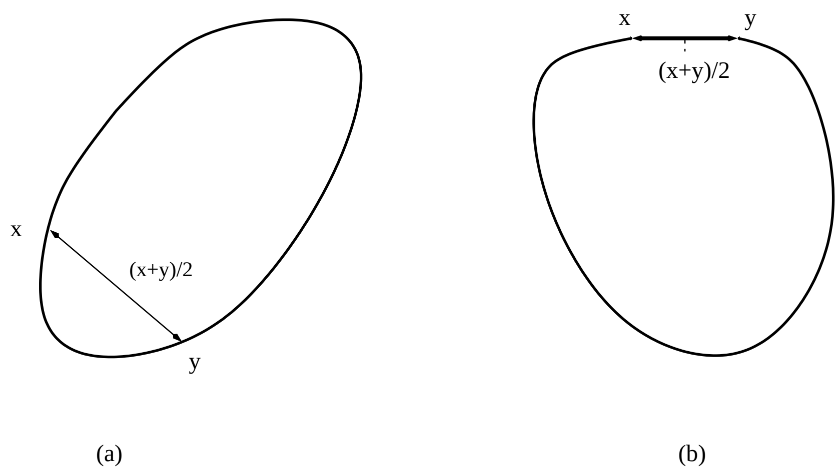

Figura 1. (a) Insieme uniformemente convesso; (b) insieme non uniformemente convesso.

Se $1 < p < \infty$, anche $L^p(X)$ è uniformemente convesso; ciò è una conseguenza della *disuguaglianza di Hanner.*

Teorema 5.4.2. (Hanner). *Siano $f, g \in L^p(X)$. Se $1 \le p \le 2$ risulta:*

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \ge \left(\frac{\|f\|_p + \|g\|_p}{2}\right)^p + \left|\frac{\|f\|_p - \|g\|_p}{2}\right|^p, \tag{5.14}$$

$$\left(\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p\right)^p + \left|\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p - \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p\right|^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p. \tag{5.15}$$

Se $2 \le p < \infty$, le disuguaglianze (5.14) e (5.15) valgono in senso contrario.

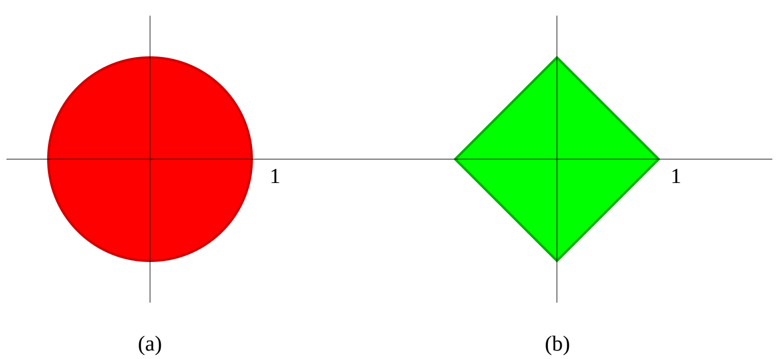

Figura 2. Palline unitarie in (a) $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_2)$ ed in (b) $(\mathcal{B}, \|\cdot\|_1)$.

Osservazione 5.4.3. Se $p = 2$, (5.14) e (5.15) valgono nei due sensi e diventano l'identità del parallelogramma.

Se $p = 1$ la (5.15) non è niente di più della disuguaglianza triangolare.

Lemma 5.4.4. *Sia $p > 1$ e, per $s \in [0, 1]$ e $t > 0$, sia*

$$\varphi(s, t) = h(s) + k(s)\ t^p,$$

dove

$$h(s) = (1 + s)^{p-1} + (1 - s)^{p-1} \quad e \quad k(s) = [(1 + s)^{p-1} - (1 - s)^{p-1}]\ s^{1-p}.$$

Allora, per ogni $t > 0$ fissato, risulta che

$$\begin{array}{ll} \varphi(s, t) \leq |1 + t|^p + |1 - t|^p & se \ \ 1 < p \leq 2, \\ \varphi(s, t) \geq |1 + t|^p + |1 - t|^p & se \ \ p \geq 2. \end{array} \tag{5.16}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che $t \in (0, 1)$. Dato che

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) = (p - 1)\{(1 + s)^{p-2} - (1 - s)^{p-2}\}(1 - t^p/s^p),$$

allora $s \mapsto \varphi(s, t)$ assume il suo massimo per $s = t$ se $1 < p \leq 2$, e quindi in questo caso si ha:

$$\varphi(s, t) \leq \varphi(t, t) = |1 + t|^p + |1 - t|^p.$$

Se ora $t > 1$ e se $p \in (1, 2)$, dato che la funzione $s \mapsto k(s) - h(s)$ è crescente e si annulla per $s = 1$, risulta che $k(s) \leq h(s)$ e perciò

$$\begin{aligned} \varphi(s, t) \quad \leq \quad & k(s) + h(s)\ t^p = t^p[h(s) + k(s)(1/t)^p] = t^p \varphi(s, 1/t) \leq \\ & t^p \varphi(1/t, 1/t) = |1 + t|^p + |1 - t|^p, \end{aligned}$$

dato che $1/t \in (0, 1)$.

Se $p > 2$ si procede in modo analogo. $\square$

Dimostrazione del Teorema 5.4.2. È chiaro che (5.15) segue da (5.14) sostituendo ad f e g le funzioni $f + g$ ed $f - g$ rispettivamente.

Fissate $f, g \in L^p(X)$, possiamo quindi supporre che $\|f\|_p \geq \|g\|_p$. Sia $p \in (1, 2]$ e supponiamo che $|f| \neq 0$. Ponendo $t = |g|/|f|$ in (5.4.4), otteniamo:

$$h(s)|f|^p + k(s)|g|^p \leq |f + g|^p + |f - g|^p,$$

per ogni $s \in [0, 1]$. Notiamo che questa continua a valere se $f = 0$. Se integriamo su E abbiamo che

$$h(s)\|f\|_p^p + k(s)\|g\|_p^p \leq \|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p$$

per ogni $s \in [0, 1]$ e quindi quando il primo membro è massimo rispetto ad s. La tesi segue dunque dal Lemma 5.4.4. $\square$

Le disuguaglianze di Hanner implicano le ben più note *disuguaglianze di Clarkson.*

Teorema 5.4.5. (Disuguaglianze di Clarkson). *Sia* $1 < p < \infty$ *e sia* $p' > 1$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Allora per ogni* $f, g \in L^p(X)$ *risulta:*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^{p'} \le \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \right)^{\frac{1}{p-1}} \tag{5.17}$$

se $1 < p \le 2$, *e*

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^{p} \le \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p \tag{5.18}$$

se $2 \le p < \infty$.

Lemma 5.4.6. *Siano* p *e* p' *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Allora valgono le seguenti disuguaglianze:*

$$(1+t)^p + (1-t)^p \ge 2(1+t^{p'})^{p-1}, \tag{5.19}$$

per ogni $t \in [0,1]$, *se* $1 < p \le 2$ *e*

$$(1+t)^p + (1-t)^p \le 2^{p-1}(1+t^p), \tag{5.20}$$

per ogni $t \in [0,1]$, *se* $2 \le p \le \infty$.

Dimostrazione. (i) Il caso $p = 2$ è banale. Dimostriamo (5.19); stiamo quindi supponendo che $1 < p < 2$.

Sviluppando in serie di McLaurin, si ottiene la seguente catena di uguaglianze:

$$\begin{aligned}
&(1+t)^p + (1-t)^p - 2(1+t^{p'})^{p-1} = \\
&\sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} t^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{p}{k} t^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p-1}{k} t^{kp'} = \\
&2\sum_{j=1}^{\infty} \binom{p}{2j} t^{2j} - 2\sum_{j=1}^{\infty} \binom{p-1}{2j} t^{2jp'} - 2\sum_{j=1}^{\infty} \binom{p-1}{2j-1} t^{p'(2j-1)} = \\
&2\sum_{j=1}^{\infty} t^{2jp'} \left\{ \binom{p}{2j} t^{2j(1-p')} - \binom{p-1}{2j} - \binom{p-1}{2j-1} t^{-p'} \right\}.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Si noti che, dato che $1 < p < 2$, allora sia $\binom{p}{2j}$ che $\binom{p-1}{2j-1}$ sono sempre numeri positivi. La funzione di t

$$\psi_j(t) = \binom{p}{2j} t^{2j(1-p')} - \binom{p-1}{2j-1} t^{-p'} - \binom{p-1}{2j}$$

ha derivata:

$$\begin{aligned}\psi_j'(t) = \quad & 2j(1-p')\binom{p}{2j}t^{2j(1-p')-1} + p'\binom{p-1}{2j-1}t^{-p'-1} = \\ & -\frac{p}{p-1}\binom{p-1}{2j-1}\{t^{2j(1-p')-1} - t^{-p'-1}\},\end{aligned}$$

che dunque si annulla solo se $t = 1$ ed è altrimenti negativa; quindi $\psi_j(t) \geq \psi_j(1) = 0$. Perciò dall'ultima riga di (5.21) segue (5.19).

(ii) Dimostriamo ora (5.20).

Sia

$$\varphi(t) = (1+t)^p + (1-t)^p - 2^{p-1}(1+t^p),$$

per $t \in [0,1]$; si ha:

$$\varphi'(t) = p\ [(1+t)^{p-1} - (1-t)^{p-1} - 2^{p-1}t^{p-1}] = p\ t^{p-1}[\psi(1/t) - 2^{p-1}],$$

dove $\psi(s) = (1+s)^{p-1} - (s-1)^{p-1}$ è crescente per $s \geq 1$ e quindi tale che $\psi(s) \geq \psi(1) = 2^{p-1}$. Dunque $\varphi(t)$ cresce e da ciò segue che $\varphi(t) \leq \varphi(1)$ e cioè (5.20). □

Dimostrazione del Teorema 5.4.5. (i) Sia $1 < p \leq 2$. Si può supporre che $t = \|f-g\|_p/\|f+g\|_p \leq 1$ in (5.19). Moltiplicando ambo i membri di (5.19) per $\|f+g\|_p^p$, si ottiene:

$$\begin{aligned} & 2\left(\|f+g\|_p^{p'} + \|f-g\|_p^{p'}\right)^{p-1} \leq \\ & \quad (\|f+g\|_p + \|f-g\|_p)^p + |\|f+g\|_p - \|f-g\|_p|^p\,.\end{aligned}$$

Da questa per la (5.15) si ottiene facilmente (5.17).

(ii) Sia $2 \leq p < \infty$. In questo caso, si sceglie $t = \|g\|_p^p/\|f\|_p^p \leq 1$ in (5.20) e si moltiplica la stessa (5.20) per $\|f\|_p^p$ per ottenere:

$$(\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\|f\|_p - \|g\|_p|^p \leq 2^{p-1}\left(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p\right)$$

Questa e (5.14) (ricordarsi che vale al contrario!) implicano (5.18). □

Corollario 5.4.7. (Uniforme convessità). *Sia $1 < p < \infty$. Allora $L^p(X)$ è uniformemente convesso.*

Dimostrazione. Sia $1 < p \leq 2$ e siano $f, g \in L^p(X)$ tali che $\|f\|_p, \|g\|_p \leq 1$ e $\|f-g\|_p \geq \varepsilon$. Dalla (5.17) segue che

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'};$$

perciò:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p \leq 1 - \delta_\varepsilon$$

con $\delta_\varepsilon = 1 - [1 - (\varepsilon/2)^{p'}]^{1/p'}$.

Se invece $2 < p < \infty$, si conclude con la (5.17), avendo posto $\delta_\varepsilon = 1 - [1 - (\varepsilon/2)^p]^{1/p}$. □

5.5. Proiezione su insiemi convessi

In questo paragrafo dimostreremo la seguente notevole conseguenza delle disuguaglianze di Clarkson o, più in generale, dell'uniforme convessità di $L^p(X)$.

Teorema 5.5.1. (Proiezione su insiemi convessi) *Sia $1 < p < \infty$ e sia K un sottoinsieme convesso di $L^p(X)$ che sia chiuso nella topologia indotta dalla norma.*

Sia $f \in L^p(X) \setminus K$ e sia

$$d_p = \text{dist}\ (f, K) = \inf_{g \in K} \|f - g\|_p.$$

Allora esiste una sola funzione $h \in K$ tale che $\|f - h\|_p = d_p$. La funzione $h = P_K(f)$ si dice la proiezione di f su K e si verifica che

$$\int_X |f - h|^{p-2}(f - h)(g - h)\ d\mu \leq 0 \quad \textit{per ogni} \quad g \in K. \tag{5.22}$$

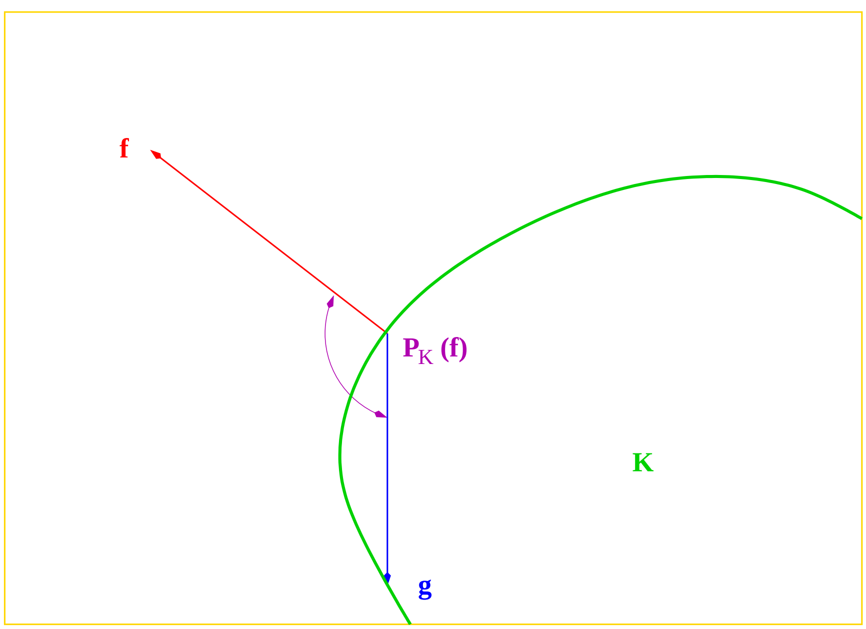

Figura 3. Proiezione su un sottoinsieme chiuso e convesso.

