

**Dispense del Corso di
Istituzioni di Analisi Superiore
Laurea Magistrale in Matematica**

Prof. Rolando Magnanini

DIMAI – DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA “U. DINI”
UNIVERSITÀ DI FIRENZE, VIALE MORGAGNI 67/A, 50134 FIRENZE

E-mail address: `magnanin@math.unifi.it`

Indice

Capitolo 1. Funzioni a variazione limitata e assolutamente continue	1
§1.1. Funzioni a variazione limitata	1
§1.2. Derivabilità quasi ovunque delle funzioni a variazione limitata	3
§1.3. Funzioni assolutamente continue	7
§1.4. Due esempi	13
Esercizi	14
Capitolo 2. Cenni di Analisi Funzionale	17
§2.1. Spazi di Hilbert	17
§2.2. Sistemi ortonormali	20
§2.3. Funzionali ed operatori lineari	24
§2.4. Il teorema di Banach-Steinhaus	29
§2.5. I teoremi di Stampacchia e di Lax-Milgram	32
§2.6. Operatori compatti	35
§2.7. Teorema dell'alternativa di Fredholm	40
§2.8. Spettro di un operatore limitato	43
§2.9. Spettro di un operatore compatto	45
§2.10. Sistemi di Sturm-Liouville	48
Esercizi	53
Capitolo 3. Serie di Fourier	57
§3.1. Generalità	57
§3.2. Convergenza puntuale	60
§3.3. Convergenza in media	64

§3.4. Nuclei di sommabilità	66
§3.5. Il fenomeno di Gibbs	67
§3.6. Applicazione: il metodo di separazione delle variabili	69
Esercizi	74
Capitolo 4. Trasformata di Fourier	77
§4.1. Generalità	77
§4.2. La classe di Schwartz	78
§4.3. La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$	81
§4.4. Nuclei di sommabilità	84
§4.5. La formula di addizione di Poisson	88
Esercizi	90
Capitolo 5. Cenni sulle distribuzioni	93
§5.1. Qualche motivazione	93
§5.2. Generalità	94
§5.3. La derivata distribuzionale e gli spazi di Sobolev	96
§5.4. Operazioni sulle distribuzioni	97
§5.5. Distribuzioni a supporto compatto	102
§5.6. Il teorema fondamentale per le distribuzioni	106
§5.7. Le distribuzioni temperate	110
Esercizi	112
Capitolo 6. Funzioni armoniche	115
§6.1. Generalità	115
§6.2. La proprietà della media	116
§6.3. Il principio di massimo	118
§6.4. La disuguaglianza di Harnack	121
§6.5. Criteri di compattezza	124
§6.6. Maggiorazioni a priori delle derivate	126
Esercizi	128
Capitolo 7. Problemi al contorno	131
§7.1. La soluzione fondamentale	131
§7.2. I problemi di Dirichlet, Neumann e Robin	135
§7.3. Teoremi di unicità	135
§7.4. La funzione di Green	140
§7.5. Il metodo di Perron	146

§7.6. Il principio di Dirichlet	152
§7.7. Riduzione ad un'equazione integrale di Fredholm	157
§7.8. Risoluzione di equazioni per decomposizione spettrale	163
§7.9. Il principio di Rayleigh	166
§7.10. Domini nodali e teorema di Courant	169
Esercizi	172
Appendice A. Complementi	175
§A.1. Teorema di copertura di Vitali	175
§A.2. La formula multinomiale	177
§A.3. Formula di Taylor in \mathbb{R}^N	178
§A.4. Lemma di Du Bois-Reymond	179
§A.5. Il teorema di Gauss della divergenza	181
Appendice. Bibliografia	183
Appendice. Indice analitico	185

Funzioni a variazione limitata e assolutamente continue

1.1. Funzioni a variazione limitata

Sia f limitata nell'intervallo $[a, b]$ e si consideri una partizione dell'intervallo $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

La *variazione totale* $V_f[a, b]$ di f in $[a, b]$ è definita da

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}.$$

Se $V_f[a, b] < \infty$, si dice che f è a *variazione limitata*.

Si noti che se f è monotona in $[a, b]$, f è a variazione limitata e $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$. Si noti anche che se f è *lipschitziana* in $[a, b]$, cioè se esiste un numero L tale che

$$|f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''| \quad \text{per ogni } x', x'' \in [a, b],$$

allora si ha che $V_f[a, b] \leq L(b - a)$.

Esempio 1.1.1. Esistono funzioni continue che non sono a variazione limitata; per esempio la funzione definita da

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x} \quad \text{per } x \in (0, 1], \quad f(0) = 0.$$

Si ha infatti che

$$V_f[0, 1] \geq \sum_{i=1}^n \left| f\left(\frac{1}{(i+1)\pi}\right) - f\left(\frac{1}{i\pi}\right) \right| = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{(i+1)\pi} + \frac{1}{i\pi} \right]$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e questa espressione diverge per $n \rightarrow \infty$.

Si provano facilmente i seguenti risultati.

Teorema 1.1.2. (i) *L'insieme delle funzioni a variazione limitata su un intervallo $[a, b]$ è uno spazio vettoriale.*

(ii) *Se f e g sono a variazione limitata in $[a, b]$, anche fg è a variazione limitata; se inoltre $|g| \geq \mu$, con μ costante positiva anche $\frac{f}{g}$ è a variazione limitata.*

(iii) *Se f è a variazione limitata in $[a, b]$ e $c \in [a, b]$, si ha che*

$$V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b].$$

Posto per definizione $[t]^+ = \max(t, 0)$ e $[t]^- = \max(-t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, la *variazione positiva* e la *variazione negativa* di f in $[a, b]$ sono definite da

$$P_f[a, b] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}$$

e

$$N_f[a, b] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\},$$

rispettivamente. Si osserva che

$$\begin{aligned} V_f[a, b] &= P_f[a, b] + N_f[a, b], \\ f(b) - f(a) &= P_f[a, b] - N_f[a, b]. \end{aligned}$$

Da queste formule segue la seguente *decomposizione di Jordan* di una funzione a variazione limitata:

$$f(x) = f(a) + P_f[a, x] - N_f[a, x], \quad x \in [a, b].$$

Siccome $P_f[a, x]$, $N_f[a, x]$ sono funzioni non decrescenti di x in $[a, b]$ sussiste la seguente proprietà.

Proposizione 1.1.3. *Ogni funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni crescenti.*

Teorema 1.1.4. *Una funzione a variazione limitata ha punti di discontinuità solo di prima specie ed essi sono al più una infinità numerabile.*

Dim. Siccome una funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni monotone basta provare la proprietà per una funzione non decrescente in $[a, b]$.

Per $c \in [a, b]$ poniamo

$$f(c^-) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x), \quad f(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x);$$

è noto che questi limiti sono finiti e si ha che $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$. Se $f(c^+) > f(c^-)$ il punto c è un punto di discontinuità di prima specie ed il numero $f(c^+) - f(c^-)$ si dice salto della funzione f in c .

Notiamo che se c_1, \dots, c_m sono punti di discontinuità di f si ha

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^m [f(c_i^+) - f(c_i^-)].$$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, f ha un numero finito di salti maggiori di $\frac{1}{n}$ e quindi ha al più una infinità numerabile di discontinuità. \square

1.2. Derivabilità quasi ovunque delle funzioni a variazione limitata

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. I quattro numeri derivati del Dini sono definiti per ogni $x \in (a, b)$ da

$$\begin{aligned} D'_- f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & D''_- f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ D'_+ f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, & D''_+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \end{aligned}$$

Se f è derivabile i quattro numeri derivati coincidono con la derivata.

Teorema 1.2.1. *Se f è crescente in $[a, b]$, le funzioni $D'_- f, D''_- f, D'_+ f$ e $D''_+ f$ da $[a, b]$ a $\overline{\mathbb{R}}$ sono misurabili.*

Dim. Dimostriamo che $D''_+ f$ è misurabile. Posto

$$(1.1) \quad g_n(x) = \sup_{0 < h < \frac{1}{n}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

si ha

$$D''_+ f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

e quindi per provare la misurabilità di $D''_+ f$ basta provare la misurabilità delle g_n , poiché il limite di successioni di funzioni misurabili è misurabile.

Indichiamo con Q_n l'insieme dei razionali compresi in $(0, \frac{1}{n})$ e sia

$$k_n(x) = \sup_{h \in Q_n} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Risulta sempre che $k_n \leq g_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, per la (1.1) esiste un t in $(0, \frac{1}{n})$ tale che

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t} > g_n(x) - \varepsilon$$

e quindi, per densità e continuità, possiamo trovare un $h \in Q_n$ con $h > t$ tale che

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{h} > g_n(x) - \varepsilon.$$

Poiché f è crescente, avremo quindi che

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(x+t) - f(x)}{h} > g_n(x) - \varepsilon.$$

Dunque $k_n(x) > g_n(x) - \varepsilon$ e, per l'arbitrarietà di ε , si ha quindi che $k_n = g_n$. Le k_n sono misurabili perché estremi di successioni di funzioni misurabili e quindi sono tali le g_n ed, in definitiva, $D_+''f$.

Analoga è la dimostrazione per la misurabilità degli altri numeri derivati del Dini. È infine chiaro che sono misurabili anche le funzioni definite da

$$\begin{aligned} D''f(x) &= \max\{D_-''f(x), D_+''f(x)\}, \\ D'f(x) &= \min\{D_-'f(x), D_+'f(x)\}, \end{aligned}$$

per $x \in [a, b]$. □

Lemma 1.2.2. *Sia f crescente in $[a, b]$; per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta che*

$$(1.2) \quad f(b) - f(a) \geq t m(\{x \in [a, b] : D''f(x) > t\}).$$

Dim. Poniamo $E = \{x \in [a, b] : D''f(x) > t\}$. Se $m(E) = 0$ la (1.2) è evidente; supponiamo quindi che $m(E) > 0$.

Consideriamo la famiglia \mathcal{F} di intervalli (α, β) aventi un estremo in E e tali che

$$(1.3) \quad \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > t.$$

Ogni punto di E è estremo di intervalli di \mathcal{F} di misura inferiore a qualunque costante positiva prefissata. Infatti, se $\alpha \in E$ allora, per esempio, $D_+''f(\alpha) > t$ e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $0 < h < \varepsilon$ tale che

$$\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} > t;$$

basterà quindi scegliere $\beta = \alpha + h$ per avere che $|\beta - \alpha| < \varepsilon$ e (1.3).

Pertanto \mathcal{F} copre E nel senso di Vitali. Per il Teorema di Vitali A.1.2, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di intervalli disgiunti di \mathcal{F} , (a_i, b_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, tali che $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) > m(E) - \varepsilon$ (si può sempre supporre che $a_i < b_i$).

Si ha quindi che

$$f(b) - f(a) \geq \sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] > \sum_{i=1}^n t (b_i - a_i) > t [m(E) - \varepsilon]$$

e, per l'arbitrarietà di ε , il teorema è provato. □

Teorema 1.2.3 (di Lebesgue). *Ogni funzione a variazione limitata ha quasi ovunque derivata finita.*

Dim. Per la decomposizione di Jordan delle funzioni a variazione limitata basta provare il teorema per una funzione f non negativa e crescente in $[a, b]$.

Per il Lemma 1.2.2 si ha

$$m(\{x \in [a, b] : D''f(x) = +\infty\}) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} m(\{x \in [a, b] : D''f(x) > t\}) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(b) - f(a)}{t} = 0.$$

Si noti che vale sempre che $D''f(x) \geq D'f(x)$ e che $D''f(x) = D'f(x)$ se e solo se f è derivabile in x . Sia allora

$$E = \{x \in [a, b] : 0 \leq D'f(x) < D''f(x) < +\infty\}$$

e supponiamo per assurdo che $m(E) > 0$. Indicato poi con p e q due numeri naturali poniamo

$$E_{p,q} \equiv \{x \in E : 0 \leq D'f(x) < \frac{p}{q} < \frac{p+1}{q} < D''f(x) < +\infty\}.$$

È chiaro allora che E è l'unione (numerabile) di tutti gli $E_{p,q}$ e, siccome $m(E) > 0$, esistono due numeri naturali p, q tali che $m(E_{p,q}) > 0$.

Sia \mathcal{F} la famiglia di intervalli $[\alpha, \beta]$ aventi almeno un estremo in $E_{p,q}$ e tali che

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{p}{q}.$$

Ragionando come nel lemma precedente, fissati $\delta > 0$ e $x \in E_{p,q}$, dato che $D'f(x) < \frac{p}{q}$, esiste un intervallo di \mathcal{F} avente un estremo in x e lunghezza minore di δ . Pertanto \mathcal{F} ricopre $E_{p,q}$ nel senso di Vitali.

Per il Teorema A.1.2, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un numero finito di intervalli disgiunti (a_i, b_i) con $[a_i, b_i] \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$, tali che, indicata con P la loro

unione, risulti che

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) - \varepsilon = m(P) - \varepsilon < m(E_{p,q}) < m(E_{p,q} \cap P) + \varepsilon.$$

Si ha quindi che

$$\sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] < \frac{p}{q} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \frac{p}{q} [m(E_{p,q}) + \varepsilon].$$

Per il precedente lemma e la definizione di $E_{p,q}$ si ha che

$$f(b_i) - f(a_i) \geq \frac{p+1}{q} m(E_{p,q} \cap [a_i, b_i]),$$

e quindi che

$$\sum_{i=1}^n [f(b_i) - f(a_i)] \geq \frac{p+1}{q} m(E_{p,q} \cap P) > \frac{p+1}{q} [m(E_{p,q}) - \varepsilon].$$

Si ottiene dunque la disuguaglianza

$$\frac{p}{q} [m(E_{p,q}) + \varepsilon] > \frac{p+1}{q} [m(E_{p,q}) - \varepsilon],$$

da cui segue che $m(E_{p,q}) < (2p+1)\varepsilon$, che è assurdo. \square

Dimostriamo infine un importante teorema sulla derivazione per serie.

Teorema 1.2.4 (di Fubini). *Sia data una serie convergente in $[a, b]$ di funzioni f_n crescenti in $[a, b]$ e si ponga*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad x \in [a, b].$$

Allora f è quasi ovunque derivabile in $[a, b]$ e

$$f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in [a, b].$$

Dim. Sostituendo $f_n(x) - f_n(a)$ ad $f_n(x)$, possiamo sempre supporre che $f_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poniamo allora

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Si ha che $R_n(x) \geq R_{n+1}(x) \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed ogni $x \in [a, b]$ e, per ipotesi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in [a, b].$$

Inoltre, le funzioni R_n e $R_n - R_{n+1} = f_{n+1}$ sono crescenti in $[a, b]$ e quindi, per il precedente teorema, si ha che $R'_n \geq R'_{n+1} \geq 0$ quasi ovunque in $[a, b]$. Pertanto, è definita e non negativa quasi ovunque in $[a, b]$ la funzione

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R'_n(x), \quad x \in [a, b].$$

La tesi seguirà dimostrando che $g = 0$ quasi ovunque in $[a, b]$. Si osservi che $R'_n(x) \geq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$ ed $n \in \mathbb{N}$; quindi, posto

$$E_k \equiv \{x \in [a, b] : g(x) > 1/k\},$$

per il Lemma 1.2.2, risulta che

$$R_n(b) \geq \frac{1}{k} m(E_k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Poiché $R_n(b)$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, si ottiene che $m(E_k) = 0$. D'altra parte $\{x \in [a, b] : g(x) > 0\}$ è l'unione di tutti gli E_k e quindi anch'esso ha misura nulla, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R'_n(x) = 0$$

per quasi ogni $x \in [a, b]$. □

1.3. Funzioni assolutamente continue

Una funzione f definita in $[a, b]$ si dice *assolutamente continua* in $[a, b]$ se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, fissato comunque un numero finito di intervalli disgiunti (a_i, b_i) , $i = 1, \dots, n$, contenuti in $[a, b]$ e con $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, risulti che

$$(1.4) \quad \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

Notiamo che, per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, se g è sommabile in $[a, b]$, la funzione di x

$$\int_a^x g(t) dt$$

è assolutamente continua in $[a, b]$.

Proposizione 1.3.1. *Se f è assolutamente continua in $[a, b]$, è anche continua e a variazione limitata in $[a, b]$.*

Dim. La prima affermazione è evidente.

Si fissi inoltre $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ tale che per (a_i, b_i) disgiunti e con lunghezza totale minore di δ valga la (1.4). Se $[\alpha, \beta]$ è un intervallo di lunghezza minore di δ , allora

$$V_f[\alpha, \beta] = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i+1})| : \alpha = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \beta \right\} \leq \varepsilon.$$

Suddividiamo allora $[a, b]$ in m intervallini $[\alpha_j, \beta_j]$ della stessa lunghezza; avremo allora che

$$V_f[a, b] \leq \sum_{j=1}^m V_f[\alpha_j, \beta_j] \leq m\varepsilon < \infty,$$

se scegliamo $(b - a)/m < \delta$. □

Esempio 1.3.2. Esistono funzioni continue che non sono assolutamente continue. Per esempio, la funzione dell'Esempio 1.1.1 è continua e non è a variazione limitata e quindi non può essere assolutamente continua.

Si noti anche che la somma, la differenza e il prodotto di due funzioni f, g assolutamente continue in $[a, b]$ è una funzione assolutamente continua in $[a, b]$; così pure il quoziente f/g , supposto $g \neq 0$ in $[a, b]$.

Teorema 1.3.3. *Se f è assolutamente continua in $[a, b]$ e $f' \geq 0$ quasi ovunque in $[a, b]$, allora f è crescente.*

Dim. Sia $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ con $\alpha < \beta$ e sia E l'insieme dei punti di (α, β) dove f è derivabile e f' non negativa; si ha per ipotesi che $m(E) = \beta - \alpha$.

Sia $\varepsilon > 0$; per l'assoluta continuità di f esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni scelta di un numero finito di intervalli disgiunti con lunghezza totale minore di δ , vale la (1.4).