Dimostrazione. Dato che ogni traslato di K rimane chiuso e convesso, possiamo supporre che $f = 0 \notin K$.

Sia $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ una successione minimizzante, ossia tale che $\|g_n\|_p \to d_p$. Dimostriamo che essa è di Cauchy.

Se $1 < p \leq 2$, applicando (5.17) con $f = g_n$ e $g = g_m$ otteniamo:

$$\left\|\frac{g_n + g_m}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{g_n - g_m}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

e quindi, dato che $\dfrac{g_n + g_m}{2} \in K$, possiamo scrivere:

$$\left\|\frac{g_n - g_m}{2}\right\|_p^{p'} \leq \left(\frac{\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} - d_p^{p'}.$$

Quando n ed m tendono all'infinito il secondo membro di quest'ultima disuguaglianza tende a zero e quindi $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Se $p \geq 2$, applichiamo (5.18) ed otteniamo con ragionamento analogo che

$$\left\|\frac{g_n - g_m}{2}\right\|_p^{p} \leq \frac{\|g_n\|_p^p + \|g_m\|_p^p}{2} - d_p^p,$$

da cui ricaviamo ancora che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Poiché $L^p(X)$ è completo, g_n converge in $L^p(X)$ ad una funzione $h \in L^p(X)$ e, dato che K è chiuso, $h \in K$. Perciò $d_p = \lim\limits_{n\to\infty} \|g_n\|_p = \|h\|_p$.

Se $h' \in K$ fosse un'altra funzione tale che $\|h'\|_p = d_p$, applicando ad h ed h' le disuguaglianze di Clarkson ed i ragionamenti fatti per g_n e g_m, otteniamo facilmente che $h = h'$ q.o. in X.

Dimostriamo infine (5.22) che, quando $f = 0$ si legge così:

$$\int_X |h|^{p-2} h\,(g - h)\,d\mu \geq 0 \quad \text{per ogni} \quad g \in K.$$

Fissata $g \in K$ e per $\lambda \in [0,1]$, poniamo $N(\lambda) = \|(1-\lambda)h + \lambda g\|_p^p = \|h + \lambda(g-h)\|_p^p$. La convessità di K implica che $N(\lambda) \geq N(0) = d_p$ per ogni $\lambda \in [0,1]$ e quindi $N'(0) \geq 0$. La tesi allora segue dal Lemma 5.5.3 seguente applicato alle funzioni $\varphi = h$ e $\psi = g - h$. □

Corollario 5.5.2. *Se K è un sottospazio di $L^p(X)$, allora invece di* (5.22) *si ha:*

$$\int_X |f-h|^{p-2}(f-h)\,k\,d\mu = 0 \quad \textit{per ogni} \quad k \in K. \tag{5.23}$$

Lemma 5.5.3. (Differenziabilità della norma) *Siano* φ *e* ψ *due funzioni in* $L^p(X)$ *per* $1 < p < \infty$. *Allora la funzione* $N : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$N(\lambda) = \int_X |\varphi + \lambda\,\psi|^p\,d\mu, \ \ 0 \le \lambda \le 1,$$

è derivabile e la sua derivata per $\lambda = 0$ *è*

$$N'(0) = p \int_X |\varphi|^{p-2}\varphi\,\psi\,d\mu.$$

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema 4.7.6 alla funzione

$$F(\lambda, x) = |\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)|^p.$$

Poiché $p > 1$, essa è di classe C^1 in λ e si ha che

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,\lambda) = p\,|\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)|^{p-2}[\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)]\,\psi(x),$$

per quasi ogni $x \in X$.

D'altra parte risulta che

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,\lambda)\right| = p\,|\varphi(x) + \lambda\,\psi(x)|^{p-1}|\psi(x)| \le p\,(|\varphi(x)| + |\psi(x)|)^{p-1}|\psi(x)|,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$, e la funzione all'ultimo membro è sommabile per la disuguaglianza di Hölder, essendo $\psi \in L^p(X)$ e $(|\varphi| + |\psi|)^{p-1} \in L^{p'}(X)$.

Dal Teorema 4.7.6 otteniamo perciò che

$$N'(\lambda) = p \int_E |\varphi + \lambda\,\psi|^{p-2}(\varphi + \lambda\,\psi)\,\psi\,d\mu$$

e dunque, ponendo $\lambda = 0$, la formula per $N'(0)$. □

Il Lemma 5.5.3 ci dice che la norma $L^p(X)$ è *differenziabile secondo Gateaux.*

5.6. Funzionali lineari

Un'applicazione $L : L^p(X) \to \mathbb{R}$ si dice un *funzionale lineare* se

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$$

per ogni $f, g \in L^p(X)$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Si dice che L è *continuo* se per ogni successione di funzioni f_n convergente in $L^p(X)$ ad una $f \in L^p(X)$ risulta che

$$L(f_n) \to L(f) \ \text{ se } \ n \to \infty.$$

Infine, si dice che L è *limitato* se esiste $c \geq 0$ tale che

$$|L(f)| \leq c\,\|f\|_p \quad \text{per ogni} \quad f \in L^p(X).$$

Proposizione 5.6.1. *Sia $L : L^p(X) \to \mathbb{R}$ lineare. Allora L è continuo se e solo se è limitato.*

Dimostrazione. Se L è limitato ed $f_n \to f$ in $L^p(X)$, allora $|L(f_n) - L(f)| = |L(f_n - f)| \leq c\,\|f_n - f\|_p \to 0$ se $n \to \infty$.

Viceversa, sia L continuo. Se L non fosse limitato, esisterebbe un successione di funzioni f_n tale che

$$c_n = L(f_n/\|f_n\|_p) = L(f_n)/\|f_n\|_p \to +\infty.$$

Posto $g_n = c_n^{-1} f_n/\|f_n\|_p$, si ha che $\|g_n\|_p = c_n^{-1} \to 0$, mentre $L(g_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questo contraddice il fatto che L è continuo. $\square$

Lo *spazio duale* di $L^p(X)$ è l'insieme

$$L^p(X)' = \{L : L^p(X) \to \mathbb{R} : L \text{ lineare e continuo}\}. \tag{5.24}$$

Su $L^p(X)'$ si può definire la norma:

$$\|L\| = \sup_{f \in L^p(X)} \frac{|L(f)|}{\|f\|_p} = \sup\{|L(f)| : \|f\|_p \leq 1\}. \tag{5.25}$$

Si dice che f_n *converge debolmente in* $L^p(X)$ ad f, e si scrive $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(X)$, se

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = L(f) \quad \text{per ogni} \quad L \in L^p(X)'.$$

Osservazione 5.6.2. È chiaro che se $f_n \to f$ in $L^p(X)$ allora $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(X)$. Il contrario non è sempre vero.

Esempio 5.6.3. Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $g \in L^{p'}(X)$. Definiamo l'applicazione $L_g : L^p(X) \to \mathbb{R}$ con la formula

$$L_g(f) = \int_X g\,f\,d\mu, \;\; f \in L^p(X).$$

Allora $L_g \in L^p(X)'$. Infatti, è chiaro che L_g è lineare; inoltre, dalla disuguaglianza di Hölder segue che

$$|L_g(f)| \leq \|g\|_{p'} \|f\|_p,$$

per ogni $f \in L^p(X)$. Pertanto L_g è limitato e $\|L_g\| \leq \|g\|_{p'}$.

In realtà risulta che $\|L_g\| = \|g\|_{p'}$. Infatti, se $1 < p < \infty$, scegliendo $f = |g|^{p'-2}g$, la disuguaglianza di Hölder vale con il segno di uguaglianza e quindi $L_g(f) = \|g\|_{p'}\|f\|_p$. Se $p = \infty$, si sceglie $f = g/|g|$ dove $g \neq 0$ ed $f = 0$ altrimenti; si ottiene ancora $L_g(f) = \|g\|_1\|f\|_\infty$.

Infine, il caso $p = 1$ è un po' più complicato. Dobbiamo supporre che $(X, \mathcal{M}, \mu)$ sia *σ-finito* e cioè tale che X è unione numerabile di insiemi E_n di misura finita. Sia allora $X_\varepsilon = \{x \in X : |g(x)| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon\}$; X_ε ha misura positiva (anche infinita) e quindi esiste E_n tale che $0 < \mu(X_\varepsilon \cap E_n) < \infty$. Definiamo allora $f = g/|g|$ in $X_\varepsilon \cap E_n$ ed $f = 0$ altrimenti; si ottiene:

$$L_g(f) = \int_{X_\varepsilon \cap E_n} |g|\, d\mu \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(X_\varepsilon \cap E_n) = (\|g\|_\infty - \varepsilon)\, \|f\|_1.$$

Quindi $\|L_g\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ ossia $\|L_g\| \geq \|g\|_\infty$.

Teorema 5.6.4. (I funzionali lineari separano) *Sia $f \in L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$, con X σ-finito nel caso $p = \infty$.*

Se $L(f) = 0$ per ogni $L \in L^p(X)'$, allora $f \equiv 0$.

Osservazione 5.6.5. (i) Una conseguenza del Teorema 5.6.4 è che, se $f_n \rightharpoonup f$ e $f_n \rightharpoonup g$, allora $f = g$ quasi ovunque in E.

(ii) Il Teorema 5.6.4 ci informa che, per stabilire che due funzioni f e g siano differenti, basta trovare un funzionale lineare L tale che $L(f) \neq L(g)$.

Dimostrazione. Se $1 < p < \infty$, definiamo $g(x) = |f(x)|^{p-2} f(x)$ se $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$ se $f(x) = 0$. Poiché

$$\int_X |g|^{p'}\, d\mu = \int_X |f|^{p'(p-1)}\, d\mu = \int_X |f|^p\, d\mu < \infty,$$

allora $g \in L^{p'}(X)$. Dato che allora $L_g \in L^p(X)'$ e $L_g(f) = \|f\|_p^p$, allora per l'ipotesi risulta che $\|f\|_p = 0$.

Se $p = 1$, si pone $g(x) = f(x)/|f(x)|$ se $f(x) \neq 0$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Allora $g \in L^\infty(X)$ e si conclude con lo stesso argomento di prima.

Se $p = \infty$, siano E_n, $n \in \mathbb{N}$, gli insiemi di misura finita la cui unione è uguale ad X e sia $E_n^* = \{x \in E_n : f(x) \neq 0\}$; nel caso in cui $m(E_n^*) > 0$, definiamo

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}\, \mathcal{X}_{E_n^*}(x).$$

Il funzionale L_g è limitato su $L^\infty(X)$, dato che $g \in L^1(X)$. Per l'ipotesi, risulta che $0 = L_g(f) = \int_{E_n^*} |f(x)|\, d\mu$, cioè $f = 0$ in E_n^* e quindi $f \equiv 0$ q.o. in E_n e dunque in X. □

Teorema 5.6.6. (La norma L^p è debolmente semicontinua inferiormente) *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(X)$, con X σ-finito se $p = \infty$.*

Allora

$$\liminf_{n \to \infty} \|f_n\|_p \geq \|f\|_p. \tag{5.26}$$

Inoltre, se $1 < p < \infty$ *e se* $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, *allora* $f_n \to f$ *in* $L^p(X)$.

Dimostrazione. Sia $1 \le p < \infty$ e sia $g = |f|^{p-2} f \, \mathcal{X}_{\{x\in X : f(x)\neq 0\}}$ come abbiamo definito nella dimostrazione del Teorema 5.6.4. Allora $L_g \in L^p(X)'$ e risulta:

$$L_g(f_n) \le \|g\|_{p'} \|f_n\|_p$$

e quindi

$$\|f\|_p^p = L_g(f) = \lim_{n\to\infty} L_g(f_n) \le \|g\|_{p'} \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_p.$$

Si conclude osservando che $\|g\|_{p'} = \|f\|_p^{p-1}$.

Se $p = \infty$, sia $X_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$. Dato che $\mu(X_\varepsilon) > 0$ ed X è σ-finito, esiste $E_n \in \mathcal{M}$ tale che $0 < \mu(X_\varepsilon \cap E_n) < \infty$; ponendo

$$g = \frac{f}{|f|} \, \mathcal{X}_{X_\varepsilon \cap E_n},$$

risulta:

$$L_g(f_n) \le \mu(X_\varepsilon \cap E_n) \, \|f_n\|_\infty$$

e quindi

$$\int_{X_\varepsilon \cap E_n} |f(x)| \, dx = \lim_{n\to\infty} L_g(f_n) \le \mu(X_\varepsilon \cap E_n) \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty.$$

Poiché

$$\int_{X_\varepsilon \cap E_n} |f(x)| \, dx \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon) \, \mu(X_\varepsilon \cap E_n),$$

si ottiene che

$$\liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty \ge \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si conclude.