Per ogni $x \in E$, dato che $f'(x) \geq 0 > -\varepsilon$, per ogni $\sigma > 0$ esiste un $h \in (0, \sigma)$ tale che $f(x + h) - f(x) > -\varepsilon h$; gli intervalli $[x, x + h]$ così costruiti con $x \in E$ coprono E nel senso di Vitali. Pertanto, per il Teorema A.1.2, ce n'è un numero finito, $(\alpha_i, \beta_i), i = 1, \dots, n$, tale che

$$\sum_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i) > m(E) - \delta \quad \text{e} \quad f(\beta_i) - f(\alpha_i) > -\varepsilon(\beta_i - \alpha_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Ora, l'insieme $[\alpha, \beta] \setminus \bigcup_{i=1}^n [\alpha_i, \beta_i]$ è costituito da un numero finito di intervalli, $(a_j, b_j), j = 1, \dots, m$, ed ha misura inferiore a δ . Si ha quindi

che

$$\sum_{j=1}^m |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon.$$

D'altra parte, è facile dimostrare che

$$f(\beta) - f(\alpha) = \sum_{i=1}^n [f(\beta_i) - f(\alpha_i)] + \sum_{j=1}^m [f(b_j) - f(a_j)]$$

e quindi

$$f(\beta) - f(\alpha) \geq -\varepsilon \sum_{i=1}^n (\beta_i - \alpha_i) - \varepsilon > -\varepsilon(\beta - \alpha) - \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , $f(\beta) - f(\alpha) \geq 0$. Siccome $[\alpha, \beta]$ è arbitrario in $[a, b]$ con $\alpha < \beta$, è provata la non decrescenza di f . \square

Teorema 1.3.4. *Se f è assolutamente continua in $[a, b]$ e f' è nulla quasi ovunque, f è costante.*

Dim. Infatti per il precedente teorema f è crescente e decrescente. \square

Questo teorema ci dice anche che, se due funzioni assolutamente continue hanno la stessa derivata quasi ovunque (e cioè sono primitive della stessa funzione), allora esse differiscono per una costante. In altre parole, per le funzioni assolutamente continue, vale una parte del Teorema Fondamentale del Calcolo. In quanto rimane di questo paragrafo dimostreremo che, in effetti, per le funzioni assolutamente continue vale tale teorema in ogni sua parte.

Sia E un insieme misurabile contenuto in $[a, b]$ e sia m_E la funzione definita da

$$m_E(x) = \int_a^x \chi_E(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Si noti che m_E è una funzione assolutamente continua e crescente e, posto $F = [a, b] \setminus E$, si ha che $m_E(x) + m_F(x) = x - a$; quindi,

$$(1.5) \quad m'_E + m'_F = 1 \quad \text{quasi ovunque in } [a, b].$$

Teorema 1.3.5. *Sia $E \subset [a, b]$ misurabile e limitato; allora si ha:*

$$\begin{aligned} m'_E &= 1 && \text{quasi ovunque in } E, \\ m'_E &= 0 && \text{quasi ovunque in } [a, b] \setminus E. \end{aligned}$$

Dim. Ricordiamo che ogni insieme E misurabile e limitato si può scrivere come

$$E = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) \setminus Z,$$

dove gli A_n sono aperti tali che $A_{n+1} \supset A_n$ per $n \in \mathbb{N}$ e $m(Z) = 0$. Perciò basterà dimostrare la tesi solo nel caso in cui E è un'unione numerabile di una successione decrescente di aperti.

Se A è aperto si ha evidentemente $m'_A = 1$ in A , perché in un intorno di ogni punto di E si ha $\mathcal{X}_A = 1$. Inoltre, $0 \leq m'_A \leq 1$ quasi ovunque nel complementare di A , per la (1.5).

Supponiamo ora che E sia un'unione numerabile di una successione decrescente di aperti. Si ha allora che $m_{A_n} \geq m_{A_{n+1}}$ e che

$$m_E(x) = \int_a^x \mathcal{X}_E(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x \mathcal{X}_{A_n}(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} m_{A_n}(x),$$

per il Teorema di Beppo Levi.

Si osservi ora che $m'_{A_n} \geq m'_{A_{n+1}}$ quasi ovunque e cioè che la funzione $m_{A_n} - m_{A_{n+1}}$ è crescente. Siccome

$$m_{A_1} - m_E = \sum_{n=1}^{\infty} (m_{A_n} - m_{A_{n+1}}),$$

per il teorema di Fubini 1.2.4 si ha che

$$m'_{A_1} - m'_E = \sum_{n=1}^{\infty} (m'_{A_n} - m'_{A_{n+1}}) = m'_{A_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} m'_{A_n}.$$

Sappiamo però che $m'_{A_n} = 1$ quasi ovunque in A_n (e quindi in E); pertanto $m'_E = 1$ quasi ovunque in E .

Infine, posto $F = [a, b] - E$, si ha analogamente a prima $m'_F = 1$ quasi ovunque in F e, siccome $m'_E + m'_F = 1$ quasi ovunque in $[a, b]$, si ha $m'_E = 0$ quasi ovunque in F . \square

Teorema 1.3.6. *Se f è sommabile in $[a, b]$, la funzione definita da*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

è quasi ovunque derivabile in $[a, b]$ e si ha che

$$F' = f \quad \text{quasi ovunque in } [a, b].$$

In altre parole, F è quasi ovunque una primitiva di f .

Dim. Supponiamo dapprima che f sia semplice:

$$f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}.$$

In tal caso si ha che

$$F = \sum_{i=1}^n c_i m_{E_i}$$

e, per il precedente teorema, $F' = c_i$ quasi ovunque in E_i , $i = 1, \dots, n$, cioè $F' = f$ quasi ovunque.

Supponiamo ora f sommabile e non negativa. Esiste una successione crescente di funzioni semplici s_n che converge puntualmente ad f . Posto

$$S_n(x) = \int_a^x s_n(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = F(x), \quad x \in [a, b].$$

Pertanto

$$F = S_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (S_{n+1} - S_n)$$

e, siccome $S_{n+1} - S_n$ è crescente in $[a, b]$, per il Teorema di Fubini 1.2.4 si ha che

$$F'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S'_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x),$$

per quasi ogni $x \in [a, b]$.

Si conclude osservando che ogni funzione sommabile è differenza di due funzioni sommabili e non negative. \square

Teorema 1.3.7. *Se f è a variazione limitata in $[a, b]$, allora f' è sommabile in $[a, b]$.*

Se inoltre f è assolutamente continua in $[a, b]$, allora

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b].$$

Dim. Supponiamo dapprima che f sia crescente in $[a, b]$ e quindi che $f' \geq 0$ quasi ovunque. Posto $E_n = \{x \in [a, b] : n-1 < f'(x) \leq n\}$ si ha che

$$\int_{[a,b]} f'(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f'(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} n m(E_n),$$

e quindi per provare la sommabilità di f' basta provare che è convergente la serie sopraindicata.

Procedendo come di solito, possiamo dimostrare che ogni E_n è ricoperto nel senso di Vitali da una famiglia di intervalli $[\alpha, \beta]$ tali che

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > n - 1.$$

Il Teorema di copertura di Vitali, tramite la Proposizione A.1.3, implica allora che, dati gli insiemi a due a due disgiunti E_1, \dots, E_n esistono n insiemi a due a due disgiunti P_1, \dots, P_n tali che

$$m(E_i \cap P_i) > \frac{1}{2} m(E_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

e ciascun insieme P_i costituito da un numero finito di intervalli disgiunti $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}), j = 1, \dots, m_i$.

Si ha dunque che

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m_i} [f(\beta_{i,j}) - f(\alpha_{i,j})] &> (i-1) \sum_{j=1}^{m_i} m(E_i \cap [\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}]) = \\ (i-1) m(E_i \cap P_i) &> \frac{i-1}{2} m(E_i). \end{aligned}$$

Siccome f è crescente e gli intervalli $(\alpha_{i,j}, \beta_{i,j})$ sono disgiunti, si ha che

$$f(b) - f(a) > \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} [f(\beta_{i,j}) - f(\alpha_{i,j})] > \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{2} m(E_i).$$

Valendo questa limitazione qualunque sia n , ne segue la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1) m(E_n)$, il che implica, come detto, che f' è sommabile.

Ora, ogni funzione f assolutamente continua è a variazione limitata e pertanto è la differenza di due funzioni crescenti. Quindi, anche in questo caso, f' è sommabile.

Posto

$$g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

si ha che $g' = f'$ quasi ovunque in $[a, b]$, per il precedente teorema. La funzione assolutamente continua $g - f$ ha quindi derivata quasi ovunque nulla e quindi, per il Teorema 1.3.4, è costante in $[a, b]$; essendo $g(a) - f(a) = 0$ si ottiene la tesi. \square

Osservazione 1.3.8. Sia f a variazione limitata in $[a, b]$ e siano g ed s le funzioni definite da

$$g(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \quad \text{e} \quad s(x) = f(x) - g(x), \quad x \in [a, b];$$

È chiaro che s è a variazione limitata e $s' = 0$ quasi ovunque in $[a, b]$.

La funzione s si dice la *parte singolare* di f ; risulta quindi che

$$f = s + g,$$

con g assolutamente continua. Perciò, ogni funzione a variazione limitata è la somma della sua parte assolutamente continua e della sua parte singolare.

1.4. Due esempi

(i) Sappiamo che la funzione di Cantor s detta anche scala di Cantor è continua, crescente e con derivata nulla quasi ovunque. Essa è quindi a variazione limitata, ma non è assolutamente continua; infatti, se lo fosse, varrebbero i Teoremi 1.3.4 e 1.3.7, cioè s sarebbe costante oppure sarebbe $s(1) - s(0) = 0$. È inoltre chiaro che s coincide con la sua parte singolare.

(ii) Si vuole ora definire una funzione continua nell'intervallo $[0, 1]$ e priva di derivata in ogni punto di $[0, 1]$. Ciò dimostrerà che l'ipotesi del Teorema 1.2.3 è essenziale.

Definiamo la funzione:

$$\{x\} = \min\{|x - n| : n \in \mathbb{Z}\}, \quad x \in \mathbb{R};$$

essa è continua (anzi, lipschitziana) e periodica di periodo 1.

Sia ora

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\{10^i x\}}{10^i}, \quad x \in \mathbb{R};$$

f è continua, perché definita da una serie totalmente convergente di addendi continui, dato che

$$0 \leq \frac{\{10^i x\}}{10^i} \leq 10^{-i}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Per la periodicità di f ci si può limitare a considerarla in $[0, 1)$. Ogni $x \in [0, 1)$ ha una rappresentazione decimale definita da $0, a_1 a_2 \cdots a_i \cdots$, dove a_i sono interi compresi fra 0 e 9; questa rappresentazione è univocamente definita supponendo di escludere il caso in cui gli a_i siano definitivamente uguali a 9. Si ha quindi che

$$(1.6) \quad \{10^i x\} = 0, a_{i+1} a_{i+2} \cdots \quad \text{se } 0, a_{i+1} a_{i+2} \leq \frac{1}{2},$$

$$(1.7) \quad \{10^i x\} = 1 - 0, a_{i+1} a_{i+2} \cdots \quad \text{se } 0, a_{i+1} a_{i+2} > \frac{1}{2}.$$

Indichiamo con ε_i un numero uguale a 1 nel caso (1.6) e uguale a -1 nel caso (1.7); indichiamo con σ_j un numero uguale a 1 se $a_j \neq 4$ e $a_j \neq 9$ e

uguale a -1 se $a_j = 4$ oppure $a_j = 9$. Posto $h_j = \sigma_j 10^{-j}$ si ha

$$\begin{aligned} \{10^i(x + h_j)\} - \{10^i(x)\} &= 0 \quad \text{se } i \geq j, \\ \{10^i(x + h_j)\} - \{10^i(x)\} &= 10^{i-j} \sigma_j \varepsilon_i \quad \text{se } i < j. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{f(x + h_j) - f(x)}{h_j} = \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_i$$

e quindi il valore assoluto del rapporto incrementale è un intero che ha la stessa parità di j . Pertanto non esiste finito

$$\lim_{j \rightarrow 0} \frac{f(x + h_j) - f(x)}{h_j}$$

qualunque sia x .

Esercizi

1. Provare il Teorema 1.1.2.
2. Se f è continua e a variazione limitata in $[a, b]$ anche $V_f[a, x]$ è una funzione continua di x in $[a, b]$.
3. Siano $x_i(t)$ funzioni continue in $[a, b]$, $i = 1, \dots, N$ e sia Γ la curva in \mathbb{R}^N di equazione parametrica $x(t) \equiv [x_1(t), \dots, x_N(t)]$. Provare che condizione necessaria e sufficiente perché Γ sia rettificabile è che le funzioni $x_i(t)$ siano a variazione limitata.
4. Costruire una funzione crescente in $[0, 1]$ con discontinuità in tutti i punti di ascissa razionale.
5. Siano f crescente in $[a, b]$ ed J_x l'insieme dei punti di discontinuità di f in $[a, x]$. La funzione

$$s(x) = \sum_{y \in J_x} [f(y^+) - f(y^-)], \quad x \in [a, b],$$

si dice *funzione dei salti* di f .

Provare che $s(x)$ è a variazione limitata in $[a, b]$ ed ha le stesse discontinuità di f ; provare inoltre che la funzione $g = f - s$ è continua e a variazione limitata in $[a, b]$ e che

$$V_f[a, b] = V_g[a, b] + V_s[a, b].$$

6. Calcolare le derivate del Dini nell'origine della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0, \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

7. Costruire una funzione f tale che

$$D'_+ f = 0, \quad D''_+ f = 1, \quad D'_- f = D''_- f = -1.$$

8. Provare che, se f ha un massimo in un punto c , allora $D''_+ f(c) \geq 0$.
9. Sia f definita in $[a, b]$; provare che f è crescente in $[a, b]$ se $D''_+ f \geq 0$ in $[a, b]$.
10. Provare che, se le funzioni $f_n, n \in \mathbb{N}$, sono a variazione limitata in $[a, b]$ e se le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a), \quad \sum_{n=1}^{\infty} V_{f_n}[a, b]$$

sono convergenti, allora la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

converge ad una funzione a variazione limitata f e si ha quasi ovunque

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n.$$

11. Se f è assolutamente continua in $[a, b]$ allora la funzione $[a, b] \ni x \mapsto V_f[a, x]$ è pure assolutamente continua.
12. Costruire un insieme E contenuto in $(-1, 1)$ tale che $m'_E(0) = \frac{1}{2}$ oppure $m'_E(0) = \frac{1}{3}$.
13. Sia f assolutamente continua in $[a, b]$; provare che $V_f[a, x] = \int_a^x |f'(t)| dt$.
14. La funzione $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}$ per $0 < x \leq 1$ e $f(0) = 0$ è assolutamente continua in $[0, 1]$?
15. Sia f assolutamente continua non decrescente in $[a, b]$ e sia $E \subset [a, b]$, con $m(E) = 0$. Provare che $m(f(E)) = 0$.
16. Provare che una funzione lipschitziana è assolutamente continua. Provare che una funzione assolutamente continua è lipschitziana solo se f' è limitata.

Cenni di Analisi Funzionale

In questo capitolo riassumiamo i risultati di Analisi Funzionale che ci saranno necessari negli altri capitoli.

2.1. Spazi di Hilbert

Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{R} (o su \mathbb{C}). Un *prodotto interno* o *scalare* su X è un'applicazione $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ (oppure $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$) con le seguenti proprietà:

- (i) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$ per ogni u, v e $w \in X$;
- (ii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$ per ogni $u, v \in X$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$ (oppure $\alpha \in \mathbb{C}$);
- (iii) $(v, u) = (u, v)$ (oppure $(v, u) = \overline{(u, v)}$) per ogni $u, v \in X$;
- (iv) $(u, u) \geq 0$ per ogni $u \in X$ e $(u, u) = 0$ se e solo se $u = 0$.

Il prodotto interno (\cdot, \cdot) definisce la norma $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$.

Teorema 2.1.1. *Sia X uno spazio vettoriale con prodotto interno (\cdot, \cdot) e norma $\|\cdot\| = (\cdot, \cdot)^{1/2}$. Allora risulta:*

- (i) *(disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \text{ per ogni } x, y \in X;$$

- (ii) *(identità del parallelogramma)*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \text{ per ogni } x, y \in X.$$

Dim. Esercizio 1. □

Uno spazio vettoriale \mathcal{H} dotato di prodotto interno si dice uno *spazio di Hilbert* se è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

Esempio 2.1.2. (1) Lo spazio \mathbb{R}^N con il prodotto definito da

$$(x, y) = \sum_{n=1}^N x_n y_n, \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

è uno spazio di Hilbert su \mathbb{R} . Un altro prodotto scalare rispetto al quale \mathbb{R}^N è uno spazio di Hilbert è il seguente:

$$(x, y)_A = (Ax, y), \quad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

dove A è una matrice $N \times N$ simmetrica e definita positiva.

(2) Lo spazio \mathbb{C}^N con il prodotto interno definito da

$$(z, w) = \sum_{n=1}^N z_n \bar{w}_n, \quad x, y \in \mathbb{C}^N,$$

è uno spazio di Hilbert su \mathbb{C} .

(3) Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura. Lo spazio

$$L^2(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, f \text{ misurabile con } f^2 \text{ sommabile in } X\}$$

è uno spazio di Hilbert sui reali rispetto al prodotto:

$$(f, g) = \int_X f g d\mu.$$

Scegliendo $X = \mathbb{N}$ e $\mu =$ misura che conta, otteniamo lo spazio

$$\ell^2 = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^2 < \infty\}, \quad (x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n.$$

(4) In modo analogo si definisce:

$$L^2_{\mathbb{C}}(X, \mu) = \{f : X \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, f \text{ misurabile con } |f|^2 \text{ sommabile in } X\},$$

con

$$(f, g) = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

Teorema 2.1.3 (Teorema della proiezione). *Sia \mathcal{C} un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in \mathcal{H} .*

Allora, per ogni $u \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{C}$ esiste un unico $v \in \mathcal{C}$ tale che

$$\|u - v\| = \min\{\|u - w\| : w \in \mathcal{C}\} = \text{dist}(u, \mathcal{C}).$$

Inoltre v è caratterizzato dalla proprietà:

$$v \in \mathcal{C} \quad e \quad (u - v, w - v) \leq 0 \quad \text{pe ogni } w \in \mathcal{C}.$$

Dim. Esercizio 1. □

Il Teorema 2.1.3 definisce un operatore $P_C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$ — la *proiezione* di \mathcal{H} su \mathcal{C} — tale che $P_C u = v$ per ogni $u \in \mathcal{H}$.

Proposizione 2.1.4. *Sia \mathcal{C} un sottoinsieme non vuoto, convesso e chiuso in \mathcal{H} . Allora*

$$\|P_C u_1 - P_C u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|, \quad \text{per ogni } u_1, u_2 \in \mathcal{H}.$$

Dim. Siano $v_1 = P_C u_1$ e $v_2 = P_C u_2$; si ha:

$$(u_1 - v_1, w - v_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad (u_2 - v_2, w - v_2) \leq 0$$

per ogni $w \in \mathcal{C}$. In particolare, ponendo $w = v_2$ nella prima disuguaglianza e $w = v_1$ nella seconda, si ottiene:

$$(u_1 - v_1, v_2 - v_1) \leq 0 \quad \text{e} \quad (u_2 - v_2, v_1 - v_2) \leq 0,$$

da cui segue che

$$0 \geq (u_1 - v_1, v_2 - v_1) + (u_2 - v_2, v_1 - v_2) = -(u_1 - u_2, v_1 - v_2) + \|v_1 - v_2\|^2$$

e cioè

$$\|v_1 - v_2\|^2 \leq (u_1 - u_2, v_1 - v_2) \leq \|u_1 - u_2\| \|v_1 - v_2\|,$$

che è quello che basta dimostrare. □

Sia \mathcal{M} un sottospazio vettoriale di \mathcal{H} . Il *complemento ortogonale* di \mathcal{M} è l'insieme

$$\mathcal{M}^\perp = \{u \in \mathcal{H} : (u, v) = 0, \text{ per ogni } v \in \mathcal{M}\}.$$

Teorema 2.1.5. *Sia \mathcal{M} un sottospazio vettoriale non vuoto di \mathcal{H} .*

- (i) \mathcal{M}^\perp è un sottospazio vettoriale chiuso in \mathcal{H} ;
- (ii) se $\overline{\mathcal{M}}$ è la chiusura di \mathcal{M} in \mathcal{H} , allora $(\mathcal{M}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{M}}$;
- (iii) $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.

Dim. (i) È chiaro che \mathcal{M}^\perp è un sottospazio vettoriale di \mathcal{H} . Sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}^\perp$ una successione convergente in \mathcal{H} ad un elemento $u \in \mathcal{H}$. Allora per ogni $v \in \mathcal{M}$ risulta:

$$(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, v) = 0$$

e cioè $u \in \mathcal{M}^\perp$.

(ii) È evidente che $\mathcal{M} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp$ e, poiché $(\mathcal{M}^\perp)^\perp$ è chiuso, $\overline{\mathcal{M}} \subset (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

Sia ora $u \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$. Dato che $\overline{\mathcal{M}}$ è un sottospazio vettoriale chiuso, dal Teorema 2.1.3 otteniamo che

$$(u - P_{\overline{\mathcal{M}}} u, w) = 0$$

per ogni $w \in \overline{\mathcal{M}}$, cioè $u - P_{\mathcal{M}}u \in \mathcal{M}^\perp$, e quindi $(u, u - P_{\mathcal{M}}u) = 0$, dato che $u \in (\mathcal{M}^\perp)^\perp$.

Perciò:

$$\|u - P_{\mathcal{M}}u\|^2 = (u, u - P_{\mathcal{M}}u) - (P_{\mathcal{M}}u, u - P_{\mathcal{M}}u) = 0,$$

ossia $u = P_{\mathcal{M}}u \in \overline{\mathcal{M}}$.

(iii) Se $u \in \mathcal{H}$, abbiamo già visto che $u = P_{\mathcal{M}}u + (u - P_{\mathcal{M}}u)$ con $P_{\mathcal{M}}u \in \overline{\mathcal{M}}$ e $u - P_{\mathcal{M}}u \in \mathcal{M}^\perp$. Poiché $\overline{\mathcal{M}} \cap \mathcal{M}^\perp = \{0\}$, allora tale decomposizione è unica. \square

2.2. Sistemi ortonormali

Sia I un insieme di indici, non necessariamente numerabile. Un insieme $S = \{e_i\}_{i \in I}$ di vettori di \mathcal{H} si dice un *sistema ortonormale* se risulta:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

per ogni $i, j \in I$, dove $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Esempio 2.2.1. (1) In ℓ^2 , l'insieme $S = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con

$$e_n = (0, \dots, 0, 1_n, 0, \dots) = (\delta_{nm})_{m \in \mathbb{N}}.$$

è un sistema ortonormale.

(2) Sia $L^2(\mathbb{T})$ l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, misurabili e periodiche di periodo $T > 0$ e tali che $f \in L^2([0, T])$. L'insieme

$$S = \{e^{2\pi n t/T}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

è un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare

$$(f, g) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

Dati $e_1, \dots, e_n \in S$, qual è la migliore approssimazione di un vettore $u \in \mathcal{H}$ con combinazioni lineari dei vettori e_1, \dots, e_n ? In altre parole, vogliamo minimizzare la funzione

$$f(c_1, \dots, c_n) = \left\| u - \sum_{k=1}^n c_k e_k \right\|$$

al variare di c_1, \dots, c_n in \mathbb{R} .

Se poniamo $\mathcal{H}_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$, poichè \mathcal{H}_n è chiuso, allora

$$\min\{f(c_1, \dots, c_n) : c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\} = \min\{\|u - w\| : w \in \mathcal{H}_n\} = \|u - P_{\mathcal{H}_n}u\|,$$

dove $P_{\mathcal{H}_n} u = \sum_{k=1}^n c_k^* e_k$ per qualche scelta di numeri c_1^*, \dots, c_n^* , e $u - P_{\mathcal{H}_n} u \in \mathcal{H}_n^\perp$. In particolare, $(u - P_{\mathcal{H}_n} u, e_k) = 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$ e quindi $c_k^* = (u, e_k)$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Dato che

$$0 \leq \left\| u - \sum_{k=1}^n c_k^* e_k \right\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{k=1}^n |(u, e_k)|^2,$$

risulta che

$$(2.1) \quad \sum_{k=1}^n |(u, e_k)|^2 \leq \|u\|^2.$$

Teorema 2.2.2 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $S = \{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormale in \mathcal{H} . Allora per ogni $u \in \mathcal{H}$ risulta che*

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 \leq \|u\|^2,$$

dove si è posto

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n |(u, e_{i_k})|^2 : i_1, \dots, i_n \in I \text{ distinti} \right\}.$$

Dim. La tesi segue direttamente dalla (2.1). \square

Il numero $\widehat{u}(i) = (u, e_i)$ si dice il *coefficiente di Fourier* di u di indice $i \in I$.

Osservazione 2.2.3. Si noti che

$$\sum_{i \in I} |(u, e_i)|^2 = \int_I |(u, e_i)|^2 d\mu(i),$$

dove μ è la misura che conta.

Corollario 2.2.4. *Sia $S = \{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormale in \mathcal{H} e sia $u \in \mathcal{H}$.*

Allora l'insieme degli indici $i \in I$ tali che $\widehat{u}(i) \neq 0$ è al più numerabile.

Dim. Infatti

$$\{i \in I : |(u, e_i)|^2 > 0\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_m,$$

dove

$$I_m = \left\{ i \in I : \frac{1}{m+1} \|u\|^2 < |(u, e_i)| \leq \frac{1}{m} \|u\| \right\}, \quad m \in \mathbb{N}$$

per la disuguaglianza di Bessel, ciascun I_m è finito o vuoto. \square

Teorema 2.2.5. *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert separabile. Allora ogni sistema ortonormale in \mathcal{H} è al più numerabile.*

Dim. Sia $D = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme numerabile denso in \mathcal{H} ed S un sistema ortonormale in \mathcal{H} . Per ogni $e_i \in S$ esiste $n_i \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|e_i - u_{n_i}\| < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Se $i \neq j$, si ha che

$$\sqrt{2} = \|e_i - e_j\| \leq \|e_i - u_{n_i}\| + \|u_{n_i} - u_{n_j}\| + \|e_j - u_{n_j}\|$$

e quindi $\|u_{n_i} - u_{n_j}\| > \sqrt{2}/3$, ossia $n_i \neq n_j$.

Abbiamo dunque stabilito una corrispondenza biunivoca di I con un sottoinsieme di \mathbb{N} . \square

Osserviamo ora che, a partire da una successione qualsiasi $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{H} , possiamo sempre costruire un sistema ortonormale $S = \{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mediante il procedimento di *ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*: si pone infatti

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$$

e per ricorrenza si definisce:

$$e_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}, \text{ dove } v_k = u_k - \sum_{j=1}^{k-1} (u_k, e_j) e_j, \quad k = 2, 3, \dots$$

Se accadesse che $v_k = 0$ per qualche k , allora eliminiamo il vettore u_k , perchè è linearmente dipendente con i precedenti.

Un sistema ortonormale S in \mathcal{H} si dice *completo* oppure si dice che S è una *base (hilbertiana) ortonormale* per \mathcal{H} , se

$$(u, e_i) = 0 \text{ per ogni } i \in I \text{ implica che } u = 0.$$

Esempio 2.2.6. Il sistema ortonormale in ℓ^2 definito nell'Esempio 2.2.1 (1) è completo, infatti se $(x, e_n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta che $x_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e quindi $x = 0$.

Teorema 2.2.7. *Sia $S = \{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormale in \mathcal{H} .*

Se $\overline{\text{span}(S)} = \mathcal{H}$ allora S è completo.

Dim. Sia $u \in \mathcal{H}$ tale che $(u, e_i) = 0$ per ogni $i \in I$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u_\varepsilon \in \text{span}(S)$ tale che $\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$; dato che u_ε è una combinazione lineare finita di elementi di S , allora $(u, u_\varepsilon) = 0$. Perciò $\varepsilon^2 > \|u - u_\varepsilon\|^2 = \|u\|^2 + \|u_\varepsilon\|^2 \geq \|u\|^2$ e cioè $\|u\| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, ossia $u = 0$. \square

Teorema 2.2.8. Sia $S = \{e_i\}_{i \in I}$ un sistema ortonormale completo in \mathcal{H} .

Allora $\overline{\text{span}(S)} = \mathcal{H}$. In particolare, per ogni u e $v \in \mathcal{H}$ risulta:

- (i) $u = \sum_{i \in I} \widehat{u}(i) e_i$;
- (ii) $\|u\|^2 = \sum_{i \in I} |\widehat{u}(i)|^2$;
- (iii) $(u, v) = \sum_{i \in I} \widehat{u}(i) \widehat{v}(i)$.

La (i) e la (ii) passano sotto il nome di identità di Parseval.

Dim. (i) Sia $u \in \mathcal{H}$; per il Corollario 2.2.4, si ha che $\widehat{u}(i) \neq 0$ solo per un'infinità numerabile di indici $i \in I$: indichiamo questi con $\widehat{u}(n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Per la disuguaglianza di Bessel (Teorema 2.2.2), la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\widehat{u}(n)|^2$ converge e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\| \sum_{k=m+1}^n \widehat{u}(k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\widehat{u}(k)|^2 < \varepsilon^2,$$

per ogni $n, m > \nu$. Perciò la successione $\sum_{k=1}^n \widehat{u}(k) e_k$ è di Cauchy e cioè converge ad un $v \in \mathcal{H}$ ed inoltre

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{u}(k) e_k = \sum_{i \in I} \widehat{u}(i) e_i.$$

Ora, per ogni $i \in I$ risulta che

$$(u - v, e_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(u - \sum_{k=1}^n \widehat{u}(k) e_k, e_i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\widehat{u}(i) - \widehat{u}(n) \delta_{ni}] = 0.$$

Per la completezza di S , segue che $u - v = 0$ e cioè $v = u$.

(ii) Dalla (i) segue che

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \left(u, \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \widehat{u}(k) e_k \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \widehat{u}(k) (u, e_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{u}(k)|^2 = \sum_{i \in I} |\widehat{u}(i)|^2. \end{aligned}$$

(iii) Dalla (ii) si ottiene:

$$\begin{aligned}(u, v) &= \frac{1}{4} \{ \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{i \in I} |\hat{u}(i) + \hat{v}(i)|^2 - \sum_{i \in I} |\hat{u}(i) - \hat{v}(i)|^2 \right\} = \\ &= \sum_{i \in I} \hat{u}(i) \hat{v}(i).\end{aligned}$$

Osservazione 2.2.9. Si noti che, se vale la (iii) per ogni u e $v \in \mathcal{H}$, allora S è un sistema ortonormale completo. Infatti, se esistesse $z \neq 0$ ortogonale ad ogni e_i , scelti $u = v = z$ in (iii) si avrebbe:

$$\|z\|^2 = (u, v) = \sum_{i \in I} \hat{u}(i) \hat{v}(i) = 0.$$

Osservazione 2.2.10. Quanto dimostrato fin qui implica che ogni spazio di Hilbert separabile ammette una base ortonormale. Infatti da un sottoinsieme numerabile denso D possiamo costruire un sistema ortonormale S , mediante il procedimento di Gram-Schmidt.

Tale sistema è completo; infatti se u è ortogonale ad ogni $e_i \in S$, poiché per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $u_n \in D$ tale che $\|u - u_n\| < \varepsilon$ ed inoltre

$$(u, u_n) = (u, v_n) + \left(u, \sum_{k=1}^{n-1} (u_n, e_k) e_k \right) = (u, \|v_n\| e_n) = 0,$$

risulta $\|u\|^2 \leq \|u\|^2 + \|u_n\|^2 = \|u - u_n\|^2 < \varepsilon^2$ e cioè $u = 0$.

2.3. Funzionali ed operatori lineari

Siano X ed Y due spazi normati. Un'applicazione $A : X \rightarrow Y$ si dice

- (i) un *operatore lineare* se $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ per ogni $x, y \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
- (ii) un *operatore continuo* se, per ogni successione $x_n \in X$ tale che $x_n \rightarrow x$ in X , risulta che $Ax_n \rightarrow Ax$;
- (iii) un *operatore limitato* se esiste una costante $c \geq 0$ tale che

$$\|Ax\|_Y \leq c\|x\|_X \quad \text{per ogni } x \in X;$$

in questo caso si pone per definizione

$$(2.2) \quad \|A\| = \sup\{\|Au\|_Y : \|u\|_X = 1\} = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}.$$

È facile verificare che (2.2) definisce una norma nello spazio vettoriale

$$\mathcal{L}(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y : A \text{ lineare e limitato}\}.$$

Poniamo inoltre $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$.

Il seguente risultato è di facile dimostrazione.

Teorema 2.3.1. *Sia $A : X \rightarrow Y$ un operatore lineare. Allora A è continuo se e solo se A è limitato.*

Dim. Esercizio 4. □

Di interesse particolare è il caso in cui $Y = \mathbb{R}$: si dice che A un è *funzionale lineare* e per chiarezza in questo case useremo la lettera L al posto di A .

Lo spazio vettoriale $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ dei funzionali lineari limitati su X si dice lo *spazio duale* di X .

Teorema 2.3.2 (Teorema di rappresentazione di Riesz). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia \mathcal{H}' il suo duale.*

Allora, per ogni $L \in \mathcal{H}'$, esiste un solo $v \in \mathcal{H}$ tale che

$$Lu = (u, v) \text{ per ogni } u \in \mathcal{H} \text{ e } \|L\| = \|v\|.$$

Dim. Sia $L \in \mathcal{H}'$, non identicamente nullo e sia \mathcal{M} il nucleo di L . Poichè L è lineare e continuo, allora \mathcal{M} è un sottospazio vettoriale chiuso in \mathcal{H} . Sia $u_0 \notin \mathcal{M}$ e sia $v_0 = P_{\mathcal{M}}u_0$; allora $u_0 = v_0 + (u_0 - v_0)$, dove $v_0 \in \mathcal{M}$ e $u_0 - v_0 \in \mathcal{M}^\perp$. Se $u \in \mathcal{H}$, allora possiamo scrivere

$$u = \lambda (u_0 - v_0) + P_{\mathcal{M}}u,$$

dove $Lu = \lambda L(u_0 - v_0) = Lu_0$ e cioè $\lambda = Lu/Lu_0$; perciò, scegliendo

$$v = \frac{u_0 - v_0}{\|u_0 - v_0\|^2} Lu_0,$$

si ha:

$$(u, v) = \lambda (u_0 - v_0, v) + (P_{\mathcal{M}}u, v) = Lu,$$

dato che $v \in \mathcal{M}^\perp$ e $P_{\mathcal{M}}u \in \mathcal{M}$.

Infine, è chiaro che $|Lu| = |(u, v)| \leq \|v\|\|u\|$ per ogni $u \in \mathcal{H}$ e quindi $\|L\| \leq \|v\|$. D'altra parte, preso $u = v/\|v\|$, si ha che $Lu = (u, v) = \|v\|$ e quindi $\|v\| \leq \|L\|$. □

Una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ in uno spazio normato si dice *debolmente convergente* ad un elemento $u \in X$ — e si scriverà $u_n \rightharpoonup u$ — se, per ogni $L \in X'$, $Lu_n \rightarrow Lu$ per $n \rightarrow \infty$. È chiaro che, se $u_n \rightarrow u$ in X , allora anche $u_n \rightharpoonup u$.

Per il Teorema 2.3.2 appena dimostrato, $u_n \rightharpoonup u$ in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} se

$$(u_n, v) \rightarrow (u, v) \text{ per ogni } v \in \mathcal{H}.$$

Il risultato che segue ci informa che la norma di uno spazio di Hilbert è una funzione semicontinua inferiormente rispetto alla convergenza debole.