Per dimostrare la seconda asserzione, sfruttiamo la convessità uniforme per $1 < p < \infty$. Se $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, dato che $f_n + f \rightharpoonup 2f$, si ha:

$$2\|f\|_p \le \liminf_{n\to\infty} \|f_n + f\|_p \le \limsup_{n\to\infty} (\|f_n\|_p + \|f\|_p) = 2\|f\|_p,$$

e quindi $\|f_n + f\|_p \to 2\|f\|_p$. Si conclude applicando (5.17) e (5.18) alle funzioni f_n ed f. $\square$

5.7. Il teorema di rappresentazione di Riesz

Nel paragrafo precedente abbiamo più volte usato il fatto che una funzione $g \in L^{p'}(X)$ definisce un funzionale lineare e limitato L_g — cioè un elemento di $L^p(X)'$. Il risultato seguente ci informa che in alcuni casi vale anche il viceversa.

Teorema 5.7.1. (di rappresentazione di Riesz) *Sia* $1 \le p < \infty$ *e sia* X σ*-finito se* $p = 1$*. Allora* $L^p(X)'$ *si può identificare con* $L^{p'}(X)$*, dove* $1/p + 1/p' = 1$.

In altre parole, per ogni $L \in L^p(X)'$ *esiste una sola funzione* $g \in L^{p'}(X)$ *tale che*

$$L(f) = L_g(f) = \int_X g\, f\, d\mu \quad \textit{per ogni} \quad f \in L^p(X).$$

Inoltre $\|L\| = \|g\|_{p'}$.

Dimostrazione. Sia $1 < p < \infty$ e sia $L \in L^p(X)'$, $L \neq 0$. Il nucleo di L,

$$K = \{f \in L^p(X) : L(f) = 0\},$$

è un sottoinsieme proprio di $L^p(X)$, convesso (K è un sottospazio vettoriale) e chiuso (L è continuo). Sia $f_0 \in L^p(X) \setminus K$, cioè f_0 è tale che $L(f_0) \neq 0$. Per il Teorema 5.5.1, esiste la proiezione $h \in K$ di f_0 su K e, per il il Corollario 5.5.2, risulta che

$$\int_X |f_0 - h|^{p-2}(f_0 - h)\, k\, d\mu = 0 \quad \text{per ogni} \quad k \in K. \tag{5.27}$$

Se ora $f \in L^p(X)$, possiamo sempre scrivere che $f = \lambda(f_0 - h) + k$, dove $k \in K$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Infatti, se

$$\lambda = \frac{L(f)}{L(f_0)},$$

si ha che

$$L(f - \lambda(f_0 - h)) = L(f) - \lambda L(f_0 - h) = L(f) - \lambda L(f_0) = 0,$$

e quindi $f - \lambda(f_0 - h) = k$ per qualche $k \in K$.

Se α è un parametro reale, la funzione $g = \alpha\, |f_0 - h|^{p-2}(f_0 - h)$ è un elemento di $L^{p'}(X)$ e si ha:

$$\begin{aligned} \int_X g\, f\, d\mu \quad &= \quad \lambda \int_X g\,(f_0 - h)\, d\mu + \int_E g\, k\, d\mu = \alpha\lambda \int_X |f_0 - h|^p d\mu = \\ &\alpha\, \frac{\|f_0 - h\|_p^p}{L(f_0)}\, L(f), \end{aligned}$$

la penultima uguaglianza segue dalla proprietà (5.27).

Scegliendo $\alpha = L(f_0)/\|f_0 - h\|_p^p$, si ottiene dunque che

$$L(f) = \int_X g\, f\, d\mu = L_g(f),$$

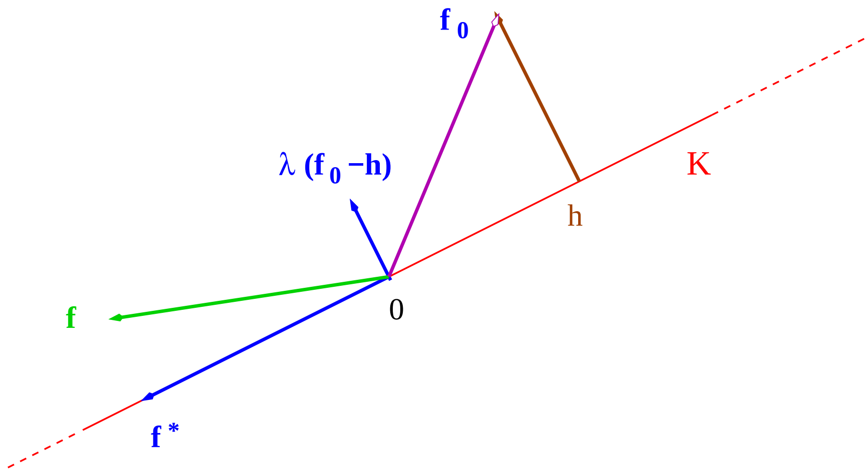

Figura 4. La costruzione nella dimostrazione del Teorema 5.7.1.

dove

$$g = \frac{L(f_0)}{\|f_0 - h\|_p^p} \, |f_0 - h|^{p-2}(f_0 - h).$$

La funzione g è univocamente determinata. Infatti, se $g' \in L^{p'}(X)$ fosse un'altra funzione che rappesenta L, si avrebbe $L_g = L_{g'}$ e cioè

$$\int_X (g - g') \, f \, d\mu = 0 \quad \text{per ogni } f \in L^p(X);$$

scegliendo $f = |g - g'|^{p'-2}(g - g')$, si ottiene allora che $\|g - g'\|_{p'}^{p'} = 0$ e quindi che $g' = g$ in $L^{p'}(X)$.

Se $p = 1$, supponiamo dapprima che $\mu(X) < \infty$. In questo caso, $L^p(X) \subset L^1(X)$ per ogni $p > 1$ e quindi, se $L \in L^1(X)'$, si ha che $L \in L^p(X)'$ per ogni $p > 1$, dato che

$$|L(f)| \le \|L\| \|f\|_1 \le \|L\| \; \mu(X)^{1/p'} \|f\|_p, \tag{5.28}$$

per la disuguaglianza di Hölder. Dalla dimostrazione appena conclusa segue che esiste una sola $g_p \in L^{p'}(X)$ tale che $L(f) = L_{g_p}(f) = \int_X g_p \, f \, d\mu$ per ogni $f \in L^p(X)$. È chiaro che g_p non dipende da p, infatti se $q > p$ allora esiste $g_q \in L^{q'}(X)$ tale che $L = L_{g_q}$ su $L^q(X)$. Dato che $L^q(X) \subset L^p(X)$, si ha:

$$0 = L_{g_p} - L_{g_q} = L_{g_p - g_q} \quad \text{su} \quad L^q(X).$$

Scegliendo $f = |g_p - g_q|^{q'-2}(g_p - g_q)$, risulta che $f \in L^q(X)$ e quindi

$$0 = L_{g_p - g_q}(f) = \|g_p - g_q\|_{q'}^{q'},$$

cioè $g_q = g_p$. Dunque possiamo supporre che $g_p = g$, ossia che $L = L_g$ su ogni $L^p(X)$ con $p > 1$.

Presa $f = |g|^{p'-2}g$, risulta che $f \in L^p(X)$ e dalla (5.28) segue che

$$\int_X |g|^{p'} d\mu = L(f) \le \mu(X)^{1/p'} \|L\| \|g\|_{p'}^{p'-1}$$

e quindi che $\|g\|_{p'} \le \mu(X)^{1/p'} \|L\|$ per ogni $p > 1$. Se $p \to 1$, allora $p' \to \infty$ e quindi

$$\|g\|_\infty = \lim_{p' \to +\infty} \|g\|_{p'} \le \|L\|,$$

cioè $g \in L^\infty(X)$ e $L = L_g$ su ogni $L^p(X)$ con $p > 1$.

Se ora $f \in L^1(X)$, ponendo

$$f_n = f \ \mathcal{X}_{\{x \in X:\, |f(x)| \le n\}},$$

$f_n \to f$ q.o. e $|f_n| \le |f|$ in X; per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, $f_n \to f$ in $L^1(X)$. Allo stesso modo $gf_n \to gf$ in $L^1(X)$. Inoltre $f_n \in L^p(X)$. Dunque, possiamo concludere che

$$L(f) = \lim_{n \to \infty} L(f_n) = \lim_{n \to \infty} \int_X g\, f_n \, d\mu = \int_X g\, f\, d\mu,$$

dove la prima uguaglianza vale perché L è continuo su $L^1(X)$.

Se infine $m(X) = \infty$, poniamo $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} f \ \mathcal{X}_{E_k}$ con $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$, dove E_k sono misurabili, a due a due disgiunti e di misura finita.

Se $L \in L^1(X)'$, allora il funzionale L_k definito da $L_k(f) = L(f \ \mathcal{X}_{E_k})$ per $f \in L^1(E_k)$ è un elemento di $L^1(E_k)'$. Per quanto dimostrato prima, esiste $g_k \in L^\infty(E_k)$ tale che

$$L_k(f) = \int_{E_k} f\, g_k \, d\mu$$

per ogni $f \in L^1(E_k)$. Inoltre, poiché

$$|L_k(f)| = |L(f \ \mathcal{X}_{E_k})| \le \|L\| \|f\|_{1,E_k}$$

per ogni $f \in L^1(E_k)$, si ottiene che

$$\|g_k\|_\infty = \|L_k\| = \sup\Big\{ \int_{E_k} f\, g_k \, d\mu : \|f\|_{1,E_k} \le 1 \Big\} \le \|L\|$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Sia $g = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k \ \mathcal{X}_{E_k}$; g è misurabile e

$$\|g\|_\infty \le \sup_{k \in \mathbb{N}} \|g_k\|_\infty \le \|L\|.$$

Infine

$$\begin{aligned}\int_X g\, f\, d\mu &= \int_X \sum_{k\in\mathbb{N}} g\, \mathcal{X}_{E_k}\, f\, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{E_k} g_k\, f\, d\mu \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} L(f\ \mathcal{X}_{E_k}) = L\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}} f\ \mathcal{X}_{E_k}\Big) \\ &= L(f),\end{aligned}$$

per l'additività numerabile della misura. □

Esempio 5.7.2. Siamo ora in grado di costruire un esempio di successione che converge debolmente ma non fortemente. La successione $f_n = \mathcal{X}_{[n,n+1]}$ converge debolmente ad $f = 0$ in $L^2(0,\infty)$.

Infatti, per il Teorema 5.7.1 ogni funzionale lineare L su $L^2(0,\infty)$ si può rappresentare con una funzione $g \in L^2(0,\infty)$ e quindi $L(f_n) = \int_n^{n+1} g\ dx \to 0$ se $n \to \infty$, per il Teorema della Convergenza Dominata, 4.7.3 dato che $|\int_n^{n+1} g\ dx| \le \int_n^{n+1} g^2 dx$. D'altra parte $\|f_n - f\|_2 = \|f_n\|_2 = 1$ che non converge a zero.

5.8. Sottoinsiemi densi in $L^p(E)$

Una strategia molto fruttuosa per dimostrare proprietà delle funzioni negli spazi L^p consiste nel dimostrare tali proprietà per funzioni più regolari, sfruttando poi il fatto che tali funzioni approssimano le funzioni L^p con precisione arbitraria. In questo paragrafo, E indicherà un sottoinsieme misurabile in $\mathbb{R}^N$.

Teorema 5.8.1. (Le funzioni semplici sono dense in L^p) *Sia $f \in L^p(E)$ con $1 \le p \le \infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $s \in L^p(E)$ tale che $\|f - s\|_p < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Si può supporre che $f \ge 0$, dato che $f = f^+ - f^-$. Poiché f è misurabile e non negativa, esiste una successione crescente di funzioni semplici e non negative s_n che converge ad f puntualmente q.o. in E.

Sia $1 \le p < \infty$; allora $(f - s_n)^p \to 0$ q.o. in E e $(f - s_n)^p \le f^p$ con f^p sommabile in E. Per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, risulta che $\|f - s_n\|_p^p = \int_E (f - s_n)^p\ dx \to 0$ se $n \to \infty$.

Se $p = \infty$, detto $E_* = \{x \in E : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$, risulta che $m(E_*) = 0$ ed inoltre f è limitata in $E \setminus E_*$. Per come s_n è stata costruita, s_n converge uniformemente ad f in $E \setminus E_*$; perciò:

$$\|f - s_n\|_\infty = \sup_{E\setminus E_*} (f - s_n) \to 0$$

se $n \to \infty$. □

Teorema 5.8.2. (Le funzioni continue sono dense in L^p) *Sia* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 \leq p < \infty$. *Per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una funzione* g *continua in* $\mathbb{R}^N$ *e nulla fuori di un compatto tale che* $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Dimostrazione. Possiamo supporre che $f \geq 0$ come prima. Inoltre, possiamo supporre che f sia nulla fuori di una pallina, dato che la successione $f\ \mathcal{X}_{B(0,n)}$ converge ad f in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Possiamo ancora supporre che f sia semplice: $f = \sum_{k=1}^{n} c_k\ \mathcal{X}_{E_k}$ dove gli insiemi misurabili E_k sono a due a due disgiunti (e limitati). Basterà allora costruire per ogni k una funzione continua ed a supporto compatto g_k che approssimi $\mathcal{X}_{E_k}$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per meno di ε; infatti, la funzione $g = \sum_{k=1}^{n} c_k\ g_k$ approssimerà f in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per meno di $\varepsilon \sum_{k=1}^{n} |c_k|$, dato che

$$\|f - g\|_p = \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k\ (\mathcal{X}_{E_k} - g_k) \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k|\ \|\mathcal{X}_{E_k} - g_k\|_p < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Poiché E_k è misurabile e limitato, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso $K \subseteq E_k$ ed un aperto limitato $A \supseteq E_k$ tali che $m(A) - m(K) < \varepsilon$.

Sia $g_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definita per $x \in \mathbb{R}^N$ da

$$g_k(x) = \frac{\text{dist }(x, \mathbb{R}^N \setminus A)}{\text{dist }(x, \mathbb{R}^N \setminus A) + \text{dist }(x, K)};$$

allora g_k è continua, $0 \leq g_k \leq 1$, $g_k \equiv 1$ su K e $g_k \equiv 0$ fuori di A.

Risulta allora:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_{E_k} - g_k\|_p^p &= \int_A |\mathcal{X}_{E_k} - g_k|^p dx = \int_{A \setminus K} |\mathcal{X}_{E_k} - g_k|^p dx \leq m(A \setminus K) = \\ & m(A) - m(K) < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Uno spazio topologico si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile denso.

Teorema 5.8.3. ($L^p(E)$ è separabile) *Esiste un insieme numerabile* $\mathcal{F} = \{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *di funzioni* $\phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *tali che, fissati un insieme misurabile* $E \subseteq \mathbb{R}^N$, *un numero* $p \in [1, \infty)$, *una funzione* $f \in L^p(E)$ *ed un numero* $\varepsilon > 0$, *esiste* $\phi_n \in \mathcal{F}$ *tale che* $\|f - \phi_n\|_{p,E} < \varepsilon$.

Dimostrazione. Basta dimostrare la tesi per $E = \mathbb{R}^N$, dato che possiamo considerare come di solito $f\ \mathcal{X}_E$ se $f \in L^p(E)$.

Sia $\mathbb{Z}^N$ il reticolo dei punti di $\mathbb{R}^N$ a coordinate intere e sia $\mathcal{Q}$ la famiglia (numerabile) dei cubi

$$Q_{m,n} = \{x \in \mathbb{R}^N : 2^{-n} m_i < x_i \le 2^{-n}(m_i + 1), i = 1, \dots, N\},$$

dove $n \in \mathbb{N}$ ed $m = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{Z}^N$. Si noti che $\mathbb{R}^N = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{Z}^N} Q_{m,n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato.

Sia ora $\mathcal{F}_n$ la famiglia delle funzioni ϕ costanti a tratti con valori razionali su ogni $Q_{m,n}$ e che si annullano fuori dal cubo $\mathcal{C}_n = [-2^n, 2^n]^N$; $\mathcal{F}_n$ è numerabile, perché famiglia numerabile di famiglie numerabili. Per la stessa ragione, $\mathcal{F} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ è numerabile.

Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 5.8.2, esiste g continua in $\mathbb{R}^N$ e nulla fuori di un compatto tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$; basta quindi trovare $\phi_n \in \mathcal{F}$ tale che $\|g - \phi_n\|_p < 2\varepsilon/3$. Sia $\nu \in \mathbb{N}$ tale che g sia nulla fuori di $\mathcal{C}_\nu$. Essendo g uniformemente continua in $\mathbb{R}^N$, per ogni $\eta > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|g(x) - g(y)| < \eta \quad \text{per ogni} \quad x, y \in \mathbb{R}^N \text{ tali che } \quad |x - y| < \delta.$$

Per ogni intero $n \ge \nu$, sia ψ la funzione definita

$$\psi = \sum_{Q_{n,m} \subset \mathcal{C}_\nu} c_{n,m}\, \mathcal{X}_{Q_{n,m}}, \quad \text{con} \quad c_{n,m} = 2^{-nN} \int_{Q_{m,n}} g\, dy,$$

cioè ψ su $Q_{m,n}$ è uguale al valor medio di g su $Q_{m,n}$. Si noti anche che $\psi \equiv 0$ fuori di $\mathcal{C}_\nu$.

Perciò, se $n \ge \nu$ è così grande che $2^{-n}\sqrt{N} < \delta$, risulta che

$$|g(x) - c_{n,m}| \le 2^{-nN} \int_{Q_{m,n}} |g(x) - g(y)|\, dy < \eta \quad \text{su} \quad Q_{n,m}$$

e quindi $|g - \psi| < \eta$ su $\mathbb{R}^N$; pertanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g - \psi|^p\, dx = \int_{\mathcal{C}_\nu} |g - \psi|^p\, dx \le \eta^p\, 2^{N(K+1)};$$

basta quindi scegliere $0 < \eta < 2^{-N(K+1)/p}\varepsilon/3$ per avere che $\|g - \psi\|_p < \varepsilon/3$.

Infine, dato che ψ ha in generale valori reali, scegliamo $\phi \in \mathcal{F}$ (a valori razionali) così:

$$\phi = \sum_{Q_{n,m} \subset \mathcal{C}_\nu} q_{n,m}\, \mathcal{X}_{Q_{n,m}} \quad \text{con} \quad q_{n,m} \in \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad |q_{n,m} - c_{n,m}| < \eta;$$

si avrà dunque che $\|\psi - \phi\|_p < \varepsilon/3$.

Concludendo, fissato $\varepsilon > 0$ abbiamo trovato $\phi \in \mathcal{F}$ tale che

$$\|f - \phi\|_p \le \|f - g\|_p + \|g - \psi\|_p + \|\psi - \phi\|_p < \varepsilon.$$

Perciò $\mathcal{F}$ è densa in $L^p(\mathbb{R}^N)$ e quindi $L^p(\mathbb{R}^N)$ è separabile. $\square$

Il caso in cui $p = \infty$ è differente.

Proposizione 5.8.4. *$L^\infty(\mathbb{R}^N)$ non è separabile.*

Dimostrazione. (i) Sia $\{E_r\}_{r\in\mathbb{R}_+}$ una famiglia (non numerabile) di insiemi misurabili tali che $m(E_r \Delta E_s) > 0$ per ogni $r, s > 0$ con $r \neq s$ (qui il simbolo Δ indica la differenza simmetrica dei due insiemi). Per esempio, basta scegliere $E_r = Q(0, r)$.

(ii) Per $r > 0$, sia $\mathcal{O}_r = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) : \|f - \mathcal{X}_{E_r}\|_\infty < \frac{1}{2}\}$. La famiglia di aperti $\mathcal{O}_r$ è non numerabile ed inoltre, per ogni $r, s > 0$ con $r \neq s$ si ha che $\mathcal{O}_r \cap \mathcal{O}_s = \varnothing$, dato che, se $f \in \mathcal{O}_r$, allora

$$\begin{aligned}\|f - \mathcal{X}_{E_s}\|_\infty &= \|\mathcal{X}_{E_r} - \mathcal{X}_{E_s} + f - \mathcal{X}_{E_r}\|_\infty \geq \\ &\quad \|\mathcal{X}_{E_r} - \mathcal{X}_{E_s}\|_\infty - \|f - \mathcal{X}_{E_r}\|_\infty > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

cioè $f \notin \mathcal{O}_s$.

(iii) L'esistenza della famiglia $\{\mathcal{O}_r\}_{r\in\mathbb{R}_+}$ implica che $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ non è separabile. In caso contrario, se $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fosse una famiglia densa in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $r > 0$ esisterebbe un intero $n(r)$ tale che $\|\mathcal{X}_{E_r} - \phi_{n(r)}\|_\infty < \frac{1}{2}$, cioè tale che $\phi_{n(r)} \in \mathcal{O}_r$.

L'applicazione $\mathbb{R} \ni r \mapsto n(r) \in \mathbb{N}$ è iniettiva; infatti se per $r \neq s$ fosse $n(r) = n(s)$, allora $\phi_{n(r)} = \phi_{n(s)} \in \mathcal{O}_r \cap \mathcal{O}_s = \varnothing$. Dunque, $\mathbb{R}_+$ sarebbe al più numerabile, perché in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.

Costa poco adattare questa dimostrazione al caso in cui $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile. $\square$

5.9. Approssimazione con funzioni regolari

5.9.1. Convoluzioni. Siano $f, g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$; definiamo la loro *convoluzione* con

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\, dy = g \star f(x) \tag{5.29}$$

per $x \in \mathbb{R}^N$ ogni volta che l'integrale sia convergente.

Osservazione 5.9.1. (i) È chiaro che se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ allora $f \star g$ è ben definita e limitata per la disuguaglianza di Hölder (5.4).

(ii) Si può indebolire l'ipotesi di (i) al punto da poter dimostrare che se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ allora $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ con

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

Questo risultato passa sotto il nome di *disuguaglianza di Young* per le convoluzioni. Per esempio, se $p = q = 1$, allora $r = 1$.

Nel Teorema 5.9.2 dimostreremo la disuguaglianza di Young quando $q = 1$ (e quindi $r = p$).

(iii) Euristicamemte, una convoluzione è una somma pesata di traslazioni: se, per $y \in \mathbb{R}^N$, definiamo la *traslazione* $\mathcal{T}_y : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ con

$$(\mathcal{T}_y f)(x) = f(x - y), \tag{5.30}$$

risulta che

$$f \star g = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{T}_y f \; g \; dy.$$

Teorema 5.9.2. *Se* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *ed* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *per qualche* $p \in [1, \infty)$, *risulta che* $g \star f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e sussiste la disuguaglianza di Young:*

$$\|g \star f\|_p \le \|g\|_1 \|f\|_p.$$

Dimostrazione. Risulta:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |g \star f|^p dx \;\; &\le \;\; \int_{\mathbb{R}^N} dx \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)||f(x-y)| \; dy \right)^p = \\
&\int_{\mathbb{R}^N} dx \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^{1/p'} |g(y)|^{1/p} |f(x-y)| \; dy \right)^p \le \\
&\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \; dy \right)^{p/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \; |f(x-y)|^p \; dy \right) \; dx
\end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g \star f|^p dx \le \|g\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \; |f(x-y)|^p \; dy \right) \; dx; \tag{5.31}$$

applicando il Teorema di Fubini 4.8.7 nella (5.31) ed il fatto che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p \; dy = \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|^p \; dy = \|f\|_p^p,$$

si ottiene pertanto:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g \star f|^p dx \le \|g\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^p dx \right) dy = \|g\|_1^p \|f\|_p^p,$$

da cui segue la tesi. □

Osservazione 5.9.3. Possiamo sempre definire la convoluzione di funzioni definite su un qualsiasi insieme misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$. Infatti, se $g \in L^1(E)$ ed $f \in L^p(E)$, poniamo:

$$g \star f = g \star (f \mathcal{X}_E).$$

Con questa definizione, il Teorema 5.9.2 implica:

$$\begin{aligned}\|g\star f\|_{p,E}^p &= \int_E |g\star(f\mathcal{X}_E)|^p dx \leq \\ &\int_{\mathbb{R}^N} |g\star(f\mathcal{X}_E)|^p dx \leq \|g\|_1^p \|f\mathcal{X}_E\|_{p,\mathbb{R}^N}^p = \\ &\|g\|_1^p\|f\|_{p,E}^p.\end{aligned}$$

Perciò vale il Teorema 5.9.2 anche se $f \in L^p(E)$.

5.9.2. Mollificatori. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Introduciamo le seguenti notazioni:

$C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ continua in } \Omega\}$;
$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f\ k\text{-volte differenziabile con continuità in } \Omega\}$;
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega)$;
$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$, se $f \in C(\Omega)$;
$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) : f = 0 \text{ fuori di qualche compatto } K \subset \Omega\}$;
$C_0^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_0(\Omega)$;
$C_0^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$.

Infine, si dice che α è un *multi-indice* se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}^N$ con $\alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, N$; si pone allora $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$ e, se $f \in C^\infty(\Omega)$, si può definire una qualunque derivata parziale di ordine $|\alpha|$ di f come

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_N} x_N},\ x \in \Omega.$$

Un *mollificatore* è una famiglia ad un parametro $\varepsilon > 0$ di funzioni $j_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tali che:

$$\tag{5.32} \begin{gathered} \int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y)\, dy = 1, \quad \sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\, dy < \infty, \\ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, dy = 0 \ \text{ per ogni } \ \delta > 0. \end{gathered}$$

Osservazione 5.9.4. Sia $j \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\, dx = 1$; allora per $\varepsilon > 0$ la famiglia di funzioni

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} j(x/\varepsilon)$$

è un mollificatore. Infatti le proprietà (5.32) si dimostrano applicando il semplice cambio di variabile $y = \varepsilon\, x$ ed osservando che l'integrale nella terza proprietà diventa

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta/\varepsilon)} |j(y)|\, dy$$

e tende a zero per $\varepsilon \to 0^+$ per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3.