Teorema 2.3.3. *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Se $u_n \rightharpoonup u$ in \mathcal{H} , allora*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| \geq \|u\|.$$

Se inoltre $\|u_n\| \rightarrow \|u\|$, allora $u_n \rightarrow u$ in \mathcal{H} .

Dim. Esercizio 5. □

Il teorema di Bolzano-Weierstrass asserisce che ogni insieme limitato di \mathbb{R}^N contiene una sottosuccessione convergente — è cioè relativamente compatto per successioni. In dimensione infinita ciò non accade, come mostra la proposizione seguente.

Proposizione 2.3.4. *Se ogni successione limitata in \mathcal{H} contiene una sottosuccessione convergente, allora \mathcal{H} ha dimensione finita.*

Dim. Se \mathcal{H} avesse dimensione infinita allora conterrebbe un sistema ortonormale $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (almeno) numerabile. Dato che $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ se $n \neq m$, allora $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non potrebbe contenere alcuna sottosuccessione convergente. □

Il prossimo risultato si può riassumere dicendo che gli insiemi limitati in uno spazio di Hilbert sono per lo meno debolmente compatti.

Teorema 2.3.5 (Teorema di Banach-Alaoglu). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert separabile e supponiamo che esista una costante $c > 0$ tale che $\|u_n\| \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Allora la successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contiene una sottosuccessione che converge debolmente ad un elemento di \mathcal{H} .

Dim. Sia $D = \{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme (numerabile) denso in \mathcal{H} .

Poiché $|(u_n, v_1)| \leq \|u_n\| \|v_1\| \leq c \|v_1\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{u_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ di $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che (u_n^1, v_1) converge ad un numero reale se $n \rightarrow \infty$.

Poiché $|(u_n^1, v_2)| \leq \|u_n^1\| \|v_2\| \leq c \|v_2\|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste una sottosuccessione $\{u_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ di $\{u_n^1\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che (u_n^2, v_2) converge ad un numero reale se $n \rightarrow \infty$. Iterando questo ragionamento, fissato $k \in \mathbb{N}$ esiste $\{u_n^k\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_n^{k-1}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \dots \subseteq \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che (u_n^k, v_k) converge ad un numero reale se $n \rightarrow \infty$.

La successione $\{u_n^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sarà allora tale che (u_n^n, v_k) converge se $n \rightarrow \infty$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ fissato.

Fissati allora $v \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|v - v_k\| < \frac{\varepsilon}{3c},$$

ed inoltre esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|(u_n^n, v_k) - (u_m^m, v_k)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

per ogni $n, m > \nu$.

Perciò, per ogni $n, m > \nu$ risulta che

$$\begin{aligned} |(u_n^n, v) - (u_m^m, v)| &\leq \\ &|(u_n^n, v) - (u_n^n, v_k)| + |(u_n^n, v_k) - (u_m^m, v_k)| + |(u_m^m, v_k) - (u_m^m, v)| < \\ &|(u_n^n, v - v_k)| + \frac{\varepsilon}{3} + |(u_m^m, v_k - v)| \leq \\ &\|u_n^n\| \|v - v_k\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_m^m\| \|v - v_k\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ciò segue che è ben definito il funzionale $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tale che

$$Lv = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^n, v)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$. È chiaro inoltre che L è lineare e limitato con $\|L\| \leq c$. Per il Teorema 2.3.2, esiste $u \in \mathcal{H}$ tale che $Lv = (u, v)$ per ogni $v \in \mathcal{H}$; dunque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n^n, v) = (u, v)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$, ossia $u_n^n \rightharpoonup u$ per $n \rightarrow \infty$. \square

Siano \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 spazi di Hilbert e sia $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ un operatore lineare. Il *rango* di A è il sottospazio di \mathcal{H}_2 :

$$R(A) = \{Au : u \in \mathcal{H}_1\},$$

mentre il *nucleo* di A è il sottospazio di \mathcal{H}_1 :

$$N(A) = \{u \in \mathcal{H}_1 : Au = 0\}.$$

Osservazione 2.3.6. Si noti che, se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $N(A)$ è sempre un sottospazio vettoriale chiuso. Invece il sottospazio vettoriale $R(A)$ non è detto che sia chiuso.

Per esempio, sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^N)$ e sia $a \in L^2(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$, $a \notin C^0(\mathbb{R}^N)$. Sia inoltre $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definito da $Au = a \star u$.

Per la disuguaglianza di Young $\|Au\| = \|a \star u\| \leq \|a\|_1 \|u\|$ per ogni $u \in \mathcal{H}$, e quindi A è limitato e $\|A\| \leq \|a\|_1$.

Per la disuguaglianza di Hölder, $\|a \star u\|_\infty \leq \|a\|_2 \|u\|$. Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ una successione convergente ad a in $L^2(\mathbb{R}^N)$; allora $a_n \star u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, dato che

$$\|a_n \star u - a \star u\|_\infty \leq \|a_n - a\|_2 \|u\|,$$

$a_n \star u$ converge uniformemente ad $a \star u$ e quindi $Au = a \star u \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Questo significa che $R(A) \subset C^0(\mathbb{R}^N)$.

Prendiamo ora $u_n(x) = n^N j(nx)$ con $j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} j \, dx = 1$; è chiaro che $Au_n = a \star u_n$ converge ad a in \mathcal{H} . Abbiamo quindi dimostrato che $a \in \overline{R(A)}$, dimostrando quindi che $R(A)$ non può coincidere con la sua chiusura, dato che $a \notin R(A)$.

Sia ora $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$; fissato $u \in \mathcal{H}_2$, il funzionale lineare $f_u : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f_u(v) = (u, Av)_2$ per ogni $v \in \mathcal{H}_1$ è limitato su \mathcal{H}_1 e quindi, per il Teorema 2.3.2, esiste un solo elemento $A^*u \in \mathcal{H}_1$ tale che

$$(A^*u, v)_1 = (u, Av)_2 \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{H}_1.$$

L'applicazione $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ è lineare e come vedremo limitata: si dice che A^* è l'operatore aggiunto di A .

Proposizione 2.3.7. *Sia $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Allora*

$$\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp \quad \text{e} \quad \overline{R(A^*)} = N(A)^\perp;$$

inoltre

$$\mathcal{H}_2 = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 = \overline{R(A^*)} \oplus N(A).$$

Dim. Poiché $R(A)$ è un sottospazio vettoriale di \mathcal{H}_2 , risulta che $\mathcal{H}_2 = \overline{R(A)} \oplus R(A)^\perp$, per la Proposizione 2.1.5. D'altra parte, dato che

$$(Au, v)_2 = (u, A^*v)_1$$

per ogni $u \in \mathcal{H}_1$ e $v \in \mathcal{H}_2$, si ha che $v \in R(A)^\perp$ se e solo se $v \in N(A^*)$ e quindi $R(A)^\perp = N(A^*)$, da cui $\mathcal{H}_2 = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$. Inoltre $\overline{R(A)} = (R(A)^\perp)^\perp = N(A^*)^\perp$

In modo analogo, si dimostrano le altre due asserzioni. \square

Proposizione 2.3.8. *Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ allora anche $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ e $\|A\| = \|A^*\| = \sqrt{\|AA^*\|} = \sqrt{\|A^*A\|}$.*

Dim. Per ogni $u \in \mathcal{H}$ si ha che

$$(2.3) \quad \|A^*u\|^2 = (A^*u, A^*u) = (AA^*u, u) \leq \|AA^*u\| \|u\| \leq \|A\| \|A^*u\| \|u\|,$$

e quindi $\|A^*u\| \leq \|A\| \|u\|$, da cui $\|A^*\| \leq \|A\|$, cioè anche A^* è limitato. Inoltre, dall'ultima disuguaglianza in (2.3), si ottiene che $\|AA^*\| \leq \|A^*\| \|A\|$, mentre dalla prima disuguaglianza in (2.3), si ha che

$$\|A^*u\|^2 \leq \|AA^*u\| \|u\| \leq \|AA^*\| \|u\|^2,$$

e quindi $\|A^*\|^2 \leq \|AA^*\| \leq \|A\|\|A^*\|$. Scambiando A^* con A , si ottiene che $\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|\|A\|$. Perciò $\|A^*\| = \|A\| = \sqrt{\|AA^*\|} = \sqrt{\|A^*A\|}$. \square

Si dice che A è *simmetrico* o *autoaggiunto* se $A^* = A$.

Proposizione 2.3.9. *Sia $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ simmetrico. Allora*

$$\|A\| = \sup\{(Au, u) : \|u\| = 1\}.$$

Dim. Sia M il secondo membro della precedente uguaglianza e sia $u \in \mathcal{H}$ con $\|u\| = 1$. Dato che $(Au, u) \leq \|A\|$, allora $M \leq \|A\|$. D'altra parte, è facile mostrare che

$$4(Au, v) = (A[u + v], u + v) - (A[u - v], u - v).$$

Presi u e v unitari, abbiamo allora

$$4(Au, v) \leq M\{\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2\} = 2M\{\|u\|^2 + \|v\|^2\} = 4M,$$

per la definizione di M , e dunque $(Au, v) \leq M$. Scegliendo $v = Au/\|Au\|$, si ha che $\|Au\| \leq M$ e quindi $\|A\| \leq M$. \square

Esempio 2.3.10. Siano $\mathcal{H}_1 = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{R}^M$ e $A : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ la matrice $M \times N$ di elementi a_{ij} , $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$. Allora $A^* : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ non è altro che la matrice trasposta $N \times M$ di elementi a_{ji} , $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, N$.

Esempio 2.3.11. Sia $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \ell^2(\mathbb{C})$ e sia $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definito da

$$Au = \sum_{n \in \mathbb{N}} a(n) \hat{u}(n) e_n,$$

dove $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a(n)| < \infty.$$

Allora

$$\|A\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a(n)| \quad \text{e} \quad A^*u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{a(n)} \hat{u}(n) e_n.$$

2.4. Il teorema di Banach-Steinhaus

Utilizzeremo il seguente risultato di topologia (per una dimostrazione, si veda [Ru]).

Teorema 2.4.1 (Lemma di Baire). *In uno spazio metrico completo X l'intersezione numerabile di sottoinsiemi densi aperti di X è densa in X o, equivalentemente, l'unione numerabile di chiusi con interno vuoto ha interno vuoto.*

Teorema 2.4.2 (Banach-Steinhaus). *Siano X uno spazio di Banach ed Y uno spazio vettoriale normato. Sia inoltre $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di operatori lineari e limitati di X in Y .*

Allora o risulta che

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| < \infty,$$

o esiste $x \in X$ tale che

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|_Y = \infty.$$

Dim. Sia

$$\varphi(x) = \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\|, \quad x \in X,$$

e sia $V_n = \{x \in X : \varphi(x) > n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ogni funzione $x \mapsto \|T_\alpha x\|$ è continua e quindi φ è semicontinua inferiormente; dunque ogni V_n è aperto.

Se ogni V_n è denso in X , allora per il Teorema 2.4.1 anche $\bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$ è denso in X e quindi $\varphi(x) = \infty$ per ogni $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$.

Altrimenti, se esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che V_ν non è denso in X , esisterà $x_0 \in X$ ed $r > 0$ tale che $B_X(x_0, r) \cap V_\nu = \emptyset$; ciò implica che $\varphi(x_0 + y) \leq \nu$ per ogni y tale che $\|y\| \leq r$ e quindi

$$\|T_\alpha(x_0 + y)\| \leq \nu,$$

per ogni $\alpha \in A$ ed ogni $\|y\| \leq r$. Perciò, posto $y = rx/\|x\|$, si ha:

$$\|T_\alpha x\| = r^{-1}\|x\|\|T_\alpha y\| \leq r^{-1}\|x\|\{\|T_\alpha x_0\| + \|T_\alpha(x_0 + y)\|\} \leq \frac{2\nu}{r}\|x\|,$$

per ogni $\alpha \in A$ e quindi

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| \leq \frac{2\nu}{r}.$$

□

Teorema 2.4.3 (Teorema dell'applicazione aperta). *Siano X ed Y due spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare, limitato e suriettivo.*

Allora esiste una costante $c > 0$ tale che

$$T(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, c).$$

In particolare, l'immagine di un aperto di X è un aperto di Y .

Dim. Dimostriamo dapprima che esiste $c > 0$ tale che

$$(2.4) \quad \overline{T(B_X(0, 1))} \supset B_Y(0, 2c).$$

Siano $Y_n = \overline{nT(B_X(0, 1))}$; poiché $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$, per il Teorema 2.4.1, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che l'interno di Y_ν è non vuoto. Ne segue che anche l'interno di $\overline{T(B_X(0, 1))}$ è non vuoto.

Siano $c > 0$ e $y_0 \in Y$ tali che $B_Y(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_X(0, 1))}$; in particolare $\overline{T(B_X(0, 1))}$ contiene y_0 e, per simmetria, $-y_0$. Perciò

$$B_Y(0, 4c) = -y_0 + B_Y(y_0, 4c) \subset \overline{T(B_X(0, 1))} + \overline{T(B_X(0, 1))} = \overline{2T(B_X(0, 1))},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $\overline{T(B_X(0, 1))}$ è convesso. Dunque vale la (2.4).

Dimostriamo ora l'asserzione del teorema. Fissiamo $y \in Y$ con $\|y\| < c$. Dalla (2.4) segue che $y \in \overline{T(B_X(0, 1/2))}$, cioè, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $z \in X$ con $\|z\| < 1/2$ tale che $\|y - Tz\| < \varepsilon$. Scegliendo successivamente $\varepsilon = c/2^n$, $n = 1, 2, \dots$, esiste una successione $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tale che

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n} \quad \text{e} \quad \|y - T(z_1 + \dots + z_n)\| < \frac{c}{2^n},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

La successione $x_n = z_1 + \dots + z_n$ è pertanto di Cauchy. Sia x il limite di x_n ; risulta che $y = Tx$, dato che T è continuo. Si noti infine che

$$\|x_n\| \leq \|z_1\| + \sum_{k=2}^n \|z_k\| \leq \|z_1\| + \frac{1}{2},$$

e quindi $\|x\| \leq \|z_1\| + \frac{1}{2} < 1$, cioè $y \in T(B_X(0, 1))$.

Se ora A è un aperto di X e $y \in T(A)$, esiste $x \in A$ tale che $y = Tx$. Poiché A è aperto, esiste $B_X(x, r) \subset A$; perciò, per quanto finora dimostrato, esiste $c > 0$ tale che

$$\begin{aligned} B_Y(y, rc) &= y + r B_Y(0, c) \subset y + r T(B_X(0, r)) = T(x + B_X(0, r)) = \\ &= T(B_X(x, r)) \subset T(A), \end{aligned}$$

cioè $T(A)$ è aperto. □

Corollario 2.4.4. *Siano X ed Y due spazi di Banach e sia $T : X \rightarrow Y$ un operatore lineare, limitato e biunivoco. Allora $T^{-1} : Y \rightarrow X$ è limitato.*

Dim. Per ogni $x \in X$ con $x \neq 0$, si ha che $u = x/(\|x\| - \varepsilon) \notin B_X(0, 1)$ per ogni $0 < \varepsilon < \|x\|$. Perciò $Tu \notin T(B_X(0, 1))$ e quindi $Tu \notin B(0, c)$, per il Teorema 2.4.3. Perciò

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\| - \varepsilon} = \|Tu\| \geq c$$

e, facendo tendere ε a zero si ottiene che

$$\|x\| \leq c^{-1}\|Tx\|,$$

per ogni $x \neq 0$.

Ciò implica che T^{-1} è limitato. \square

2.5. I teoremi di Stampacchia e di Lax-Milgram

Richiamiamo il teorema di Picard.

Teorema 2.5.1 (Teorema di Picard della contrazione). *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $F : X \rightarrow X$ una contrazione e cioè tale che esiste $\alpha \in (0, 1)$ tale che*

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

per ogni $x, y \in X$.

Allora esiste un solo $\bar{x} \in X$ tale che $F(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ e sia $x_{n+1} = F(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Risulta:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(F(x_n), F(x_{n-1})) \leq \alpha d(x_n, x_{n-1}) = \\ &\alpha d(F(x_{n-1}), F(x_{n-2})) \leq \alpha^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \alpha^n d(x_1, x_0), \end{aligned}$$

e perciò

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq \sum_{k=1}^p d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=1}^p \alpha^{n+k-1} = \\ &d(x_1, x_0) \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \alpha^n. \end{aligned}$$

Dunque $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy e quindi esiste $\bar{x} \in X$ tale che $x_n \rightarrow \bar{x}$ se $n \rightarrow \infty$. Poiché F è continua, si ha che

$$\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_{n-1}) = F(\bar{x}).$$

Se x^* fosse un altro punto fisso, allora

$$d(\bar{x}, x^*) = d(F(\bar{x}), F(x^*)) \leq \alpha d(\bar{x}, x^*),$$

e quindi $\bar{x} = x^*$ dato che $\alpha < 1$. \square

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Una forma bilineare $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *continua* se esiste una costante $C > 0$ tale che

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \text{per ogni } u, v \in \mathcal{H};$$

essa si dice inoltre *coercitiva* se esiste $\alpha > 0$ tale che

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{H}.$$

Teorema 2.5.2 (Stampacchia). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia \mathcal{H}' il suo duale. Sia $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coercitiva e sia \mathcal{K} un sottoinsieme convesso, chiuso e non vuoto di \mathcal{H} .*

Allora, per ogni $L \in \mathcal{H}'$ esiste un'unico $u \in \mathcal{K}$ tale che

$$(2.5) \quad a(u, v - u) \geq L(v - u) \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{K}.$$

Inoltre se a è simmetrica, allora u è caratterizzata dalle proprietà

$$u \in \mathcal{K} \quad e \quad \frac{1}{2} a(u, u) - Lu = \min \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - Lv : v \in \mathcal{K} \right\}.$$

Dim. Per il Teorema 2.3.2, esiste $f \in \mathcal{H}$ tale che $Lu = (f, u)$ per ogni $u \in \mathcal{H}$. Inoltre, fissato $u \in \mathcal{H}$, l'applicazione $v \mapsto a(u, v)$ è lineare e continua su \mathcal{H} e quindi esiste un solo elemento $Au \in \mathcal{H}$ tale che $a(u, v) = (Au, v)$ per ogni $v \in \mathcal{H}$.