Teorema 5.9.5. *Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per qualche $p \in [1, \infty]$. Allora $j \star f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e risulta:*

$$D^\alpha (j \star f) = (D^\alpha j) \star f.$$

Dimostrazione. Questa asserzione segue dal Teorema 4.7.6 scegliendo

$$F(x, y) = j(x - y) f(y).$$

Infatti, se dobbiamo calcolare la derivata di $j \star f$ rispetto a x_k in un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$, basterà scegliere $A = B(x_0, \delta)$ per qualche $\delta > 0$ per ottenere che

$$\left| \frac{\partial F}{\partial x_k}(x, y) \right| \le |f(y)| \max_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{\partial j}{\partial x_k} \right| \mathcal{X}_K(y)$$

per $x \in A$, dove K è un compatto contenente l'insieme $\operatorname{supp}(j) + [-B(x_0, \delta)]$.[1] La funzione a secondo membro è sommabile, infatti

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f|\ \mathcal{X}_K\ dy \le m(K)^{1/p'} \|f\|_p\ ;$$

quindi possiamo applicare il Teorema 4.7.6 ed ottenere il risultato voluto. La formula per le derivate successive si ottiene quindi per induzione sul numero di derivate parziali. □

Ciascun elemento di una famiglia di funzioni $j_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ che soddisfano le proprietà (5.32) si dice un *nucleo mollificatore.*

Esempio 5.9.6. Un esempio di funzione in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ è dato da:

$$j(x) = \begin{cases} c\ \exp\left\{\frac{1}{|x|^2-1}\right\} & \text{se} \quad |x| < 1, \\ 0 & \text{se} \quad |x| \ge 1. \end{cases}$$

Si può chiaramente scegliere la costante c in modo che $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\ dx = 1$.

5.9.3. Approssimazione. Incominciamo con il seguente importante lemma.

Lemma 5.9.7. *Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \le p < \infty$. Allora*

$$\sup_{|h|<\delta} \|\mathcal{T}_h f - f\|_p \to 0 \quad \textit{se} \quad \delta \to 0^+.$$

[1] Se I e J sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ allora si definisce $I + J = \{i + j : i \in I, j \in J\}$.

Dimostrazione. (i) Sia $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$; per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha che

$$|\mathcal{T}_h f(x) - f(x)|^p = |f(x-h) - f(x)|^p \to 0 \quad \text{se} \quad |h| \to 0.$$

Inoltre,

$$|\mathcal{T}_h f(x) - f(x)|^p \le (|\mathcal{T}_h f(x)| + |f(x)|)^p \le 2^p \|f\|_\infty^p$$

e, se $K = \overline{\text{supp}(f)}$ ed $|h| < \delta$, si ha che $|\mathcal{T}_h f - f|^p$ è nulla fuori dell'insieme $K_\delta = K + \overline{B(0,\delta)}$. Perciò

$$|\mathcal{T}_h f - f|^p \le 2^p \|f\|_\infty^p \mathcal{X}_{K_\delta}$$

e la funzione a secondo membro è sommabile in $\mathbb{R}^N$; per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, si conclude.

(ii) Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon/3$. Preso $\delta > 0$ tale che $\|\mathcal{T}_h g - g\|_p < \varepsilon/3$ per $|h| < \delta$, otteniamo che

$$\|\mathcal{T}_h f - f\|_p \le \|\mathcal{T}_h f - \mathcal{T}_h g\|_p + \|\mathcal{T}_h g - g\|_p + \|g - f\|_p < \varepsilon$$

per ogni $|h| < \delta$, dato che $\|\mathcal{T}_h f - \mathcal{T}_h g\|_p = \|\mathcal{T}_h (f-g)\|_p = \|f - g\|_p$. □

Teorema 5.9.8. (Approssimazione in norma) *Supponiamo che le funzioni j_ε soddisfino le proprietà* (5.32).

(i) Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per qualche $p \in [1,\infty)$. Allora $j_\varepsilon \star f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0^+$.

(ii) Sia f uniformemente continua e limitata in $\mathbb{R}^N$. Allora $j_\varepsilon \star f \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$.

Dimostrazione. (i) Poiché $\int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y)\, dy = 1$, allora

$$j_\varepsilon \star f(x) - f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y)[f(x-y) - f(x)]\, dy.$$

Sostituendo $f(x-y) - f(x)$ al posto di $f(x-y)$ e j_ε al posto di g nella (5.31), otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon \star f - f|^p dx \;\le\; \|j_\varepsilon\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) dy =$$
$$\|j_\varepsilon\|_1^{p/p'} \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\; \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p \, dy$$

Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\; \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p \, dy =$$
$$\int_{B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\; \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p \, dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\; \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p \, dy \le$$
$$\sup_{|y|<\delta} \|\mathcal{T}_y f - f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\, dy + 2^p \|f\|_p^p \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, dy,$$

per ogni $\delta > 0$.

La conclusione allora segue dal Lemma 5.9.7 e dalla seconda e terza proprietà in (5.32).

(ii) Sia $\omega(f, \delta)$ il modulo di continuità definito in (1.4). In modo analogo a prima abbiamo:

$$|j_\varepsilon \star f(x) - f(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)||f(x-y) - f(x)|\, dy =$$

$$\int\limits_{B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, |f(x-y) - f(x)|\, dy + \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, |f(x-y) - f(x)|\, dy \leq$$

$$\omega(f, \delta) \int_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon(y)|\, dy + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\delta)} |j_\varepsilon(y)|\, dy.$$

Si conclude con le stesse argomentazioni di prima. □

Osservazione 5.9.9. Si osservi che, se $f \in L^p(E)$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \|j_\varepsilon \star f - f\|^p_{p,E} &= \int\limits_E |j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_E) - f|^p dx = \int\limits_E |j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_E) - f\mathcal{X}_E|^p dx \leq \\ & \int\limits_{\mathbb{R}^N} |j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_E) - f\mathcal{X}_E|^p dx = \\ & \|j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_E) - f\mathcal{X}_E\|^p_{p,\mathbb{R}^N}, \end{aligned}$$

e questo tende a zero se $\varepsilon \to 0^+$ dato che $f\mathcal{X}_E \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Inoltre, se Ω è aperto ed $f \in L^p(\Omega)$, allora $j_\varepsilon \star (f\mathcal{X}_\Omega) \in C^\infty(\Omega)$ per il Teorema 5.9.5.

Questa osservazione ed i Teoremi 5.9.5 e 5.9.8 implicano senz'altro il seguente risultato notevole.

Corollario 5.9.10. (Approssimazione con funzioni C^∞) *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un insieme aperto.*

Allora l'insieme $C^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ nella topologia della norma.

Esempio 5.9.11. Sia $f = \mathcal{X}_\mathbb{Q}$; è chiaro che $\overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, mentre $f = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}$.

È evidente che la definizione di supporto che abbiamo dato per una funzione continua non è molto utile per la funzione $\mathcal{X}_\mathbb{Q}$.

Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e sia $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R}^N : A \text{ aperto e } f = 0 \text{ q.o. in } A\}$. Definiamo il *supporto essenziale di* f l'insieme

$$\operatorname{supp}(f) = \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A \right).$$

D'ora in poi $\operatorname{supp}(f)$ indicherà il supporto essenziale di f che, se f è continua, coincide con il supporto ordinario.

Si noti che $\operatorname{supp}(f)$ è ben definito; infatti, anche se la famiglia $\mathcal{F}$ non fosse numerabile, esiste una base numerabile di aperti O_n tale che, se $A \in \mathcal{F}$, allora $A = \bigcup_{n \in J_A} O_n$, per qualche sottoinsieme J_A di $\mathbb{N}$. Se $f = 0$ q.o. in A, allora $f = 0$ q.o. in ogni O_n con $n \in J_A$ e quindi

$$\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} \bigcup_{n \in J_A} O_n = \bigcup_{n \in J} O_n,$$

dove $J = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} J_A$ è numerabile, essendo $J_A \subseteq \mathbb{N}$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

Proposizione 5.9.12. *(i) Se $f_1 = f_2$ q.o. in $\mathbb{R}^N$ allora* $\operatorname{supp}(f_1) = \operatorname{supp}(f_2)$.

(ii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\operatorname{supp}(f \star g) \subseteq \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}.$$

Dimostrazione. (i) È chiaro che $f_1 = 0$ q.o. in A se e solo se $f_2 = 0$ q.o. in A e quindi $\operatorname{supp}(f_1) = \operatorname{supp}(f_2)$.

(ii) Sia A il complementare di $\overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)}$; A è aperto e, se $x \in A$, risulta che l'insieme $B = (x - \operatorname{supp}(f)) \cap \operatorname{supp}(g)$ è vuoto. Perciò

$$\int_A |f \star g(x)| \, dx \leq \int_A \left(\int_B |f(x-y) \, g(y)| \, dy \right) dx = 0.$$

Quindi $\operatorname{supp}(f \star g)$ è contenuto nel complementare di A. $\square$

Osservazione 5.9.13. Se f e g hanno supporto limitato, allora anche $f \star g$ ha supporto limitato.

Teorema 5.9.14. (Approssimazione con funzioni C_0^∞) *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Allora lo spazio $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.*

In altre parole, fissata una funzione $f \in L^p(\Omega)$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ come nell'Esempio 5.9.6. Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $j_n(x) = n^N j(nx)$; risulta che $\operatorname{supp}(j_n) \subseteq \overline{B(0, 1/n)}$. Data $f \in L^p(\Omega)$, consideriamo

$$g_n = f \, \mathcal{X}_{\Omega_n},$$

dove $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}\,(x, \partial\Omega) \geq \frac{2}{n} \text{ e } |x| \leq n\}$; si ha che $\operatorname{supp}(g_n) \subseteq \Omega_n$.

Posto $f_n = j_n \star g_n$, abbiamo che $f_n \in C^\infty(\Omega)$, per il Teorema 5.9.2, ed inoltre $\text{supp}(f_n) \subseteq \overline{B(0,1/n) + \Omega_n} \subset \Omega$, per la Proposizione 5.9.12. Dunque $f_n \in C_0^\infty(\Omega)$ e si ha che

$$\begin{aligned}\|f_n - f\|_{p,\Omega} &= \|f_n - f\,\mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq \\ &\|j_n \star g_n - j_n \star (f\,\mathcal{X}_\Omega)\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_n \star (f\,\mathcal{X}_\Omega) - f\,\mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq \\ &\|g_n - f\,\mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_n \star (f\,\mathcal{X}_\Omega) - f\,\mathcal{X}_\Omega\|_{p,\mathbb{R}^N}.\end{aligned}$$

Il primo addendo converge a zero per il Teorema della Convergenza Dominata 4.7.3, mentre il secondo converge a zero per il Teorema 5.9.2, dato che $f\,\mathcal{X}_\Omega \in L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Con idee analoghe a quelle finora esposte in questo paragrafo, dimostriamo il seguente teorema di approssimazione uniforme.

Teorema 5.9.15. *Sia $f \in C_0^0(\mathbb{R}^N)$. Allora esiste una successione di polinomi P_n che convergono ad f uniformemente sul supporto di f.*

Dimostrazione. A meno di traslazioni e dilatazioni, possiamo supporre che il supporto S di f sia contenuto in $Q(0,1/2)$, il cubo centrato nell'origine, con semilato lungo $1/2$ e con lati paralleli agli assi coordinati.

Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo:

$$p_n(y) = \alpha_n^{-N} \prod_{i=1}^N (1 - y_i^2)^n, \quad \alpha_n = \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt.$$

Le funzioni p_n, se si estendono con zero fuori di $Q(0,1)$, sono non negative, di classe $C_0^{n-1}(\mathbb{R}^N)$ ed, in $Q(0,1)$, sono polinomi; la scelta di α_n ci dice inoltre che

$$\int_{Q(x,1)} p_n(x-y)\,dy = \int_{Q(0,1)} p_n(y)\,dy = 1$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Definiamo ora i *polinomi di Stieltjes* relativi ad f come:

$$P_n(x) = \int_{Q(0,1)} p_n(x-y) f(y)\,dy;$$

risulta:

$$P_n(x) - f(x) = \int_{Q(0,1)} p_n(x-y) f(y)\,dy - \int_{Q(x,1)} p_n(x-y) f(x)\,dy.$$

Per ogni $x \in S$, se scegliamo $\delta > 0$ tale che $Q(x,\delta) \subset Q(0,1)$, possiamo scrivere:

$$|P_n(x) - f(x)| \le \int_{Q(x,\delta)} p_n(x-y)|f(y) - f(x)|\,dy +$$
$$\left|\int_{Q(0,1)\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y)f(y)\,dy\right| + \left|\int_{Q(x,1))\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y)f(x)\,dy\right|$$

e quindi

$$|P_n(x) - f(x)| \le \omega(f, \delta\sqrt{N}) +$$
$$\max_{\mathbb{R}^N} |f| \left\{ \int_{Q(0,1)\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y)\,dy + \int_{Q(x,1)\setminus Q(x,\delta)} p_n(x-y)\,dy \right| .$$

I due integrali a secondo membro si maggiorano tenedo conto che $x - y \notin Q(0,\delta)$ dato che $y \notin Q(x,\delta)$: esiste quindi $i \in \{1,\dots,N\}$ tale che $|x_i - y_i| \ge \delta/\sqrt{N}$ e quindi

$$p_n(x-y) \le \alpha_n^{-N}(1-\delta^2/N)^n \le 2^{-N}(n+1)^N(1-\delta^2/N)^n,$$

essendo

$$\alpha_n \ge 2\int_0^1 (1-t)^n\,dt = 2/(n+1).$$

In conclusione:

$$|P_n(x) - f(x)| \le \omega(f, \delta\sqrt{N}) + 2\max_{\mathbb{R}^N}|f|\,(n+1)^N(1-\delta^2/N)^n, \quad x \in S;$$

questa disuguaglianza implica che P_n converge ad f uniformemente in S. □

Il teorema appena dimostrato è un caso particolare del più generale *teorema di approssimazione di Weierstrass.*

Teorema 5.9.16. (Weierstrass) *Sia E un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua su E.*

Esiste allora una successione di polinomi P_n che converge uniformemente ad f su E.

Dimostrazione. La dimostrazione segue le linee di quella del teorema precedente osservando che, per il Teorema di estensione 1.5.1, si può supporre che f sia uniformemente continua su tutto $\mathbb{R}^N$. □

Corollario 5.9.17. *Sia K un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$. Lo spazio di Banach $C(K)$ delle funzioni continue su K con la norma del massimo è separabile.*

Dimostrazione. La famiglia dei polinomi nelle variabili $x_1,\dots,x_N$ con coefficienti razionali è una famiglia numerabile e, per il Teorema 5.9.16, è denso in $C(K)$. □

5.10. Il teorema di Banach-Alaoglu

Esempio 5.10.1. I sottoinsiemi limitati di $L^p(E)$ non sono in generale relativamente compatti nella topologia indotta dalla norma.

Per esempio, per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 2\pi]$. Risulta che

$$\int_0^{2\pi} f_n(x)^2 dx = \pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} f_n(x) f_m(x)\, dx = 0 \quad \text{per} \quad n \neq m.$$

Ne segue che

$$\|f_n - f_m\|^2_{L^2[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = 2\pi$$

se $n \neq m$. Quindi, pur essendo $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in norma, ogni sua sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ non può convergere perché non è di Cauchy.

Il seguente teorema ci assicura però che gli insiemi limitati sono compatti nella topologia della convergenza debole.

Teorema 5.10.2. (Banach-Alaoglu) *Sia E un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ e sia $1 < p < \infty$. Sia c una costante non negativa tale che*

$$\|f_n\|_p \leq c, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente in $L^p(E)$ ad una funzione $f \in L^p(E)$.

Dimostrazione. Per il Teorema 5.7.1, ad ogni elemento L del duale $L^p(E)'$ di $L^p(E)$ corrisponde univocamente una funzione $g \in L^{p'}(E)$; inoltre $L^{p'}(E)$ è uno spazio separabile, cioè esiste una famiglia $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ numerabile densa in $L^{p'}(E)$.

Consideriamo allora la successione di numeri $\int_E f_n\, \phi_1\, dx$; essa è limitata, perché

$$\left| \int_E f_n\, \phi_1\, dx \right| \leq \|f_n\|_p \|\phi_1\|_{p'} \leq c\, \|\phi_1\|_{p'}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, e quindi contiene una sottosuccessione convergente, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass. Esiste perciò una successione $\{f^1_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ estratta da $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\int_E f^1_n\, \phi_1\, dx$ converge ad un numero reale.

Ripetendo questo argomento sulla successione di numeri $\int_E f^1_n\, \phi_2\, dx$, possiamo dimostrare che esiste una sottosuccessione $\{f^2_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f^1_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\int_E f^2_n\, \phi_2\, dx$ converge ad un numero reale.

Iterando il ragionamento, possiamo affermare che, fissato $k \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{f^k_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f^{(k-1)}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cdots \subset \{f^1_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\int_E f^k_n\, \phi_k\, dx$ converge ad un numero reale. È chiaro che $\{f^j_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$

$\{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ se $j \geq k$, e quindi la successione di funzioni $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha la proprietà che la successione numerica $\int_E f_n^n \ \phi_k \ dx$ converge per ogni intero k e dunque è una successione di Cauchy per ogni k.

Definiamo allora il funzionale $L : L^{p'}(E) \to \mathbb{R}$ con la formula:

$$L(g) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n^n \ g \ dx, \ \ g \in L^{p'}(E).$$

Il funzionale L è ben definito dato che la successione $\int\limits_E f_n^n \ g \ dx$ è di Cauchy.

Infatti per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\begin{aligned}
&\Big|\int\limits_E f_n^n \ g \ dx - \int\limits_E f_m^m \ g \ dx\Big| \leq \Big|\int\limits_E f_n^n \ g \ dx - \int\limits_E f_n^n \ \phi_k \ dx\Big| + \\
&\Big|\int\limits_E f_n^n \ \phi_k \ dx - \int\limits_E f_m^m \ \phi_k \ dx\Big| + \Big|\int\limits_E f_m^m \ \phi_k \ dx - \int\limits_E f_m^m \ g \ dx\Big| \leq \\
&\|f_n\|_p\|g-\phi_k\|_{p'} + \Big|\int\limits_E f_n^n \ \phi_k \ dx - \int\limits_E f_m^m \ \phi_k \ dx\Big| + \|f_m\|_p\|g-\phi_k\|_{p'}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\Big|\int\limits_E f_n^n \ g \ dx - \int\limits_E f_m^m \ g \ dx\Big| \leq 2 \ c \ \|g-\phi_k\|_{p'} + \Big|\int\limits_E f_n^n \ \phi_k \ dx - \int\limits_E f_m^m \ \phi_k \ dx\Big|.$$

Ora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $\|g - \phi_k\|_{p'} < \varepsilon/4c$; in corrispondenza di questo k esiste ν tale che $\left|\int\limits_E f_n^n \ \phi_k \ dx - \int\limits_E f_m^m \ \phi_k \ dx\right| < \varepsilon/2$ per $n, m > \nu$. Perciò , se $n, m > \nu$ otteniamo che

$$\left|\int\limits_E f_n^n \ g \ dx - \int\limits_E f_m^m \ g \ dx\right| < 2c \ \frac{\varepsilon}{4c} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

È chiaro che L è lineare; inoltre L è limitato dalla costante c, dato che

$$\left|\int\limits_E f_n^n \ g \ dx\right| \leq c \ \|g\|_{p'}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Quindi $L \in L^{p'}(E)'$; esiste perciò $f \in L^p(E)$ tale che $L(g) = \int_E f \ g \ dx$ per ogni $g \in L^{p'}(E)$.

In conclusione, per ogni $g \in L^{p'}(E)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n^n \, g \, dx = \int_E f \, g \, dx,$$

se $n \to \infty$, cioè $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$. □

Esempio 5.10.3. In sostanza, oltre alla separabilità di $L^{p'}(E)$, abbiamo usato il fatto che, per $p \in (1, \infty)$, il duale di $L^{p'}(E)$ è $L^p(E)$. Questo teorema non è vero negli spazi $L^1(E)$ ed $L^\infty(E)$.

Si consideri, per esempio, la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f_n = n \, \mathcal{X}_{[0,1/n]}$. Risulta che $\|f_n\|_1 = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se una qualche sottosuccessione di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, indichiamola ancora con $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, convergesse debolmente ad una $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora f sarebbe nulla quasi ovunque. Sia infatti $[a, b]$ un intervallo limitato e sia $g = \operatorname{sgn}(f) \, \mathcal{X}_{\{x\in[a,b]:f(x)\neq 0\}}$; risulta che $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ e quindi

$$\int_a^b |f| \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n \, g \, dx.$$

Se $0 \notin [a, b]$, ne segue che $\int_a^b |f| \, dx = 0$; quindi $f = 0$ q.o. in ogni intervallo $[a, b]$ che non contiene 0 e dunque $f = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$.

D'altra parte, la funzione costante $g = 1$ è un elemento di $L^\infty(\mathbb{R})$; dato che $f_n \rightharpoonup 0$ si avrebbe allora che $\int_\mathbb{R} 1 \cdot f_n \, dx \to 0$, mentre $\int_\mathbb{R} 1 \cdot f_n \, dx = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

5.11. Criteri di compattezza forte

Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Ricordiamo che l'insieme $C(X)$ delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ continue (e limitate se X non fosse compatto) in X è uno spazio di Banach con la norma definita da

$$\|f\|_\infty = \max_X |f|.$$

In particolare, ogni successione uniformemente di Cauchy in X converge uniformemente in X.

Sia (X, d) uno spazio metrico completo; si dice che una successione di funzioni continue f_n è *equilimitata* in X se esiste una costante $c \geq 0$ tale che

$$|f_n(x)| \leq c \quad \text{per ogni} \quad x \in X \text{ ed } n \in \mathbb{N}.$$

Si dice che essa è *equicontinua* in X se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ tale che $d(x, y) < \delta$, risulta:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $\omega(f,\delta)$ indica il modulo di continuità di f definito da (1.4) con $E = X$, allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua in X se e solo se

$$\sup\{\omega(f_n,\delta) : n \in \mathbb{N}\} \to 0 \quad \text{per} \quad \delta \to 0^+.$$

Teorema 5.11.1. (Ascoli-Arzelà) *Sia (X,d) uno spazio metrico completo e separabile e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in X equilimitata ed equicontinua in X.*

Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge uniformemente in ogni insieme compatto $K \subset X$.

Dimostrazione. Poiché X è separabile, esiste una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ che è densa in X.

La successione di numeri $f_n(x_1)$ è evidentemente limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^1(x_1)$ converge per $n \to \infty$ ad un numero reale.

Anche $f_n^1(x_2)$ è limitata; possiamo quindi estrarre una sottosuccessione $\{f_n^2\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^2(x_2)$ converge per $n \to \infty$ ad un numero reale. Iterando il ragionamento, possiamo affermare che, fissato $k \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^{(k-1)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \cdots \subset \{f_n^1\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $f_n^k(x_k)$ converge ad un numero reale.

Osserviamo che, se $j \geq k$, risulta $\{f_n^j\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{f_n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi, per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato, la successione di funzioni $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è tale che $f_n^n(x_k)$ converge ad un numero reale e perciò è una successione di Cauchy.

Fissiamo ora $\varepsilon > 0$; poiché $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua in X, esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x, y \in X$ tale che $d(x,y) < \delta$, risulta:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sia ora $K \subset X$ un insieme compatto. Poiché gli x_k sono densi in X, K si può ricoprire con palline di raggio δ centrate negli x_k. Poiché K è compatto, possiamo dire che esistono $x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}$ tali che

$$K \subset \bigcup_{r=1}^{s} B(x_{k_r}, \delta).$$

Quindi, per ogni $x \in K$ esiste $r \in \{1, \ldots, s\}$ tale che $d(x, x_{k_r}) < \delta$.

Ogni successione $\{f_n^n(x_{k_r})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, cioè esiste ν_r tale che

$$|f_n^n(x_{k_r}) - f_m^m(x_{k_r})| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{per ogni} \quad n, m > \nu_r;$$

prendiamo $\nu = \max(\nu_1, \ldots, \nu_s)$.

Perciò , per ogni $x \in K$, se $n, m > \nu$, preso x_{k_r} tale che $d(x, x_{k_r}) < \delta$, risulta che

$$\begin{aligned} |f_n^n(x) - f_m^m(x)| \quad \le \\ & |f_n^n(x) - f_n^n(x_{k_r})| + |f_n^n(x_{k_r}) - f_m^m(x_{k_r})| + |f_m^m(x_{k_r}) - f_m^m(x)| < \\ & |f_n^n(x) - f_n^n(x_{k_r})| + \frac{\varepsilon}{3} + |f_m^m(x_{k_r}) - f_m^m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dove nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto che le f_n^n formano una successione di Cauchy in x_{k_r}, mentre la terza disuguaglianza segue dalla equicontinuità delle f_n^n.

In definitiva, abbiamo dimostrato che $\{f_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy uniformemente in K e quindi essa converge uniformemente in K ad una funzione continua in K. □

Teorema 5.11.2. (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Sia* $1 \le p < \infty$ *e sia* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ *tale che*

(i) esiste una costante $c \ge 0$ *tale che* $\|f_n\|_p \le c$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sup\{\|\mathcal{T}_h f_n - f_n\|_p : n \in \mathbb{N}\} \to 0$ *se* $|h| \to 0$.

Allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *contiene una sottosuccessione che converge in* $L^p(E)$ *per ogni sottoinsieme misurabile* $E \subset \mathbb{R}^N$ *con* $m(E) < \infty$.

Dimostrazione. Useremo qui di seguito il modulo di p-continuità relativo alla successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\omega_p(\delta) = \sup\{\|\mathcal{T}_h f_n - f_n\|_p : |h| < \delta, n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) Sia $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $j \ge 0$, $\mathrm{supp}(j) \subseteq \overline{B(0,1)}$ e $\int_{\mathbb{R}^N} j(x)\, dx = 1$ (si veda la dimostrazione del Teorema 5.9.14). Allora $j_k(x) = k^N j(kx)$ ha supporto contenuto in $\overline{B(0,1/k)}$.

La disuguaglianza di Hölder implica che

$$\begin{aligned} |j_k \star f_n(x) - f_n(x)|^p \; &\le \; \left(\int_{\mathbb{R}^N} j_k(y)^{1/p'}\, j_k(y)^{1/p} |f_n(x-y) - f_n(x)|\, dy\right)^p \le \\ & \int_{\mathbb{R}^N} j_k(y)\, |f_n(x-y) - f_n(x)|^p\, dy, \end{aligned}$$

dato che $\int_{\mathbb{R}^N} j_k(x)\, dx = 1$. Per il Teorema di Fubini 4.8.7, si ha:

$$\begin{aligned} \|j_k \star f_n - f_n\|_p^p \;\; &\le \;\; \int_{\mathbb{R}^N} j_k(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x)|^p\, dx\right) dy = \\ & \int_{B(0,1/k)} j_k(y)\, \|\mathcal{T}_y f_n - f_n\|_p^p\, dy \le \omega_p(1/k)^p, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|j_k \star f_n - f_n\|_p \le \omega_p(1/k).$$

(2) Per la disuguaglianza di Hölder, otteniamo che

$$|j_k \star f_n(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} j_k(y)|f_n(x-y)|\, dy \leq \|j_k\|_{p'}\|f_n\|_p,$$

e quindi

$$\|j_k \star f_n\|_\infty \leq c\, \|j_k\|_{p'},$$

per l'ipotesi (i). Dunque la successione di funzioni $\{j_k \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equilimitata in $\mathbb{R}^N$.