È chiaro che $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ è un operatore lineare ed inoltre

$$|(Au, v)| = |a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$$

per ogni $u, v \in \mathcal{H}$, da cui segue che $\|Au\| \leq C \|u\|$, cioè A è limitato. Risulta anche che

$$(Au, u) \geq \alpha \|u\|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{H}$, dato che a è coercitiva.

Bisogna dunque trovare $u \in \mathcal{K}$ tale che

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u)$$

per ogni $v \in \mathcal{K}$; questo equivale a dire che per qualche $\beta > 0$ risulta:

$$(\beta f - \beta Au + u - u, v - u) \leq 0$$

per ogni $v \in \mathcal{K}$. Quest'ultima disuguaglianza caratterizza u come la proiezione di $\beta f - \beta Au + u$ su \mathcal{K} , cioè

$$u = P_{\mathcal{K}}(\beta f - \beta Au + u)$$

(vedi Teorema 2.1.3).

Ci siamo dunque ricondotti a dimostrare l'esistenza di un $\beta > 0$ tale che l'applicazione $F : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ definita da $F(v) = P_{\mathcal{K}}(\beta f - \beta Av + v)$ abbia un punto fisso.

Per la Proposizione 2.1.4, risulta:

$$\begin{aligned} \|F(v_1) - F(v_2)\| &= \|P_{\mathcal{K}}(\beta f - \beta Av_1 + v_1) - P_{\mathcal{K}}(\beta f - \beta Av_2 + v_2)\| \leq \\ &\|v_1 - \beta Av_1 - (v_2 - \beta Av_2)\| \end{aligned}$$

per ogni $v_1, v_2 \in \mathcal{K}$. Perciò:

$$\begin{aligned} \|F(v_1) - F(v_2)\|^2 &= \\ & \|v_1 - v_2\|^2 - 2\beta(A[v_1 - v_2], v_1 - v_2) + \beta^2\|A(v_1 - v_2)\|^2 \leq \\ & \|v_1 - v_2\|^2 - 2\alpha\beta\|v_1 - v_2\|^2 + \beta^2C^2\|v_1 - v_2\|^2 = \\ & (1 - 2\alpha\beta + \beta^2C^2) \|v_1 - v_2\|^2, \end{aligned}$$

per ogni $v_1, v_2 \in \mathcal{K}$, per la coercività e la continuità di A .

Scegliendo $\beta < 2\alpha/C^2$, abbiamo che $1 - 2\alpha\beta + \beta^2C^2 < 1$ e quindi F è una contrazione (sullo spazio metrico completo \mathcal{K}) e perciò esiste un solo $u \in \mathcal{K}$ tale che

$$u = F(u) = P_{\mathcal{K}}(\beta f - \beta Au + u).$$

L'elemento $u \in \mathcal{K}$ è unico. Infatti, se $u_1, u_2 \in \mathcal{K}$ fossero due elementi soddisfacenti la (2.5) per ogni $v \in \mathcal{K}$, scegliendo successivamente in (2.5) $u = u_1$ e $v = u_2$, $u = u_2$ e $v = u_1$, si avrebbe rispettivamente:

$$a(u_1, u_2 - u_1) \geq L(u_2 - u_1) \quad \text{e} \quad a(u_2, u_1 - u_2) \geq L(u_1 - u_2).$$

Perciò si otterrebbe:

$$\begin{aligned} \alpha\|u_2 - u_1\|^2 &\leq a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = a(u_2, u_2 - u_1) - a(u_1, u_2 - u_1) = \\ & - a(u_2, u_1 - u_2) - a(u_1, u_2 - u_1) \leq \\ & - L(u_1 - u_2) - L(u_2 - u_1) = 0, \end{aligned}$$

ossia $u_1 = u_2$.

Nel caso in cui a è simmetrica, allora $[u, v] = a(u, v)$ è un (altro) prodotto scalare su \mathcal{H} , che induce la norma $[u, u]^{1/2}$, che risulta equivalente alla norma $\|\cdot\|$, dato che a è continua e coercitiva.

Applicando il Teorema 2.3.2 allo spazio di Hilbert $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$, esiste $g \in \mathcal{H}$ tale che

$$[g, v] = Lv,$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$. Perciò, per ogni $v \in \mathcal{K}$ risulta che

$$0 \geq L(v - u) - a(u, v - u) = [g, v - u] - [u, v - u],$$

cioè u non è altro che la proiezione $P_{\mathcal{K}}g$ nel senso del prodotto scalare $[\cdot, \cdot]$.

In altre parole, per il Teorema 2.1.3, u minimizza il funzionale $v \mapsto [g - v, g - v]^{1/2} = a(g - v, g - v)^{1/2}$ su \mathcal{K} , quindi il funzionale $v \mapsto a(g - v, g - v)$, o, ancora, il funzionale $v \mapsto \frac{1}{2} a(v, v) - a(g, v) = \frac{1}{2} a(v, v) - Lv$. \square

Teorema 2.5.3 (Lax-Milgram). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia \mathcal{H}' il suo duale. Sia $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coercitiva.*

Allora, per ogni $L \in \mathcal{H}'$ esiste un'unico $u \in \mathcal{H}$ tale che

$$a(u, v) = Lv \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{H}.$$

Inoltre se a è simmetrica, allora u è caratterizzato dalla proprietà

$$\frac{1}{2} a(u, u) - Lu = \min \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - Lv : v \in \mathcal{H} \right\}.$$

Dim. Per il Teorema 2.5.2 (con $\mathcal{K} = \mathcal{H}$), esiste $u \in \mathcal{H}$ tale che

$$a(u, v - u) \geq L(v - u)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$. Poiché anche $u - v \in \mathcal{H}$, allora

$$a(u, v - u) \leq L(v - u)$$

per ogni $v \in \mathcal{H}$ e quindi $a(u, w) = Lw$ per ogni $w = v - u \in \mathcal{H}$. \square

2.6. Operatori compatti

Un operatore lineare $K : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ si dice *compatto* se, per ogni successione limitata $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_1$, esiste una sottosuccessione $\{u_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\{Ku_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge in \mathcal{H}_2 .

Esempio 2.6.1. Sia \mathcal{H} come nell'Esempio 2.3.11 e sia $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definito da

$$K_n u = \sum_{j=1}^n a(j) \hat{u}(j) e_j, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Si ha che $R(K_n) = \text{span}\{e_j\}_{j=1, \dots, n}$, che è uno spazio lineare di dimensione finita. L'immagine di ogni limitato è quindi un sottoinsieme limitato di uno spazio di dimensione finita e quindi è relativamente compatta. Perciò, K_n è compatto.

Un operatore il cui rango abbia dimensione finita si dice di *rango finito*.

Proposizione 2.6.2. *Se $K : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ è compatto, allora è limitato.*

Dim. Se K non fosse limitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esisterebbe $u_n \in \mathcal{H}_1$ tale che $\|Ku_n\|_2 > n \|u_n\|_1$. Dato che $u_n \neq 0$, posto $v_n = u_n / \|u_n\|_1$, avremmo che $\|v_n\|_1 = 1$, ma $\|Kv_n\|_2 > n$, cioè nessuna sottosuccessione di $\{Kv_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ potrebbe convergere. Questo contraddice il fatto che K è compatto. \square

Teorema 2.6.3. *Si verificano le seguenti affermazioni.*

- (i) *Se $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ è limitato e $K : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$ è compatto, allora KA è compatto.*
- (ii) *Siano $K_n : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ compatti e supponiamo che $\|K_n - K\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$; allora anche K è compatto.*

Dim. (i) Se $\|u_n\|_1 \leq c$, allora $\|Au_n\|_2 \leq \|A\|\|u_n\|_1 \leq \|A\|c$ e quindi $\{KAu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è relativamente compatta, dato che K è compatto.

(ii) Basterà dimostrare che, se B è la pallina unitaria di \mathcal{H}_1 , allora $K(B)$ ha chiusura compatta. Useremo il fatto che in uno spazio metrico completo i sottoinsiemi con chiusura compatta sono esattamente quelli *totalmente limitati*. Dobbiamo dimostrare quindi che $K(B)$ si può ricoprire con un numero finito di palline di raggio arbitrariamente prefissato.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|K - K_\nu\| < \varepsilon/2$. Dato che $K_\nu(B)$ è totalmente limitato, c'è un numero finito di punti $v_1, \dots, v_k \in \mathcal{H}_2$ tali che l'unione delle palline di raggio $\varepsilon/2$ centrate nei punti v_k ricopre $K_\nu(B)$.

Preso $u \in B$, esiste v_j tale che $\|K_\nu u - v_j\|_2 < \varepsilon/2$ e quindi

$$\|Ku - v_j\|_2 \leq \|Ku - K_\nu u\|_2 + \|K_\nu u - v_j\|_2 \leq \|K - K_\nu\| + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Perciò, l'unione delle palline di raggio ε centrate nei v_k ricopre $K(B)$. \square

Corollario 2.6.4. *Se $K_n : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ ha rango finito per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\|K_n - K\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora anche K è compatto.*

Esempio 2.6.5. Sia K l'operatore A definito nell'Esempio 2.3.11 e sia K_n quello definito nell'Esempio 2.6.1. Supponiamo inoltre che $a(n) \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.

Dato che

$$\|(K - K_n)u\| = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a(j)|^2 |\widehat{u}(j)|^2 \leq \sup_{j \geq n+1} |a(j)|^2 \|u\|^2,$$

abbiamo che

$$\|K - K_n\| \leq \sup_{j \geq n+1} |a(j)|,$$

che converge a zero per $n \rightarrow \infty$; K è dunque compatto.

Teorema 2.6.6. *Se $K : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ è compatto, anche $K^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$ è compatto.*

Dim. Sia $\|u_n\|_2 \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\|K^*u_n\|_1 \leq \|K^*\|c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poichè K è compatto, esiste $\{u_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\{K(K^*u_{n_j})\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge, cioè, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\|K(K^*u_{n_j}) - K(K^*u_{n_\ell})\|_2 < \varepsilon/2c$ per ogni $j, \ell > m$. Per ogni $j, \ell > m$ allora si ha:

$$\begin{aligned} \|K^*u_{n_j} - K^*u_{n_\ell}\|_1^2 &= (K^*u_{n_j} - K^*u_{n_\ell}, K^*[u_{n_j} - u_{n_\ell}])_1 = \\ &= (K(K^*u_{n_j}) - K(K^*u_{n_\ell}), u_{n_j} - u_{n_\ell})_2 \leq \\ &\|K(K^*u_{n_j}) - K(K^*u_{n_\ell})\|_2 \|u_{n_j} - u_{n_\ell}\|_2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Perciò $\{K^*u_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi converge. \square

Esempio 2.6.7. Siano (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura, $\mathcal{H} = L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $k = k(x, y)$ una funzione nello spazio $L^2(X \times X, \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \mu \times \mu)$. Allora l'operatore $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ definito da

$$(Kf)(x) = \int_X k(x, y) f(y) d\mu(y), \quad x \in X, f \in \mathcal{H},$$

è compatto e $\|K\| \leq \|k\|_2$.

Infatti, si osservi preliminarmente che, se $\{e_i\}_{i \in I}$ è una base per \mathcal{H} , allora, posto

$$\phi_{ij}(x, y) = e_i(x)e_j(y), \quad i, j \in I, x, y \in X,$$

l'insieme $\{\phi_{ij}\}_{i, j \in I}$ forma un sistema ortonormale in $L^2(X \times X, \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \mu \times \mu)$ e risulta:

$$\begin{aligned} (k, \phi_{ij}) &= \int_{X \times X} k(x, y) e_i(x)e_j(y) d(\mu \times \mu)(x, y) = \\ &= \int_X e_i(x) \left[\int_X k(x, y) e_j(y) d\mu(y) \right] d\mu(x) = (Ke_j, e_i), \end{aligned}$$

per $i, j \in I$.

Inoltre, la disuguaglianza di Hölder implica che

$$\begin{aligned} \|Kf\|^2 &= \int_X \left[\int_X k(x, y) f(y) d\mu(y) \right]^2 d\mu(x) \leq \\ &= \int_X f(y)^2 d\mu(y) \int_X \left[\int_X k(x, y)^2 d\mu(y) \right] d\mu(x) = \\ &= \|f\|^2 \|k\|_2^2, \end{aligned}$$

e quindi $\|K\| \leq \|k\|_2$.

Per la disuguaglianza di Bessel,

$$(2.6) \quad \|k\|_2^2 \geq \sum_{i, j \in I} (k, \phi_{ij})^2 = \sum_{i, j \in I} (Ke_j, e_i)^2;$$

questa stessa disequazione ci dice che i vettori ϕ_{ij} tali che $(k, \phi_{ij}) \neq 0$ sono al più un'infinità numerabile: siano essi $\{\psi_{km}\}_{k, m \in \mathbb{N}}$.

Vogliamo ora approssimare K nella norma degli operatori con una successione di operatori K_n di rango finito. Se poniamo $K'_n = K - K_n$, risulta

che

$$\begin{aligned} \|K'_n f\|^2 &= \sum_{i \in I} (K'_n f, e_i)^2 = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I} \hat{f}(j) (K'_n e_j, e_i) \right)^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{f}(m) (K'_n e_m, e_k) \right)^2 \leq \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{f}(m)^2 \sum_{k, m \in \mathbb{N}} (K'_n e_m, e_k)^2, \end{aligned}$$

e quindi

$$\|K'_n\|^2 \leq \sum_{k, m \in \mathbb{N}} (K'_n e_m, e_k)^2.$$

Sia ora P_n la proiezione sul sottoapazio $\text{span}(e_1, \dots, e_n)$; si noti che $P_n^* = P_n$ e, preso $K_n = P_n K P_n$, si ha che

$$(K_n e_m, e_k) = (K P_n e_m, P_n e_k) = (P_n e_m, K^* P_n e_k)$$

e quindi

$$(K_n e_m, e_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } n+1 \leq k, m, \\ (K e_m, e_k) & \text{se } 1 \leq k, m \leq n. \end{cases}$$

Perciò:

$$\|K - K_n\|^2 \leq \sum_{k, m=n+1}^{\infty} (K e_m, e_k)^2,$$

che tende a zero quando $n \rightarrow \infty$ per la (2.6).

Osservando che $R(P_n) \subset \text{span}(e_1, \dots, e_n)$, per il Corollario 2.6.4 concludiamo che K è compatto.

Esempio 2.6.8. Sia \mathcal{H} come nell'esempio precedente e sia K definito come nell'esempio precedente, ma con la funzione k che soddisfa l'ipotesi seguente: esiste una successione di funzioni $k_n \in L^2(X \times X, \mathcal{M} \times \mathcal{M}, \mu \times \mu)$ tale che la successione

$$S_n = \sup_{x \in X} \int_X |k(x, y) - k_n(x, y)| d\mu(y) \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

e, per qualche costante $C > 0$,

$$\int_X |k(x, y) - k_n(x, y)| d\mu(x) \leq C,$$

per ogni $y \in X$ ed ogni $n \in \mathbb{N}$.

Allora K è compatto. Infatti gli operatori definiti da

$$(K_n f)(x) = \int_X k_n(x, y) f(y) d\mu(y), \quad x \in X, f \in \mathcal{H},$$

sono tutti compatti per l'esempio precedente. Inoltre, posto $K'_n = K - K_n$, si ha che

$$|K'_n f(x)|^2 \leq \int_X |k(x, y) - k_n(x, y)| d\mu(y) \int_X |k(x, y) - k_n(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y)$$

e quindi, per il teorema di Fubini, otteniamo

$$\|K'_n f\|_2^2 \leq S_n \int_X |f(y)|^2 \left[\int_X |k(x, y) - k_n(x, y)| d\mu(x) \right] d\mu(y) \leq C S_n \|f\|_2^2.$$

Da ciò otteniamo che $\|K'_n\| \leq C S_n$ e cioè che $\|K - K_n\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, ossia che anche K è compatto.

Applicando il criterio appena dimostrato è facile verificare che se $X = M \subset \mathbb{R}^N$ è una varietà differenziabile compatta di dimensione m e μ è la misura di Hausdorff m -dimensionale definita su M , allora le funzioni

$$k(x, y) = \frac{\kappa(x, y)}{|x - y|^\ell}, \quad k_n(x, y) = k(x, y) [1 - \mathcal{X}_{B(x, 1/n)}(y)]$$

soddisfano le ipotesi sopra riportate se κ è limitata su M e $\ell \in [0, m)$.

Proposizione 2.6.9. *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert. Allora:*

- (i) *se \mathcal{H} ha dimensione infinita, l'identità $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ non è un operatore compatto;*
- (ii) *se \mathcal{H} ha dimensione infinita, l'inverso di un operatore compatto $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ non è limitato.*

Dim. (i) Segue facilmente dalla Proposizione 2.3.4.

(ii) Se K^{-1} fosse limitato, allora $I = KK^{-1}$ sarebbe compatto per il Teorema 2.6.3. \square

Esempio 2.6.10. Prendendo spunto dalla proposizione precedente consideriamo la situazione seguente.

Sia $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^N)$ e sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tale che

$$(Kf)(x) = k \star f(x).$$

Siano α_0 e α_1 due costanti positive tali che $\alpha_0 \leq |\widehat{k}(\xi)| \leq \alpha_1$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, allora K non è compatto.

Infatti, se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale (e quindi limitato) in \mathcal{H} , abbiamo:

$$\begin{aligned} \|Kf_n - Kf_m\|^2 &= \|\widehat{Kf_n} - \widehat{Kf_m}\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{k}(\xi)|^2 |\widehat{f_n}(\xi) - \widehat{f_m}(\xi)|^2 d\xi \geq \\ &\alpha_0^2 \|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|^2 = \alpha_0^2 \|f_n - f_m\|^2 = 2 \alpha_0^2 > 0. \end{aligned}$$

Perciò, $\{Kf_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non può contenere alcuna sottosuccessione convergente. (Per esempio, la trasformata di Hilbert ha un nucleo k tale che $\widehat{k}(\xi) = i\xi/|\xi|$ e perciò non è un operatore compatto).

Esempio 2.6.11. Sia $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ e sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definito da

$$(Kf)(x) = \int_0^x f(y) dy, \quad x \in [0, 1],$$

per $f \in \mathcal{H}$; allora, posto $k(x, y) = \mathcal{X}_{[0, x]}(y)$, K soddisfa le ipotesi enunciate nell'Esempio 2.6.7 e quindi è compatto.

Si noti che

$$\mathcal{R}(K) \subset \{f \text{ assolutamente continua in } [0, 1] : f(0) = 0\}^1$$

Questa inclusione è diretta conseguenza dell'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue, dato che $f \in L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$.

Per le proprietà delle funzioni assolutamente continue, abbiamo che, se $g \in \mathcal{R}(K)$, allora g è derivabile q.o. in $[0, 1]$ e

$$\int_0^x g'(y) dy = g(x) - g(0) = g(x), \quad x \in [0, 1],$$

cioè $(Kg')(x) = g(x)$ e dunque $g' = K^{-1}g$.

Ne segue che l'operazione di derivazione non è continua, essendo l'inverso di un operatore compatto.

2.7. Teorema dell'alternativa di Fredholm

Lemma 2.7.1. *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore lineare e compatto. Sia inoltre $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ l'identità.*

Allora esiste una costante $a > 0$ tale che

$$(2.7) \quad \|u - Ku\| \geq a \|u\| \quad \text{per ogni } u \in N(I - K)^\perp.$$

Dim. Per assurdo supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esista $u_n \in N(I - K)^\perp$ con $\|u_n\| = 1$ e $\|u_n - Ku_n\| < \frac{1}{n}$, e cioè tale che $u_n - Ku_n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. Poichè $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata e K è compatto, esistono $\{u_{n_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $u \in \mathcal{H}$ tali che $Ku_{n_j} \rightarrow u$.

Dato che $u_{n_j} = u_{n_j} - Ku_{n_j} + Ku_{n_j}$, u_{n_j} converge a u e quindi Ku_{n_j} converge anche a Ku , essendo K continuo. Perciò $u = Ku$ e cioè $u \in N(I - K)$.

¹Una funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* se, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni scelta di intervalli disgiunti $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$ in $[a, b]$ e tali che $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, risulta che $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

D'altra parte $u \in N(I - K)^\perp$, perché questo sottospazio è chiuso ed ogni u_n vi appartiene. Dunque $u = 0$, che contraddice il fatto che $\|u\| = 1$. \square

Teorema 2.7.2 (Alternativa di Fredholm). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore lineare e compatto. Sia inoltre $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ l'identità.*

Allora

- (i) $N(I - K)$ ha dimensione finita;
- (ii) $R(I - K)$ è chiuso;
- (iii) $R(I - K) = N(I - K^*)^\perp$;
- (iv) $N(I - K) = \{0\}$ se e solo se $R(I - K) = \mathcal{H}$;
- (v) $N(I - K)$ e $N(I - K^*)$ hanno la stessa dimensione.

Dim. (i) Si ha che ogni successione limitata $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq N(I - K)$ contiene una sottosuccessione convergente: infatti $u_n = Ku_n$; e K è compatto. Per la Proposizione 2.6.9, $N(I - K)$ ha dimensione finita.

(ii) Sia $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R(I - K)$ e supponiamo che $v_n \rightarrow v$ per $n \rightarrow \infty$. Allora esiste $u_n \in \mathcal{H}$ tale che $u_n - Ku_n = v_n$ (è chiaro inoltre che $u_n \in N(I - K)^\perp$, altrimenti $v_n = 0$). Per il Lemma 2.7.1 abbiamo che

$$\|v_n - v_m\| = \|(u_n - u_m) - K(u_n - u_m)\| \geq a \|u_n - u_m\|;$$

quindi $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e cioè converge ad un $u \in \mathcal{H}$ tale che $u - Ku = v$, dato che $I - K$ è continuo. Dunque $v \in R(I - K)$.

(iii) Segue dalla Proposizione 2.3.7.

(iv) Supponiamo che $N(I - K) = \{0\}$, ma che $\mathcal{H}_1 = R(I - K)$ sia un sottospazio proprio di \mathcal{H} ; (ii) implica che \mathcal{H}_1 è chiuso. Risulta che il sottospazio chiuso $\mathcal{H}_2 = (I - K)(\mathcal{H}_1)$ è contenuto strettamente in \mathcal{H}_1 , dato che $I - K$ è iniettivo, essendo $N(I - K) = \{0\}$. Iterando otteniamo una successione strettamente decrescente $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \dots \supset \mathcal{H}_n \supset \mathcal{H}_{n+1} \supset \dots$.

Sia allora $u_n \in \mathcal{H}_n$ con $u_n \in \mathcal{H}_{n+1}^\perp$ e $\|u_n\| = 1$. Osserviamo che $Ku_n - Ku_m = u_n - u_m + u_m - Ku_m - (u_n - Ku_n)$ e che $\mathcal{H}_{n+1} \subset \mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}_{m+1} \subset \mathcal{H}_m$ se $n > m$. Perciò $u_n - Ku_n$, $u_m - Ku_m$ e u_n appartengono ad \mathcal{H}_{m+1} , mentre $u_m \in \mathcal{H}_{m+1}^\perp$ e quindi

$$\begin{aligned} \|Ku_n - Ku_m\|^2 &= \|u_m + (\text{vettore in } \mathcal{H}_{m+1})\|^2 = \\ &= \|u_m\|^2 + \|(\text{vettore in } \mathcal{H}_{m+1})\|^2 \geq 1. \end{aligned}$$

Ciò è assurdo perché K è compatto; dunque $R(I - K) = \mathcal{H}$.

Se ora supponiamo che $R(I - K) = \mathcal{H}$, possiamo subito concludere che $N(I - K^*) = \{0\}$ utilizzando la (iii). Inoltre, dato che anche K^* è

compatto, per quanto appena dimostrato abbiamo che $R(I - K^*) = \mathcal{H}$ e quindi $N(I - K) = R(I - K^*)^\perp = \{0\}$.

(v) Dimostriamo prima che

$$\dim N(I - K) \geq \dim R(I - K)^\perp.$$

Per assurdo, supponiamo che esista un operatore lineare limitato $A : N(I - K) \rightarrow R(I - K)^\perp$ iniettivo, ma non suriettivo. Possiamo estendere A a tutto \mathcal{H} definendolo nullo su $N(I - K)^\perp$ (cioè, se $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in N(I - K)$ e $u_2 \in N(I - K)^\perp$, poniamo $Au = Au_1$). Perciò A ha rango finito e quindi sia A che $K + A$ sono compatti.

Inoltre, se $u \in N(I - [K + A])$ allora $u = Ku + Au$ e quindi $u - Ku = Au$ appartiene sia a $R(I - K)$ che a $R(A)$ e dunque a $R(I - K)^\perp$. Ne segue che $u - Ku = Au = 0$ e cioè $u \in N(I - K)$; dato che $Au = 0$ e A è iniettiva su $N(I - K)$, possiamo allora concludere che $u = 0$. In definitiva, abbiamo dimostrato che $N(I - [K + A]) = \{0\}$.

Applichiamo ora la (iv) all'operatore $K + A$: otteniamo che $R(I - [K + A]) = \mathcal{H}$ e cioè che l'equazione

$$u - (Ku + Au) = v$$

ha soluzione per ogni $v \in \mathcal{H}$. Questo è però impossibile se scegliamo $v \in R(I - K)^\perp$ ma $v \notin R(A)$, dato che si avrebbe che

$$u - Ku = v + Au \in R(I - K) \cap R(I - K)^\perp,$$

cioè $u - Ku = 0$ e quindi $v = -Au$ — una contraddizione. A deve quindi essere suriettivo e cioè $\dim N(I - K) \geq \dim R(I - K)^\perp$.

Finalmente, dato che $N(I - K^*) = R(I - K)^\perp$, da quanto appena dimostrato otteniamo

$$\dim N(I - K) \geq \dim R(I - K)^\perp = \dim N(I - K^*).$$

La disuguaglianza opposta si ottiene scambiando i ruoli di K e K^* . \square

Osservazione 2.7.3. Il Teorema 2.7.2 asserisce che una delle seguenti possibilità si verifica ed esclude l'altra:

- (a) per ogni $f \in \mathcal{H}$, l'equazione $u - Ku = f$ ha un'unica soluzione e risulta;

$$\|u\| \leq a^{-1} \|f\|$$

(cioè u dipende con continuità dal dato);

- (b) l'equazione omogenea $u - Ku = 0$ ha soluzioni non nulle.

Questa dicotomia è l'*Alternativa di Fredholm* e segue dall'asserzione (iv) e e dalla (2.7).

Inoltre, se (b) si verifica, la (i) garantisce che lo spazio delle soluzioni dell'equazione omogenea ha dimensione finita ed, inoltre, l'equazione non omogenea $u - Ku = f$ ha soluzione se e solo se f è ortogonale a $N(I - K^*)$ (per la (iii)).

Tutto ciò era già noto nel caso in cui \mathcal{H} avesse dimensione finita.

Esempio 2.7.4. Sia K l'operatore definito nell'Esempio 2.6.5. Verifichiamo su tale operatore il teorema dell'alternativa.

Consideriamo quindi l'equazione $u - Ku = f$; essa sarà soddisfatta se e solo se

$$[1 - a(n)]\hat{u}(n) = \hat{f}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $a(n) \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'equazione omogenea $u - Ku = 0$ ha la sola soluzione nulla. L'equazione $u - Ku = f$ ha allora una sola soluzione,

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\hat{f}(n)}{1 - a(n)} e_n,$$

che dipende con continuità da f , infatti:

$$\|u\| \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|1 - a(n)|} \|f\|.$$

Altrimenti, dato che $a(n) \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$, ci sono al più m interi n_1, \dots, n_m tali che $a(n_j) = 1$, $j = 1, \dots, m$. In questo caso, l'equazione omogenea ha soluzioni non banali, come pure l'equazione $u - K^*u = 0$. Infatti $N(I - K) = N(I - K^*) = \text{span}\{e_{n_1}, \dots, e_{n_m}\}$ e quindi l'equazione non omogenea sarà risolvibile solo se $(f, e_{n_j}) = \hat{f}(n_j) = 0$, $j = 1, \dots, m$. In questo caso si avrà:

$$u = \sum_{n \neq n_1, \dots, n_m} \frac{\hat{f}(n)}{1 - a(n)} e_n \quad \text{e} \quad \|u\| \leq \max_{n \neq n_1, \dots, n_m} \frac{1}{|1 - a(n)|} \|f\|.$$

2.8. Spettro di un operatore limitato

L'*insieme risolvente* di un operatore $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ è l'insieme

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : A - \lambda I \text{ è iniettivo e suriettivo}\}.$$

Lo *spettro* di A è l'insieme

$$\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A).$$

Il Corollario 2.4.4 implica che $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se $\lambda \in \rho(A)$.

Si dice che $\lambda \in \sigma(A)$ è un *autovalore* di A se $N(I - \lambda A) \neq \{0\}$; lo *spettro puntuale* di A è l'insieme $\sigma_p(A)$ di tutti i suoi autovalori. Se $\lambda \in \sigma_p(A)$, la sua *molteplicità* è la dimensione di $N(A - \lambda I)$; ogni elemento non nullo di $N(A - \lambda I)$ si dice un *autovettore* associato a λ .

Esempio 2.8.1. Sia $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definito così: $Au = (0, u_1, u_2, \dots)$ se $u = (u_1, u_2, \dots)$. È chiaro che $0 \notin \sigma_p(A)$, dato che $Au = 0$ se e solo se $u = 0$. D'altra parte $0 \in \sigma(A)$, perché A non è suriettivo.

Teorema 2.8.2. Sia $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Allora $\sigma(A)$ è chiuso e $\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|]$.

Dim. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ con $|\lambda| > \|A\|$. Allora l'operatore $\lambda^{-1}A$ è una contrazione, dato che

$$\|\lambda^{-1}Au - \lambda^{-1}Av\| = |\lambda|^{-1}\|Au - Av\| \leq |\lambda|^{-1}\|A\|\|u - v\|$$

per ogni $u, v \in \mathcal{H}$, e $|\lambda|^{-1}\|A\| < 1$.

Per ogni $f \in \mathcal{H}$ allora l'equazione $(\lambda^{-1}A - I)u = f$ (anche $u \mapsto \lambda^{-1}Au - f$ è una contrazione) ammette un'unica soluzione e quindi $A - \lambda I$ è biunivoco, cioè $\lambda \in \rho(A)$.

Dimostriamo ora che $\sigma(A)$ è chiuso. Sia $\lambda_0 \in \rho(A)$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $|\lambda - \lambda_0| < r$; vogliamo far vedere che $\lambda \in \rho(A)$ se r è abbastanza piccolo. L'equazione $Au - \lambda u = f$ si può riscrivere come $Au - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$ o, dato che $\lambda_0 \in \rho(A)$, come $u = (A - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u]$, che, per il Teorema della Contrazione, ha un'unica soluzione quando $|\lambda - \lambda_0|\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1$. Basta quindi scegliere $r = \|(A - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$. \square

Abbiamo già osservato che se A è un operatore lineare limitato e simmetrico, allora $\|A\|$ uguaglia il numero

$$M = \sup\{(Au, u) : u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1\};$$

poniamo ora

$$m = \inf\{(Au, u) : u \in \mathcal{H}, \|u\| = 1\}$$

Lemma 2.8.3. Sia $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ simmetrico. Allora

$$(i) \sigma(A) \subseteq [m, M];$$

$$(ii) m, M \in \sigma(A).$$

Dim. (i) Sia $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare definita da $a(u, v) = (\lambda u - Au, v)$ per $u, v \in \mathcal{H}$. È chiaro che a è continua. Se $\lambda > M$, allora la disuguaglianza

$$(\lambda u - Au, u) = \lambda\|u\|^2 - (Au, u) \geq (\lambda - M)\|u\|^2$$

implica che a è coercitiva. Per il Teorema 2.5.3, per ogni $f \in \mathcal{H}$ esiste un unico $u \in \mathcal{H}$ tale che $(\lambda u - Au, v) = (f, v)$ per ogni $v \in \mathcal{H}$, cioè $\lambda u - Au = f$, ossia $R(\lambda I - A) = \mathcal{H}$. D'altra parte la coercività di a implica che $N(\lambda I - A) = \{0\}$; perciò $\lambda I - A$ è biunivoco e quindi $\lambda \in \rho(A)$ — assurdo.

In modo analogo, si dimostra che $\lambda \geq m$.

(ii) Supponiamo per esempio che $m \notin \sigma(A)$; allora è ben definito e continuo l'inverso $(A - mI)^{-1}$. La forma bilineare $[u, v] = (Au - mu, v)$ è simmetrica e non negativa (per la definizione di m); vale allora la disuguaglianza di Schwarz e quindi

$$\begin{aligned} [u, v]^2 &\leq [u, u][v, v] = \\ &= (Au - mu, u)(Av - mv, v) \leq \\ &= (Au - mu, u) \|A - mI\| \|v\|^2 \end{aligned}$$

per ogni $u, v \in \mathcal{H}$. In particolare, preso $v = Au - mu$, si ha che

$$\|Au - mu\|^4 \leq (Au - mu, u) \|A - mI\| \|Au - mu\|^2$$

e cioè

$$(2.8) \quad \|Au - mu\|^2 \leq \|A - mI\| (Au - mu, u),$$

per ogni $u \in \mathcal{H}$.

Sia ora $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ con $\|u_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tale che $(Au_n, u_n) \rightarrow m$ per $n \rightarrow \infty$; allora (2.8) implica che $\|Au_n - mu_n\| \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Poiché abbiamo supposto che $m \notin \sigma(A)$, si ha allora che

$$u_n = (A - mI)^{-1}(Au_n - mu_n) \rightarrow 0 \quad \text{se } n \rightarrow \infty,$$

dato che $(A - mI)^{-1}$ è limitato.

Ciò è assurdo perché $\|u_n\| = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

2.9. Spettro di un operatore compatto

Lo spettro di un operatore compatto ha una struttura particolarmente semplice.

Teorema 2.9.1 (Spettro di un operatore compatto). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore lineare e compatto.*

Allora

- (i) $0 \in \sigma(K)$;
- (ii) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$;
- (iii) $\sigma(K) \setminus \{0\}$ è finito oppure consiste di una successione infinitesima;
- (iv) ogni $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ha molteplicità finita.

Dim. (i) Se $0 \notin \sigma(K)$, allora K è biunivoco e K^{-1} è limitato per il Corollario 2.4.4; quindi $I = K K^{-1}$ è compatto, essendo la composizione di un operatore limitato con uno compatto. Per la Proposizione 2.6.9, \mathcal{H} avrebbe dimensione finita, contro l'ipotesi.

(ii) È chiaro che $\sigma(K) \setminus \{0\} \supseteq \sigma_p(K) \setminus \{0\}$.

Sia ora $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$; se fosse $N(K - \lambda I) = \{0\}$, l'asserzione (iv) del Teorema 2.7.2 implicherebbe $R(K - \lambda I) = \mathcal{H}$ e quindi che $\lambda \in \rho(K)$, il che è assurdo.

(iii) Supponiamo che $\sigma(K) \setminus \{0\}$ sia infinito e, per $r > 0$, poniamo $\Lambda_r = \{\lambda \in \sigma(K) : |\lambda| > r\}$. Facciamo vedere che Λ_r è finito, dimostrando così contemporaneamente che $\sigma(K) \setminus \{0\}$ è numerabile e che l'unico suo punto di accumulazione è lo zero.