Inoltre

$$\|\nabla(j_k \star f_n)\|_\infty = \|(\nabla j_k) \star f_n\|_\infty \leq \|\nabla j_k\|_{p'}\|f_n\|_p \leq c\, \|\nabla j_k\|_{p'};$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ con $|x-y| < \delta$, l'ultima disuguaglianza ed il Teorema di Lagrange implicano che

$$|j_k \star f_n(x) - j_k \star f_n(y)| \leq |(\nabla j_k \star f_n)(\theta x + (1-\theta)y)||x-y| \leq c\, \|\nabla j_k\|_{p'}\ \delta,$$

e quindi

$$\sup\{\omega_\infty(j_k \star f_n, \delta) : n \in \mathbb{N}\} \leq c\, \|\nabla j_k\|_{p'}\ \delta,$$

ossia la successione di funzioni $\{j_k \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è equicontinua in $\mathbb{R}^N$.

(3) Sia $E \subset \mathbb{R}^N$ un insieme misurabile e di misura finita e sia K un compatto contenuto in E. Per quanto dimostrato ai punti (1) e (2), risulta allora che

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{p,E\setminus K} \quad &\leq \quad \|f_n - j_k \star f_n\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_k \star f_n\|_{p,E\setminus K} \leq \\ &\omega_p(1/k) + \|j_k \star f_n\|_\infty\ m(E\setminus K)^{1/p} \leq \\ &\omega_p(1/k) + c\, \|j_k\|_{p'}\ m(E\setminus K)^{1/p}.\end{aligned}$$

(4) Fissiamo $\varepsilon > 0$; per l'ipotesi (ii) possiamo scegliere un intero k tale che $\omega_p(1/k) < \varepsilon$; inoltre esiste K compatto tale che $m(E\setminus K)^{1/p} < \varepsilon$.

Per quanto dimostrato nel punto (2), la successione $\{j_k \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa su K le ipotesi del Teorema di Ascoli-Arzelà 5.11.1. Esiste perciò una sottosuccessione, che continueremo ad indicare con gli stessi indici, che converge uniformemente su K e quindi in norma $L^p(K)$. Esiste quindi ν tale che

$$\|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,K} < \varepsilon$$

per ogni $n, m > \nu$.

(5) Pertanto, se $n, m > \nu$, applicando i punti (1)-(4) quando necessario, si ottiene la seguente catena di disuguaglianze:

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_{p,E} \quad \leq & \\
& \|f_n - j_k \star f_n\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,E} + \|f_m - j_k \star f_m\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq \\
& 2\ \omega_p(1/k) + \|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,K} + \|j_k \star f_n - j_k \star f_m\|_{p,E\setminus K} < \\
& 2\varepsilon + \varepsilon + \|f_n - f_m\|_{p,E\setminus K} \leq 3\varepsilon + \|f_n\|_{p,E\setminus K} + \|f_m\|_{p,E\setminus K} \leq \\
& 3\varepsilon + 2\ \omega_p(1/k) + 2c\ \|j_k\|_{p'}\ m(E \setminus K)^{1/p} < \\
& 3\varepsilon + 2\varepsilon + 2c\ \|j_k\|_{p'}\ \varepsilon = (5 + 2c\ \|j_k\|_{p'})\ \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Concludendo, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in $L^p(E)$ e dunque converge nella norma di $L^p(E)$. □

Osservazione 5.11.3. Nelle ipotesi del Teorema 5.11.2, se $m(E) = \infty$, non è detto che $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenga una successione convergente in $L^p(E)$.

Corollario 5.11.4. *Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa le ipotesi del Teorema 5.11.2 e se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $E \subset \mathbb{R}^N$ limitato, misurabile e tale che $\|f_n\|_{p,\mathbb{R}^N\setminus E} < \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge in $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Basta riadattare il punto (4) della dimostrazione del Teorema 5.11.2. □

5.12. Convergenza in misura

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni misurabili in un insieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$ e quasi ovunque finite. Si dice che f_n *converge in misura* ad f se, posto

$$E_{\delta,n} = \{x \in E\ :\ |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\},\ \delta > 0,\ n \in \mathbb{N},$$

risulta che

$$\lim_{n\to\infty} m(E_{\delta,n}) = 0$$

per ogni $\delta > 0$.

Teorema 5.12.1. *Se una successione di funzioni misurabili f_n converge in misura ad f in E, allora esiste una sua sottosuccessione che converge quasi ovunque ad f in E.*

Dimostrazione. Se f_n converge in misura ad f, significa che per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ esiste ν tale che

$$m(E_{\delta,n}) < \varepsilon$$

per ogni $n \geq \nu$. Prendiamo $\varepsilon = \delta = 2^{-k}$ con $k \in \mathbb{N}$. Per ogni k esiste allora un ν_k tale che $\nu_k > \nu_{k-1}$ e

$$m(E_{2^{-k},\nu_k}) < 2^{-k}.$$

Se poniamo $F_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E_{2^{-k},\nu_k}$ e se $x \notin F_m$, allora $|f(x) - f_{\nu_k}(x)| < 2^{-k}$ per ogni $k \geq m$ e quindi $f_{\nu_k}(x)$ converge a $f(x)$.

Sia $F = \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$. Se $x \notin F$, allora esiste m tale che $x \notin F_m$ e quindi $f_{\nu_k}(x) \to f(x)$. Osserviamo ora che

$$m(F) \leq m(F_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} m(E_{2^{-k},\nu_k}) < 2^{-m+1}$$

per ogni $m \in \mathbb{N}$, e quindi $m(F) = 0$. □

Osservazione 5.12.2. Utilizzando questa proposizione, in modo completamente analogo a quello usato per la convergenza in L^p, possiamo dimostrare che se una successione è di Cauchy in misura allora converge in misura.

Osservazione 5.12.3. Il Lemma di Fatou, il Teorema di Beppo Levi e quello della Convergenza Dominata rimangono validi se la convergenze quasi ovunque è rimpiazzata dalla convergenza in misura.

Questo risultato segue dall'osservazione che, data una successione di numeri reali a_n allora $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ se e solo se ogni sottosuccessione di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ha a sua volta una sottosuccessione che converge ad a. Infatti, se a_n converge ad a, ogni sua sottosuccessione converge ad a. Viceversa, le sottosuccessioni che convergono al limite inferiore e superiore hanno sottosuccessioni convergenti ad a, quindi limite inferiore e limite superiore coincidono con a.

Qui di seguito, come esempio, diamo la dimostrazione del Teorema della Convergenza Dominata.

Proposizione 5.12.4. (Teorema della converganza dominata) *Sia f_n una successione che converge in misura ad f in E e supponiamo $|f_n| \leq g$ in E con g sommabile in E. Allora*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, dx = \int_E f \, dx.$$

Dimostrazione. Siano $a_n = \int_E f_n \, dx$ ed $a = \int_E f \, dx$. Sia a_{n_k} una qualunque sottosuccessione; questa corrisponde ad una sottosuccessione f_{n_k} che converge ancora in misura ad f ed è ancora dominata da g. Per il Teorema 5.12.1, esiste una sottosuccessione estratta da f_{n_k}, che indichiamo ancora con f_{n_k}, che converge quasi ovunque ad f. Per il Teorema della Convergenza

Dominata 4.7.3, allora $a_{n_k} \to a$. Perciò ogni sottosuccessione di a_n contiene una sottosuccessione che converge ad a, quindi $a_n \to a$, cioè la tesi. □

Riassumendo quindi, per una successione di funzioni misurabili, conosciamo quattro modi di convergere diversi: quasi ovunque, in misura, in norma L^p e debolmente in L^p; concludiamo questo paragrafo mettendoli a confronto.

Sappiamo già che, se una successione converge in norma L^p, allora essa converge debolmente in L^p.

Proposizione 5.12.5. *Sia E un insieme di misura finita. Allora, ogni successione di funzioni misurabili in E che converge quasi ovunque in E, converge anche in misura allo stesso limite.*

Dimostrazione. Si può sempre supporre che $E = \{x \in E : f_n(x) \to f(x)\}$. Quindi, poiché f_n converge ad f in E, risulta che

$$E = \liminf_{n\to\infty} (E \setminus E_{\delta,n})$$

per ogni $\delta > 0$.

Perciò, per l'Esercizio 8 del Capitolo 2, si ha:

$$m(E) \leq \liminf_{n\to\infty} m(E \setminus E_{\delta,n}) = m(E) - \limsup_{n\to\infty} m(E_{\delta,n}).$$

Dato che $m(E) < \infty$, si conclude che

$$\limsup_{n\to\infty} m(E_{\delta,n}) \leq 0$$

per ogni $\delta > 0$. □

Proposizione 5.12.6. *Se una successione converge in $L^p(E)$, allora converge anche in misura in E allo stesso limite.*

Dimostrazione. Fissato $\delta > 0$, risulta per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_E |f_n - f|^p \, dx \geq \int_{E_{\delta,n}} |f_n - f|^p \, dx \geq \delta^p \, m(E_{\delta,n}),$$

e quindi $m(E_{\delta,n}) \to 0$ se $n \to \infty$. □

Proposizione 5.12.7. *Se f_n converge debolmente ad f in $L^p(E)$ con $1 \leq p < \infty$, allora*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

per quasi ogni $x \in E$.

In particolare, se f_n converge anche q.o. ad una funzione g in E, si ha che $g = f$ q.o. in E.

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre che $f \equiv 0$ q.o. in E.

Per ogni $F \subset E$ con $m(F) < \infty$, dato che $\mathcal{X}_F \in L^{p'}(E)$ e $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(E)$, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \int_F f_n\,dx = \int_F f\,dx. \tag{5.33}$$

Siano ora

$$L'(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{ed} \quad F' = \{x \in F : L'(x) > 0\};$$

per il Lemma di Fatou,

$$0 \le \int_{F'} L'(x)\,dx \le \liminf_{n\to\infty} \int_{F'} f_n(x)\,dx = 0,$$

dato che F' è misurabile e di misura finita. Perciò $L' \le 0$ quasi ovunque in ogni $F \subseteq E$ di misura finita e quindi in tutto E.

Infine, se $f_n \rightharpoonup 0$ anche $-f_n \rightharpoonup 0$ e quindi

$$\limsup_{n\to\infty} f_n(x) = -\liminf_{n\to\infty}[-f_n(x)] \ge 0 = f(x)$$

per quasi ogni $x \in E$. $\square$

Proposizione 5.12.8. *Sia f_n una successione di funzioni misurabili in E che convergono debolmente in $L^p(E)$ ad f e in misura a g in E. Allora $f = g$ quasi ovunque in E.*

Dimostrazione. Esiste una sottosuccessione di f_n che converge quasi ovunque a g in E e che ancora converge debolmente in $L^p(E)$ ad f. Dalla proposizione precedente segue che $f = g$ quasi ovunque in E. $\square$

Esempio 5.12.9. (1) Esistono successioni di funzioni che convergono in misura ma non convergono quasi ovunque.

Per esempio, definiamo

$$f_{k,n} = \mathcal{X}_{\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]}, \text{ per } n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \dots, n.$$

La successione $f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \dots$ converge in misura a zero in $[0, 1]$, dato che

$$m\{x \in [0,1] : |f_{k,n}(x)| \ge \delta\} = \begin{cases} 0, & \text{se } \delta \ge 1, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{se } 0 < \delta < 1, \end{cases}$$

ma non converge in nessun punto di $[0, 1]$: per ogni $x \in [0, 1]$ possiamo trovare due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi.

(2) Esistono successioni di funzioni che convergono debolmente in L^p ma non convergono in misura.

Sia per esempio $f_n(x) = \sin(nx)$, $x \in [0, 2\pi]$ e per ogni g nel duale $L^2[0, 2\pi]$ di $L^2[0, 2\pi]$, si ponga

$$a_n = \int_0^{2\pi} g(x) \, \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \, dx.$$

Risulta che

$$\begin{aligned} 0 \quad \leq \quad & \int_0^{2\pi} \left[g(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \right]^2 dx = \int_0^{2\pi} g(x)^2 dx - \\ & 2 \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} g(x) \, \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} dx + \sum_{k=1}^{n} a_k a_j \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin(jx)}{\sqrt{\pi}} dx = \\ & \int_0^{2\pi} g(x)^2 dx - 2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k a_j \delta_{ij} = \\ & \int_0^{2\pi} g(x)^2 dx - \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \end{aligned}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Perciò

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_0^{2\pi} g(x)^2 dx < \infty$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} a_n^2$ converge. Dunque $a_n \to 0$ se $n \to \infty$, ossia $f_n \rightharpoonup 0$ in $L^2[0, 2\pi]$.

D'altra parte, se f_n convergesse in misura, allora convergerebbe a zero per la Proposizione 5.12.8, ma

$$m(\{x \in [0, 2\pi] : |f_n(x)| \geq 1/2\}) = \frac{4\pi}{3}$$

non converge a zero.

Si osservi infine che tale successione non può convergere quasi ovunque, dato che non converge in misura.

(3) Esistono successioni di funzioni che convergono in misura ma non debolmente in L^p.

Infatti la successione $f_n(x) = n\mathcal{X}_{[0, \frac{1}{n}]}(x)$ converge in misura in $[0, 1]$. Se essa convergesse debolmente allora convergerebbe a zero per la Proposizione 5.12.8, ma, dato che $1 \in L^{p'}[0, 1]$ e $\int_0^1 f_n \cdot 1 \, dx = 1$, essa non converge debolmente a zero in $L^p[0, 1]$.