Sia $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Lambda_r$ una successione di elementi distinti; se u_n è un autovettore corrispondente a λ_n , allora $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sono linearmente indipendenti. Dimostriamolo per induzione: $u_1 \neq 0$ è sicuramente linearmente indipendente; supponiamo che u_1, \dots, u_{n-1} siano linearmente indipendenti e consideriamo l'equazione

$$c_1 u_1 + \dots + c_n u_n = 0.$$

Applicando ad entrambi i membri di questa equazione l'operatore $K - \lambda_n I$, otteniamo che

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_n)u_1 + \dots + c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n)u_{n-1} = 0.$$

Per l'ipotesi di induzione e dato che gli autovalori sono tra loro distinti, abbiamo che $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ e quindi $c_n u_n = 0$ e cioè anche $c_n = 0$.

Poniamo ora $\mathcal{H}_n = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$; si ha che $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Osserviamo che $(K - \lambda_n I)(\mathcal{H}_n) \subseteq \mathcal{H}_{n-1}$ per ogni $n = 2, 3, \dots$. Per $n = 2, 3, \dots$, scegliamo un elemento $v_n \in \mathcal{H}_n$ tale che $v_n \in \mathcal{H}_{n-1}^\perp$ e $\|v_n\| = 1$. Se $n > m$, $\mathcal{H}_{m-1} \subset \mathcal{H}_m \subseteq \mathcal{H}_{n-1} \subset \mathcal{H}_n$ e quindi

$$\begin{aligned} & \|\lambda_n^{-1} K v_n - \lambda_m^{-1} K v_m\|^2 = \\ & \|\lambda_n^{-1}(K v_n - \lambda_n v_n) - \lambda_m^{-1}(K v_m - \lambda_m v_m) + v_n - v_m\|^2 = \\ & \|v_n + (\text{vettore in } \mathcal{H}_{n-1})\|^2 \geq \|v_n\|^2 = 1, \end{aligned}$$

dato che $K v_n - \lambda_n v_n$, $K v_m - \lambda_m v_m$ e v_m appartengono ad \mathcal{H}_{n-1} .

Perciò $\{K(\lambda_n^{-1} v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ non contiene sottosuccessioni convergenti, anche se $\|\lambda_n^{-1} v_n\| = |\lambda_n|^{-1} < r^{-1}$; questo è in contraddizione con il fatto che K è compatto.

(iv) Sia $\lambda \neq 0$ un autovalore di K ; per l'asserzione (i) del Teorema 2.7.2, $N(K - \lambda I)$ ha dimensione finita. \square

Esempio 2.9.2. Sia K l'operatore compatto definito nell'Esempio 2.6.5. Allora $Ku = \lambda u$ se e solo se

$$a(n) \hat{u}(n) = \lambda \hat{u}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Se $\lambda \neq a(n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\lambda \in \rho(K)$.

Se $\lambda = a(\bar{n})$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $a(\bar{n}) \neq 0$, dato che $a(n) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora $a(n) = a(\bar{n})$ solo per un numero finito di n e quindi la dimensione di $N(K - \lambda I)$ è finita.

Infine, osserviamo che $\lambda = 0$ può avere molteplicità infinita, cioè la dimensione di $N(K)$ è infinita; ciò si verifica per esempio se $a(n) = 0$ per infiniti n .

Un operatore compatto e simmetrico è diagonalizzabile, come mostra il *teorema spettrale* qui di seguito.

Teorema 2.9.3 (Decomposizione spettrale). *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert separabile e sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operatore simmetrico e compatto.*

Allora esiste una base ortonormale numerabile di \mathcal{H} fatta di autovettori di K .

Dim. Sia $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione degli autovalori distinti di K , eccettuato 0; poniamo $\lambda_0 = 0$.

Se definiamo $\mathcal{H}_0 = N(K)$ e $\mathcal{H}_n = N(K - \lambda_n I)$, $n \in \mathbb{N}$, per l'asserzione (iv) del Teorema 2.7.2, risulta che $0 \leq \dim(\mathcal{H}_0) \leq \infty$ e $0 < \dim(\mathcal{H}_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Se $n \neq m$ e $u \in \mathcal{H}_n$, $v \in \mathcal{H}_m$, allora

$$\lambda_n(u, v) = (Ku, v) = (u, Kv) = \lambda_m(u, v)$$

e quindi $(u, v) = 0$, dato che $\lambda_n \neq \lambda_m$.

Sia ora \mathcal{H}_* il sottospazio di \mathcal{H} formato da tutte le combinazioni lineari finite di elementi di \mathcal{H}_k , $k = 0, 1, \dots$; è chiaro che \mathcal{H}_* contiene tutti gli \mathcal{H}_k . Chiaramente $K(\mathcal{H}_*) \subseteq \mathcal{H}_*$ ed, inoltre, $K(\mathcal{H}_*^\perp) \subseteq \mathcal{H}_*^\perp$, dato che $(Ku, v) = (u, Kv) = 0$, se $u \in \mathcal{H}_*^\perp$ e $v \in \mathcal{H}_*$.

La restrizione K_* di K a \mathcal{H}_*^\perp è pure un operatore simmetrico e compatto ed inoltre $\sigma(K_*) = \{0\}$, dato che ogni suo autovalore λ non nullo sarebbe un autovalore di K (ma allora ogni autovettore $u \in \mathcal{H}_*^\perp$ corrispondente a λ starebbe in \mathcal{H}_*). Per il Lemma 2.8.3, allora $(K_*u, u) = 0$ per ogni $u \in \mathcal{H}_*^\perp$.

Ma se $u, v \in \mathcal{H}_*^\perp$, risulta che

$$2(K_*u, v) = (K_*(u + v), u + v) - (K_*u, u) - (K_*v, v) = 0$$

e quindi $K_* \equiv 0$. Perciò $\mathcal{H}_*^\perp \subset N(K) = \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_*$ ed allora $\mathcal{H}_*^\perp = \{0\}$ e cioè \mathcal{H}_* è denso in \mathcal{H} .

Scegliendo una base ortonormale da ogni \mathcal{H}_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, otteniamo allora una base ortonormale per tutto \mathcal{H} . Si noti che \mathcal{H}_0 contiene una base ortonormale numerabile, dato che \mathcal{H} è separabile. \square

Esempio 2.9.4. Riprendiamo ancora l'Esempio 2.9.2. È chiaro che K è simmetrico se e solo se $a(n) \in \mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

In questo caso $\sigma(K)$ è composto dai valori distinti di $a(n)$; siano questi $\{a(n_j)\}_{j=1, \dots, J}$, con $J \leq \infty$. Si avrà allora che

$$m = \min\{a(n_j) : j \in \{1, \dots, J\}\}, \quad M = \max\{a(n_j) : j \in \{1, \dots, J\}\}.$$

Posto $\mathcal{H}_j = N(K - a(n_j)I)$, si ha:

$$\ell^2 = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots$$

2.10. Sistemi di Sturm-Liouville

Si consideri il *problema al contorno*:

$$(2.9) \quad \mathcal{L}u = -[p(t)u']' + q(t)u = f(t), \quad t \in (0, T); \quad u(0) = u(T) = 0;$$

il sistema (2.9) è un esempio di *problema di Sturm-Liouville*; se si suppone che $p \in C^1([0, T])$, $q, f \in C^0([0, T])$, le soluzioni dell'equazione differenziale in (2.9) sono di classe $C^2[0, T]$; chiameremo queste soluzioni *classiche* e, come è noto dalla teoria generale delle equazioni differenziali lineari, esse sono della forma

$$u = \bar{u} + c_1u_1 + c_2u_2,$$

dove \bar{u} è una soluzione particolare, u_1 e u_2 sono soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea associata $\mathcal{L}u = 0$ e c_1, c_2 sono costanti reali.

Vedremo in seguito come si potrà parlare di soluzioni di (2.9) in senso generalizzato, nel caso in cui le funzioni p, q ed f siano discontinue. Per poter far ciò, supponiamo che le funzioni p e q soddisfino le seguenti richieste:

$$(2.10) \quad p(t) \geq 1 \quad \text{e} \quad q(t) \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

Nelle ipotesi di regolarità sui coefficienti finora specificate, il sistema (2.9) ha una ed una sola soluzione classica. Infatti, vista la forma delle soluzioni di $\mathcal{L}u = f$, troveremo una soluzione di (2.9) se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} c_1u_1(0) + c_2u_2(0) = -\bar{u}(0), \\ c_1u_1(T) + c_2u_2(T) = -\bar{u}(T), \end{cases}$$

ha soluzione. Questo si verifica se e solo se il sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} c_1u_1(0) + c_2u_2(T) = 0, \\ c_1u_1(T) + c_2u_2(0) = 0, \end{cases}$$

ha la sola soluzione nulla e, in questo caso, la soluzione del sistema non omogeneo è unica. Il sistema omogeneo ha soluzione nulla se e solo se il sistema

(2.9) con $f \equiv 0$ ha la sola soluzione nulla. Questo si verifica osservando che, se $\mathcal{L}u = 0$, allora si ha che

$$0 = \int_0^T u \mathcal{L}u \, dt = \int_0^T u \{ -[p(t)u']' + q(t)u \} \, dt = \\ \int_0^T [p(t)(u')^2 + q(t)u^2] \, dt \geq \int_0^T (u')^2 \, dt,$$

dopo un'integrazione per parti, dove si sono applicate le condizioni al contorno in (2.9) e le ipotesi (2.10). La funzione u deve essere allora costante e, quindi, nulla per soddisfare le condizioni al contorno.

Abbiamo perciò dimostrato che ad ogni $f \in C^0([0, T])$ corrisponde una sola soluzione del problema (2.9), che indicheremo con $u = Kf$; resta quindi definito un operatore (lineare) su $C^0([0, T])$.

Vediamo ora come si può definire una soluzione generalizzata di (2.9) quando si supponga che i coefficienti p e q siano solo di classe $L^\infty[0, T]$, ferme restando le ipotesi (2.10), ed il termine f sia in $L^2[0, T]$. Cominciamo con il definire un nuovo spazio di Hilbert,

$$H = \left\{ v \in AC[0, T] : \int_0^T v'(t)^2 \, dt < \infty, v(0) = v(T) = 0 \right\},$$

con il prodotto scalare

$$(u, v) = \int_0^T u'(t) v'(t) \, dt$$

e la norma

$$\|v\| = \left(\int_0^T v'(t)^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Con $AC[0, T]$ indichiamo l'insieme delle funzioni *assolutamente continue* in $[0, T]$. Che questo prodotto scalare definisca una norma è una conseguenza della disuguaglianza

$$(2.11) \quad |v(t)| = \left| \int_0^t v'(s) \, ds \right| \leq \sqrt{t} \left(\int_0^t v'(s)^2 \, ds \right)^{1/2},$$

che vale per ogni $t \in [0, T]$ e $v \in H$ e segue dalla formula fondamentale del calcolo integrale e dalla disuguaglianza di Hölder.

Per dimostrare la completezza di H , prendiamo una successione di Cauchy di elementi v_n in H . Osserviamo che la successione delle derivate v_n' è allora di Cauchy in $L^2[0, T]$, che è completo e quindi esiste una $w \in L^2[0, T]$ verso cui le v_n' convergono in $L^2[0, T]$. Osserviamo anche che, applicando (2.11) alla funzione $v_n - v_m$, otteniamo che

$$|v_n(t) - v_m(t)| \leq \sqrt{T} \|v_n - v_m\| \quad \text{per ogni } t \in [0, T]$$

e cioè che v_n è di Cauchy uniformemente su $[0, T]$. Esiste quindi una funzione v continua verso cui v_n converge uniformemente su $[0, T]$. Dato che

$$v_n(t) - v_n(t') = \int_{t'}^t v_n'(s) ds,$$

per ogni $t, t' \in [0, T]$ e ogni $n \in \mathbb{N}$, passando al limite per $n \rightarrow \infty$, otteniamo che

$$v(t) - v(t') = \int_{t'}^t w(s) ds, \quad t, t' \in [0, T],$$

visto anche che $v_n' \rightarrow w$ in $L^2[0, T]$. L'ultima equazione ci dice che $w = v'$ quasi ovunque in $[0, T]$ e quindi $v \in H$ e $v_n \rightarrow v$ in H se $n \rightarrow \infty$.

Consideriamo ora la forma bilineare $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$a(u, v) = \int_0^T \{p(t) u'(t) v'(t) + q(t) u(t) v(t)\} dt \quad \text{per } u, v \in H;$$

a è chiaramente simmetrica e, dato che

$$a(v, v) \geq \int_0^T v'(t)^2 dt = \|v\|^2 \quad \text{per } v \in H,$$

a è coerciva. Inoltre, poiché la disuguaglianza (2.11) implica che

$$(2.12) \quad \|v\|_2 \leq T \|v\| \quad \text{per } v \in H,$$

otteniamo che

$$|a(u, v)| \leq \|p\|_\infty \|u\| \|v\| + \|q\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2 \leq (\|p\|_\infty + T^2 \|q\|_\infty) \|u\| \|v\|$$

per $u, v \in H$, e quindi a è anche continua.

Infine, dato che per ogni $f \in L^2[0, T]$ risulta che

$$(f, v)_2 \leq \|f\|_2 \|v\|_2 \leq T \|f\|_2 \|v\| \quad \text{per ogni } v \in H,$$

il funzionale lineare $Lv = (f, v)_2$ è limitato su H .

Il Teorema 2.5.3 di Lax-Milgram allora implica che esiste una ed una sola $u \in H$ tale che

$$(2.13) \quad a(u, v) = (f, v)_2 \quad \text{per ogni } v \in H.$$

Diremo che u è *soluzione debole o in senso generalizzato* di (2.9) se u verifica (2.13). È importante verificare che, se u è la soluzione classica di (2.9) allora coincide con quella debole. Infatti, poiché in questo caso u è abbastanza regolare, possiamo integrare per parti ed ottenere che

$$a(u, v) = [p(t)u'(t)v(t)]_0^T + \int_0^T \{-[p(t)u'(t)]' + q(t)u(t)\} v(t) dt = \int_0^T f(t) v(t) dt = (f, v)_2,$$

per ogni $v \in H$. Possiamo allora estendere l'operatore K già definito su $C^0[0, T]$ a tutto lo spazio (di Hilbert) $L^2[0, T]$ sostituendo la soluzione classica $u = Kf$ con quella debole.

Facciamo vedere ora che K è compatto. La coercività di a , (2.13) e (2.12) implicano che

$$\|u\|^2 \leq a(u, u) = (f, u)_2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq T \|f\|_2 \|u\|,$$

per la disuguaglianza di Hölder; quindi

$$(2.14) \quad \|u\| \leq T \|f\|_2.$$

Sia ora $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione limitata in $L^2[0, T]$ e cioè tale che $\|f_n\|_2 \leq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per qualche $c \geq 0$. Posto $u_n = Kf_n$, (2.11) implica che

$$|u_n(t)| = \sqrt{T} \|u_n\| \leq T^{3/2} \|f_n\|_2 \leq T^{3/2} c,$$

per ogni $t \in [0, T]$ ed $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, la disuguaglianza di Hölder ed ancora la (2.14) ci informano che

$$\begin{aligned} |u_n(t) - u_n(t')| &= \left| \int_{t'}^t u'_n(s) ds \right| \leq \sqrt{|t - t'|} \left| \int_{t'}^t u'_n(s)^2 ds \right|^{1/2} \leq \\ &\sqrt{|t - t'|} \|u_n\| \leq cT \sqrt{|t - t'|}, \end{aligned}$$

per ogni $t, t' \in [0, T]$ ed $n \in \mathbb{N}$. Perciò, le u_n risultano equilimitate ed equicontinue su $[0, T]$; per il Teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una successione estratta dalle u_n che converge uniformemente su $[0, T]$ e quindi in $L^2[0, T]$. Quindi K è compatto.

Possiamo allora applicare a K i Teoremi 2.9.1 e 2.9.3. Lo spettro di K è, tranne lo 0, uno spettro puntuale. Se $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$, allora $N(K - \lambda I)$ ha dimensione finita. Si noti anche che $N(K) = \{0\}$; infatti, se $u = Kf = 0$, allora $0 = a(u, v) = (f, v)_2$ per ogni $v \in H$ e, per densità, per ogni $v \in L^2[0, T]$; perciò $f = 0$ e quindi $\lambda = 0$ non è quindi un autovalore di K .

Il Teorema 2.9.3 inoltre implica che gli autovalori di K sono esattamente un'infinità numerabile, visto che gli autospazi sono di dimensione finita e devono concorrere a generare tutto $L^2[0, T]$.

Poniamo $\sigma(K) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; la coercività di a implica che ogni λ_n è positivo; possiamo quindi ordinare i λ_n in successione decrescente $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \dots$; il Teorema 2.9.1 ci dice inoltre che $\lambda_n \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$; infine, per il Lemma 2.8.3 e la Proposizione 2.3.9 possiamo supporre che $\lambda_1 = \|K\|$ con $\|K\| \leq T^2$ per le disuguaglianze (2.12) e (2.14).