(4) Esistono successioni di funzioni che convergono q.o. ma non debolmente in L^p.

Infatti la successione dell'esempio precedente fornisce un controesempio.

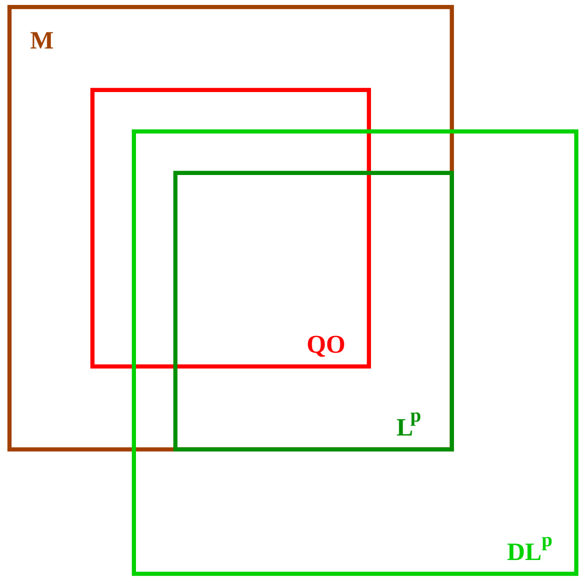

Figura 5. Confronto tra convergenze.

(5) Esistono successioni di funzioni che convergono in L^p ma non convergono quasi ovunque.

Infatti la successione dell'esempio (1) fornisce un controesempio.

Le implicazioni fra i vari tipi di convergenza (nel caso in cui la misura di E sia finita) si possono schematizzare nel diagramma in Figura 7.

5.13. Spazi di Hilbert

Abbiamo già osservato che lo spazio $L^2(E)$ è un esempio di spazio di Hilbert nel senso della definizione data nell'Osservazione 5.3.3. Alcuni dei risultati fin qui dimostrati per gli spazi $L^p(E)$ non solo valgono nel caso $p = 2$, ma possono essere estesi facilmente ad un qualunque spazio di Hilbert.

Elenchiamo qui di seguito tali risultati, corredandoli, quando necessario, con una dimostrazione. Rimandiamo all'Osservazione 5.3.3 per le definizioni di prodotto interno e di spazio di Hilbert.

Teorema 5.13.1. *Sia X uno spazio vettoriale con prodotto interno $(\cdot,\cdot)$ e norma $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$. Allora risulta:*

(i) (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)

$$|(x, y)| \le \|x\|\|y\| \text{ per ogni } x, y \in X;$$

(ii) (identità del parallelogramma)

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \text{ per ogni } x, y \in X;$$

(iii) X è uniformemente convesso.

Dim. Esercizio 16. □

Teorema 5.13.2. (Teorema della proiezione). *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $\mathcal{C}$ un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in $\mathcal{H}$.*

Allora, per ogni $u \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{C}$ esiste un unico $v \in \mathcal{C}$ tale che

$$\|u - v\| = \min\{\|u - w\| : w \in \mathcal{C}\} = \text{dist }(u, \mathcal{C}).$$

Inoltre v è caratterizzato dalla proprietà:

$$v \in \mathcal{C} \quad e \quad (u - v, w - v) \leq 0 \quad pe\ ogni\ w \in \mathcal{C}.$$

Dim. Esercizio 17; è utile osservare non è necessario usare in questo caso il Lemma 5.5.3 per dimostrare la caratterizzazione. □

Si dice che una successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge debolmente* ad un vettore u in $\mathcal{H}$ e si scrive $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}$, se $L(u_n) \to L(u)$ per ogni funzionale lineare e continuo su $\mathcal{H}$.

Teorema 5.13.3. *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Se $u_n \rightharpoonup u$ in $\mathcal{H}$, allora*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| \geq \|u\|.$$

Se inoltre$\|u_n\| \to \|u\|$, allora $u_n \to u$ in $\mathcal{H}$.

Dim. Esercizio 20; si osservi che, per ogni $v \in \mathcal{H}$, l'applicazione $L_v(u) = (v, u)$ definisce sempre un funzionale lineare e continuo. □

Teorema 5.13.4. (Teorema di rappresentazione di Riesz). *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $\mathcal{H}'$ il suo duale.*

Allora, per ogni $L \in \mathcal{H}'$, esiste un solo $v \in \mathcal{H}$ tale che

$$Lu = (u, v) \quad per\ ogni \quad u \in \mathcal{H} \quad e \quad \|L\| = \|v\|.$$

Dim. Sia $L \in \mathcal{H}'$, non identicamente nullo e sia $\mathcal{M}$ il nucleo di L. Poichè L è lineare e continuo, allora $\mathcal{M}$ è un sottospazio vettoriale chiuso in $\mathcal{H}$. Sia $u_0 \notin \mathcal{M}$ e sia $v_0 = P_{\mathcal{M}} u_0$; allora $u_0 = v_0 + (u_0 - v_0)$, dove $v_0 \in \mathcal{M}$ e $u_0 - v_0 \in \mathcal{M}^\perp$. Se $u \in \mathcal{H}$, allora possiamo scrivere

$$u = \lambda\ (u_0 - v_0) + P_{\mathcal{M}} u,$$

dove $Lu = \lambda\ L(u_0 - v_0) = Lu_0$ e cioè $\lambda = Lu/Lu_0$; perciò, scegliendo

$$v = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|^2}\ Lu_0,$$

si ha:

$$(u, v) = \lambda\ (u_0 - v_0, v) + (P_{\mathcal{M}} u, v) = Lu,$$

dato che $v \in \mathcal{M}^\perp$ e $P_{\mathcal{M}} u \in \mathcal{M}$.

Infine, è chiaro che $|Lu| = |(u, v))| \leq \|v\|\|u\|$ per ogni $u \in \mathcal{H}$ e quindi $\|L\| \leq \|v\|$. D'altra parte, preso $u = v/\|v\|$, si ha che $Lu = (u, v) = \|v\|$ e quindi $\|v\| \leq \|L\|$. □

Teorema 5.13.5. (Teorema di Banach-Alaoglu). *Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e supponiamo che esista una costante $c > 0$ tale che $\|u_n\| \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Allora la successione $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge debolmente ad un elemento di $\mathcal{H}$.

Dim. Sia $D = \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme (numerabile) denso in $\mathcal{H}$.

Poiché $|(u_n, v_1)| \leq \|u_n\|\|v_1\| \leq c\ \|v_1\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{u_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (u_n^1, v_1) converge ad un numero reale se $n \to \infty$.

Poiché $|(u_n^1, v_2)| \leq \|u_n^1\|\|v_2\| \leq c\ \|v_2\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{u_n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$ di $\{u_n^1\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (u_n^2, v_2) converge ad un numero reale se $n \to \infty$. Iterando questo ragionamento, fissato $k \in \mathbb{N}$ esiste $\{u_n^k\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{u_n^{k-1}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \cdots \subseteq \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che (u_n^k, v_k) converge ad un numero reale se $n \to \infty$.

La successione $\{u_n^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sarà allora tale che (u_n^n, v_k) converge se $n \to \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato.

Fissati allora $v \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|v - v_k\| < \frac{\varepsilon}{3c},$$

ed inoltre esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|(u_n^n, v_k) - (u_m^m, v_k)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

per ogni $n, m > \nu$.

Perciò, per ogni $n, m > \nu$ risulta che

$$\begin{aligned}
&|(u_n^n, v) - (u_m^m, v)| \leq \\
&\qquad |(u_n^n, v) - (u_n^n, v_k)| + |(u_n^n, v_k) - (u_m^m, v_k)| + |(u_m^m, v_k) - (u_m^m, v)| < \\
&\qquad |(u_n^n, v - v_k)| + \frac{\varepsilon}{3} + |(u_m^m, v_k - v)| \leq \\
&\qquad \|u_n^n\|\|v - v_k\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_m^m\|\|v - v_k\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da ciò segue che è ben definito il funzionale $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che

$$Lv = \lim_{n\to\infty} (u_n^n, v)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$. È chiaro inoltre che L è lineare e limitato con $\|L\| \leq c$. Per il Teorema 5.13.4, esiste $u \in \mathcal{H}$ tale che $Lv = (u, v)$ per ogni $v \in \mathcal{H}$; dunque

$$\lim_{n\to\infty} (u_n^n, v) = (u, v)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$, ossia $u_n^n \rightharpoonup u$ per $n \to \infty$. $\square$

Esercizi

Nei seguenti esercizi, E indica un qualsiasi sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$.

1. Dimostrare che ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^N$ è separabile.
2. Siano p, q, r tre numeri maggiori o uguali ad 1 tali che
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,.$$
Dimostrare che se $f \in L^p(E)$ e $g \in L^q(E)$ allora $fg \in L^r(E)$ e
$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q.$$
3. Sia $p \in [1, \infty)$. Dimostrare che se g è misurabile e tale che $fg \in L^p(E)$ per ogni $f \in L^p(E)$ allora $g \in L^\infty(E)$.
4. Sia $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Dimostrare che l'insieme $E_0 = \{x \in E : g(x) > \operatorname{ess\,sup}_E g\}$ ha misura nulla e che
$$\operatorname*{ess\,sup}_E g = \sup_{E \setminus E_0} g.$$
5. Dimostrare che $\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
6. Lo spazio $L^p(E)$ si può ugualmente definire anche per $p \in (0, 1)$.
   (i) Dimostrare che $L^p(E)$ è uno spazio vettoriale;
   (ii) dimostrare che $L^p(E)$ è uno spazio metrico con distanza definita da
$$d_p(f, g) = \int_E |f - g|^p dx.$$
7. Dimostrare che $L^1(E)$ e $L^\infty(E)$ non sono uniformemente convessi.
8. Sia t la successione a termini reali $\{t_1, t_2, \ldots, t_r, \ldots\}$ e si ponga
$$\|t\|_{l_p} = \left(\sum_{r=1}^{\infty} |t_r|^p \right)^{1/p} .$$
Si indica con l_p lo spazio delle successioni t con $\|t\|_{l_p} < \infty$. Provare che l_p è uno spazio lineare, normato con la norma $\| \cdot \|_{l_p}$. Provare che l_p è completo e separabile.
9. Dimostrare che (5.25) definisce effettivamente un norma.
10. Calcolare la convoluzione di $f = \mathcal{X}_{[-a,a]}$ con sé stessa. Calcolare anche la convoluzione di f con la funzione $g(x) = \dfrac{1}{\pi} \, \dfrac{1}{1 + x^2}$.

11. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ con $p > 1$ e $1/p + 1/p' = 1$. Dimostrare che la convoluzione $f \star g$ è una funzione continua in $\mathbb{R}^N$ che tende a zero se $|x| \to \infty$.
12. Sia $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfacente all'ipotesi (i) del Teorema 5.11.2. Dimostrare che esiste una sottosuccessione di $\{g \star f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ che converge in $L^p(E)$ per ogni sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^N$ di misura finita.
13. Siano $1 < p < \infty$, $f \in L^p((0,\infty))$ e
$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \quad 0 < x < \infty.$$
   (i) Dimostrare la disuguaglianza di Hardy
   $$\|F\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p.^{2}$$
   (ii) Provare che vale il segno di uguaglianza solo se $f = 0$ q.o.
   (iii) Provare che la costante $\frac{p}{p-1}$ non può essere sostituita da una più piccola.
   (iv) Se $f > 0$ e $f \in L^1((0,+\infty))$, mostrare che $F \notin L^1((0,+\infty))$.
14. Sia E misurabile con $m(E) = 1$. Sappiamo che $\|f\|_{L^r(E)} \le \|f\|_{L^s(E)}$ se $0 < r < s \le \infty$.
   (i) Sotto quali condizioni si ha $\|f\|_{L^r(E)} = \|f\|_{L^s(E)}$ con $0 < r < s \le \infty$?
   (ii) Supponendo $\|f\|_{L^r(E)} < \infty$ per qualche $r > 0$, provare che
   $$\lim_{p\to 0}\|f\|_{L^p(E)} = \exp\left\{\int_E \log|f|\,dx\right\}.^{\;3}$$
15. Dimostrare il Teorema 5.13.1.
16. Dimostrare il Teorema 5.13.2
17. Se M è un sottospazio vettoriale di uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, allora $P_M(x) \in \overline{M}$ e
$$(x - P_M(x), y) = 0 \quad \text{per ogni} \quad y \in M.$$
Inoltre $\mathcal{H} = \overline{M} \oplus M^\perp$, dove $M^\perp = \{y \in \mathcal{H} : (y,x) = 0 \text{ per ogni } x \in M\}$.
18. Se una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge debolmente in R^N allora converge fortemente.
19. Dimostrare il Teorema 5.13.3

---

[2] *Suggerimento:* dimostrare prima il risultato, per f non negativa, continua ed a supporto compatto, integrando per parti.

[3] Si conviene che $e^{-\infty} = 0$.

Bibliografia

[Br] H. Brezis, Analisi Funzionale, Liguori Editore, Napoli, 1986.

[DiB] E. Di Benedetto, Real Analysis, Birkhäuser, Boston, 2002.

[Fa] K.J. Falconer, The Geoemetry of Fractal Sets, John Wiley & Sons, Cambridge 1986.

[LL] E.H. Lieb & M. Loss, Analysis, Second edition, AMS, Providence, RI (USA), 2001.

[Pu] C. Pucci, Istituzioni di Analisi Superiore, dispense.

[Ru] W. Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri, Torino 1974.