Se f_n è un autovettore di K corrispondente all'autovalore λ_n , allora $u_n = Kf_n = \lambda_n f_n$ è soluzione non banale del problema

$$-[p(t)u'_n]' + q(t)u'_n = \lambda_n^{-1} u_n, \quad t \in (0, T); \quad u_n(0) = u_n(T) = 0;$$

diciamo anche che u_n è un' *autofunzione di Dirichlet* per l'operatore \mathcal{L} corrispondente all'autovalore $\mu_n = \lambda_n^{-1}$. Si avrà quindi che $T^{-2} = \mu_1 < \mu_2 < \dots$ e $\mu_n \rightarrow +\infty$ se $n \rightarrow +\infty$. Inoltre, opportunamente normalizzate in $L^2[0, T]$, le u_n formano un sistema ortonormale completo in $L^2[0, T]$. Questo vuol dire che anche la soluzione (debole) u di (2.9) si può scrivere in $L^2[0, T]$ come

$$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{u}(n) u_n,$$

dove

$$\hat{u}(n) = (u, u_n)_2 = \mu_n^{-1} \int_0^T u(\mathcal{L}u_n) dt = \mu_n^{-1} a(u, u_n) = \mu_n^{-1} (f, u_n)_2 = \mu_n^{-1} \hat{f}(n).$$

Otteniamo quindi una formula risolutiva per (2.9):

$$(2.15) \quad u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^{-1} \hat{f}(n) u_n.$$

Esempio 2.10.1. Consideriamo il problema agli autovalori

$$u'' + \lambda u = 0 \quad \text{in } 0 < t < T, \quad u(0) = u(T) = 0.$$

Autovalori ed autofunzioni (normalizzate in $L^2[0, T]$) sono in questo caso facilmente calcolabili:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 \quad \text{e} \quad u_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Come sappiamo $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2[0, T]$. Se ora u è soluzione del problema al contorno:

$$-u'' = f \quad \text{in } 0 < x < T, \quad u(0) = u(T) = 0,$$

per la (2.15) abbiamo che

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n\pi}{T}\right)^{-2} \hat{f}(n) u_n(t).$$

Inserendo in questa formula le definizioni di $\hat{f}(n)$ e u_n , e scambiando l'ordine di serie ed integrale, abbiamo:

$$u(t) = \int_0^T f(\tau) \left\{ \frac{2}{T} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n\pi}{T}\right)^{-2} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) \right\} d\tau.$$

Osservando che, se $g \in L^1([0, \infty))$, allora

$$\int_0^\infty g(s) ds = \lim_{r \rightarrow 0^+} r \sum_{n \in \mathbb{N}} g(nr),$$

presi

$$g(s) = \frac{\sin(\tau s) \sin(ts)}{s^2} \quad \text{ed} \quad r = \frac{\pi}{T},$$

otteniamo che

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2}{T} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n\pi}{T}\right)^{-2} \sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\tau s) \sin(ts)}{s^2} ds.$$

In definitiva, se $-u'' = f$ in $(0, \infty)$ e $u(0) = 0$, possiamo scrivere la formula:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\tau) \left\{ \int_0^\infty \frac{\sin(\tau s) \sin(ts)}{s^2} ds \right\} d\tau = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(ts)}{s^2} \left\{ \int_0^\infty f(\tau) \sin(\tau s) d\tau \right\} ds, \end{aligned}$$

dove si è usato il Teorema di Fubini.

Poniamo ora

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(\tau) \sin(\tau s) d\tau, \quad s \in (0, \infty);$$

possiamo scrivere allora che

$$u(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(s) \frac{\sin(ts)}{s^2} ds$$

e, ricordandosi che $f = -u''$, ottenere (derivando due volte l'ultima formula) la *formula di inversione* per \tilde{f} :

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(s) \sin(ts) ds, \quad t \in (0, \infty).$$

Infine, dato che

$$\int_0^T f(t)^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n)^2,$$

posto $f_T = f \chi_{[0, T]}$, dalla definizione di $\hat{f}(n)$ otteniamo che

$$\int_0^T f(t)^2 dt = \frac{2}{\pi} r \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{f}_T(nr)^2,$$

dove $r = \pi/T$. Facendo tendere $T \rightarrow +\infty$, otteniamo l'*identità di Parseval*

$$\int_0^\infty f(t)^2 dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tilde{f}(s)^2 ds.$$

Esercizi

1. Dimostrare i teoremi 2.1.1 e 2.1.3.
2. Dimostrare l'equivalenza delle tre definizioni in (2.2)
3. Dimostrare che se X è normato e Y è di Banach, allora $\mathcal{L}(X, Y)$ è di Banach.
4. Dimostrare il Teorema 2.3.1.
5. Dimostrare il Teorema 2.3.3.

6. Sia M un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Hilbert H e sia $P : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ tale che Pu sia la proiezione di un vettore u su M . Dimostrare che
- (i) P è lineare;
 - (ii) $\|Pu\| \leq \|u\|$ per ogni $u \in \mathcal{H}$ e $P^2 = P$;
 - (iii) $N(P) = M^\perp$ e $R(P) = M$;
 - (iv) determinare P^* .

7. Sia $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{C})$, lo spazio delle successioni $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri complessi tali che

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty.$$

Dimostrare che

- (i) la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n z^n$ ha raggio di convergenza ≥ 1 se $u \in \mathcal{H}$;
 - (ii) per $|\lambda| < 1$ e $u \in \mathcal{H}$ si definisca $Lu = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \lambda^n$: trovare il vettore $v \in \mathcal{H}$ che definisce L ;
 - (iii) calcolare la norma di L .
8. Sia $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ e sia M il sottospazio di \mathcal{H} delle funzioni continue e con derivata prima continua in $[0, 1]$ (quando necessario, solo destra o sinistra). Dimostrare che il funzionale lineare $L : M \rightarrow \mathbb{R}$ che associa ad ogni funzione $u = u(t)$ di M la sua derivata prima $u'(t)$ non è estendibile ad un funzionale lineare e limitato su \mathcal{H} .
9. Sia $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ una matrice $N \times N$. Studiare il problema di calcolare la norma dell'applicazione lineare $\mathbb{R}^N \ni x \mapsto Ax$. Confrontarla con il numero

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2}.$$

10. Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura con μ σ -finita e sia $\mathcal{H} = L^2_{\mathbb{C}}(X, \mu)$. Per $a \in L^\infty_{\mathbb{C}}(X, \mu)$ si definisca l'operatore lineare $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ con $Af = af$.
- (i) calcolare la norma di A ;
 - (ii) determinare A^* ;
 - (iii) dimostrare che $N(A) = \{0\}$ se e solo se $\mu(\{x \in X : a(x) = 0\}) = 0$;
 - (iv) individuare condizioni necessarie e sufficienti su a perché $R(A)$ sia chiuso.
11. Sia $a \in L^1(\mathbb{R}^N)$,

$$a_n(x) = \int_{B(0,n)} \widehat{a}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi$$

(si veda il capitolo 3 per la definizione e le proprietà di \widehat{a}) e siano $A, A_n : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ definiti da $Af = a \star f$ e $A_n f = a_n \star f$, rispettivamente.

Dimostrare che

$$\|A\| = \max_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\widehat{a}(\xi)|$$

e che $\|A - A_n\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.

12. Sia $K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ lineare e compatto e sia $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema ortonormale. Dimostrare che $\|Ke_n\| \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$.
13. Analizzare il teorema dell'alternativa considerando l'operatore definito nell'Esempio 2.6.11.

Serie di Fourier

3.1. Generalità

Sia \mathbb{R} la retta euclidea e sia \mathbb{Z} il sottogruppo additivo di \mathbb{R} dei punti a coordinate intere. Il gruppo topologico compatto \mathbb{R}/\mathbb{Z} si indicherà con \mathbb{T} — il *toro* monodimensionale. Si può rappresentare topologicamente \mathbb{T} come l'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ con la seguente avvertenza: un intorno aperto di $-\frac{1}{2}$ o di $\frac{1}{2}$ ha la forma $(\frac{1}{2} - \delta, \frac{1}{2}) \cup [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta)$.

Esiste un isomorfismo naturale di \mathbb{T} con il sottogruppo di \mathbb{C} dei punti del tipo $e^{2\pi it}$; tale isomorfismo è dato dall'applicazione $\mathbb{T} \ni t \mapsto e^{2\pi it}$.

È chiaro che le funzioni F sul toro si possono identificare con le funzioni f su \mathbb{R} periodiche con un generico periodo $T > 0$ tramite la formula:

$$f(t) = F(e^{\frac{2\pi i}{T}t}).$$

Per semplicità di notazione, nel seguito si considereranno solo funzioni periodiche di periodo $T = 1$.

Si noti che la classe delle funzioni continue su \mathbb{T} non corrisponde a quella delle funzioni continue su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ma a quella delle funzioni continue su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ che estese periodicamente ad \mathbb{R} rimangono continue.

Con queste precisazioni in mente, si può definire (o meglio identificare) lo spazio $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < +\infty$, come la classe di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, misurabili secondo Lebesgue, periodiche con periodo $T = 1$ e tali che $|f|^p$ è sommabile su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Con la consueta identificazione delle funzioni che coincidono quasi ovunque, risulta che $L^p(\mathbb{T})$ è uno spazio di Banach rispetto

alla norma:

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Analogamente $L^\infty(\mathbb{T})$ è la classe di tutte le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, misurabili secondo Lebesgue, periodiche con periodo $T = 1$ ed essenzialmente limitate; con la solita identificazione, $L^\infty(\mathbb{T})$ è uno spazio di Banach con norma

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f|.$$

Sullo spazio $L^2(\mathbb{T})$, in particolare, possiamo definire il prodotto interno:

$$(3.1) \quad (f, g) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

che induce la norma sopra definita per $p = 2$.

Si noti anche che se f è periodica (di periodo $T = 1$) e sommabile, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+1} f(t) dt &= \int_0^1 f(t) dt + \int_1^{a+1} f(t) dt - \int_0^a f(t) dt = \\ &= \int_0^1 f(t) dt + \int_0^a f(\tau + 1) d\tau - \int_0^a f(t) dt = \\ &= \int_0^1 f(t) dt, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si è sfruttata la periodicità di f .

Si può inoltre definire un *prodotto di convoluzione* tra funzioni definite su \mathbb{T} (cioè, funzioni periodiche):

$$(3.2) \quad f \star g(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau)g(\tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\tau)g(t - \tau) d\tau.$$

Questo prodotto gode delle stesse proprietà dell'analogo prodotto definito per funzioni misurabili su \mathbb{R} ; per esempio, vale la *disuguaglianza di Young*:

$$(3.3) \quad \|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p \quad \text{per ogni } f \in L^1(\mathbb{T}), g \in L^p(\mathbb{T}).$$

Un *polinomio trigonometrico* è una funzione periodica della forma:

$$p(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(2\pi kt) + b_k \sin(2\pi kt)\},$$

dove $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Usando l'*identità di Eulero*:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

un polinomio trigonometrico si può anche scrivere come

$$(3.4) \quad p(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{2\pi i k t},$$

una forma spesso più conveniente.

Con le definizioni fin qui richiamate, il sistema $\mathcal{S} = \{e^{2\pi i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale. Infatti, posto $u_n(t) = e^{2\pi i n t}$, risulta:

$$(3.5) \quad (u_n, u_m) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i(n-m)t} dt = \delta_{nm},$$

dove δ_{nm} è la *delta di Krönecker*.

Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ ed $n \in \mathbb{Z}$, il numero complesso

$$(3.6) \quad \hat{f}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

si dice l'*n*-simo *coefficiente di Fourier di f*, mentre

$$(3.7) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}$$

è la *serie di Fourier*¹ di f .

La seguente proposizione mette in relazione coefficienti di Fourier e l'operazione di convoluzione.

Proposizione 3.1.1. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Allora risulta: $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.*

¹Per un'applicazione della serie e della trasformata di Fourier all'analisi degli strumenti musicali, si veda [AW].

Dim. Risulta:

$$\begin{aligned}
 \widehat{f \star g}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i n t} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right) dt = \\
 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\tau) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau) e^{-2\pi i n t} dt \right) d\tau = \\
 &= \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(s) e^{-2\pi i n s} ds \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\tau) e^{-2\pi i n \tau} d\tau \right) = \\
 &= \hat{f}(n) \hat{g}(n),
 \end{aligned}$$

dove si sono usati il teorema di Fubini e la sostituzione $s = t - \tau$. \square

Corollario 3.1.2. Sia $f \in L^1(\mathbb{T})$ e sia p un polinomio trigonometrico. Allora $p \star f$ è ancora un polinomio trigonometrico.

Dim. Risulta che

$$p \star f(t) = \sum_{k=-n}^n c_k \hat{f}(k) e^{2\pi i k t},$$

tenendo conto dell'espressione (3.4) e di (3.5). \square

Il nostro problema principale è quello di stabilire quando ed in che senso la serie (3.7) converge alla funzione f .

3.2. Convergenza puntuale

Indichiamo con $S_n f(t)$ la n -sima somma parziale simmetrica della serie (3.7), cioè:

$$(3.8) \quad S_n f(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{2\pi i k t}.$$

Il primo risultato positivo sulla convergenza puntuale di $S_n f$ fu ottenuto da P. G. Dirichlet (1829), che dimostrò la convergenza di $S_n f(t)$ a $\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)]$ nel caso in cui f sia limitata, continua a tratti e con un numero finito di estremi relativi. Si può ottenere questo risultato come corollario del *criterio di Jordan* che dimostreremo in seguito.

Per questi scopi, è conveniente introdurre il cosiddetto *nucleo di Dirichlet*:

$$(3.9) \quad D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t}.$$

Infatti si ha facilmente che

$$(3.10) \quad S_n f(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(\tau) D_n(t - \tau) d\tau = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t - \tau) D_n(\tau) d\tau = D_n \star f(t).$$

Lemma 3.2.1. *Risulta:*

$$(3.11) \quad D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}, \quad t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

$$(3.12) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} D_n(t) dt = 1 \quad e \quad |D_n(t)| \leq \frac{1}{\sin(\pi\delta)}, \quad \delta \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Dim. La prima formula in (3.12) segue subito dalla definizione di D_n mentre la seconda segue da (3.11).

Infine, osservando che

$$\begin{aligned} D_n(t) e^{i\pi t} - D_n(t) e^{-i\pi t} &= \sum_{k=-n}^n e^{i(2k+1)\pi t} - \sum_{k=-n}^n e^{i(2k-1)\pi t} = \\ &= \sum_{k=-n}^n e^{i(2k+1)\pi t} - \sum_{k=-n-1}^{n-1} e^{i(2k+1)\pi t} = e^{i(2n+1)\pi t} - e^{-i(2n+1)\pi t}, \end{aligned}$$

si ottiene facilmente (3.11). \square

A prima vista non sembra che la convergenza di $S_n f$ sia un fatto locale; infatti se modifichiamo f di poco, tutti i suoi coefficienti di Fourier cambiano. Il risultato seguente mostra però che se si modifica f fuori di un intorno di t_0 , allora il comportamento di $S_n f(t_0)$ non cambia.

Nelle dimostrazioni dei restanti risultati di questo paragrafo possiamo sempre supporre che f sia a valori reali: infatti, nel caso in cui f abbia valori complessi, basterà dimostrare ciascun risultato separatamente per le parti reale ed immaginaria di f .

Teorema 3.2.2 (Principio di localizzazione di Riemann). *Se f è nulla in un intorno di t_0 , allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n f(t_0) = 0.$$

Questo risultato ed i criteri in questo paragrafo sono basati sul seguente lemma.

Lemma 3.2.3 (Riemann-Lebesgue). *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ allora*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Dim. Poiché $e^{2\pi it}$ ha periodo 1,

$$\begin{aligned}\hat{f}(n) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-2\pi int} dt = \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)e^{-2\pi in(t+1/2n)} dt = \\ &= - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t-1/2n)e^{-2\pi int} dt.\end{aligned}$$

La tesi segue quindi dalla disuguaglianza

$$\begin{aligned}|\hat{f}(n)| &= \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(t) - f(t-1/2n)]e^{-2\pi int} dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t) - f(t-1/2n)| dt = \\ &= \frac{1}{2} \|\mathcal{T}_{1/2n}f - f\|_1\end{aligned}$$

e dal fatto che l'operatore di traslazione \mathcal{T}_h con $h = 1/2n \rightarrow 0$ è continuo in $L^1(\mathbb{T})$. \square

Dim. del Teorema 3.2.2. Sia $f \equiv 0$ in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Tenendo conto di (3.10) e di (3.11), si ha:

$$S_n f(t_0) = \int_{\delta \leq |t| < 1/2} f(t_0 - t) \frac{\sin((2n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} dt = \text{Im} [\hat{g}(n)],$$

dove

$$g(t) = -f(t_0 - t) \frac{e^{-\pi it}}{\sin(\pi t)} \mathcal{X}_{\{t: \delta \leq |t| < 1/2\}}(t)$$

è sommabile. Per il lemma 3.2.3, si conclude. \square

Enunciamo e dimostriamo ora due criteri di convergenza puntuale.

Teorema 3.2.4 (Criterio del Dini). *Se per qualche t_0 esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$\int_{|t| < \delta} \left| \frac{f(t_0 + t) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty,$$

allora $S_n f(t_0) \rightarrow f(t_0)$ per $n \rightarrow \infty$.

Dim. Per la prima delle (3.12),

$$S_n f(t_0) - f(t_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} [f(t_0 - t) - f(t_0)] D_n(t) dt = \text{Im} [\widehat{g}(n)] + \text{Im} [\widehat{h}(n)],$$

dove

$$g(t) = \frac{f(t_0) - f(t_0 - t)}{\sin(\pi t)} e^{-\pi i t} \chi_{\{|t| < \delta\}}(t),$$

$$h(t) = \frac{f(t_0) - f(t_0 - t)}{\sin(\pi t)} e^{-\pi i t} \chi_{\{\delta \leq |t| < 1/2\}}(t).$$

Le funzioni g ed h sono sommabili (in particolare, g lo è per l'ipotesi del teorema) e quindi si conclude ancora con il Lemma 3.2.3. \square

Si dice che una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è *a variazione limitata* in $[a, b]$ se

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})| : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \right\} < \infty.$$

Si osserva che una funzione a variazione limitata è sempre differenza di due funzioni crescenti e non negative.

Teorema 3.2.5 (Criterio di Jordan). *Sia f una funzione a variazione limitata in un intorno del punto t_0 . Allora $S_n f(t_0)$ converge al valore*

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2},$$

dove

$$f(t_0^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_0^\pm} f(t);$$

in particolare, se f è anche continua in t_0 , allora $S_n f(t_0) \rightarrow f(t_0)$.

Dim. Si osservi che

$$S_n f(t_0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t_0 - t) D_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} [f(t_0 - t) + f(t_0 + t)] D_n(t) dt.$$

Posto $g(t) = f(t_0 - t) + f(t_0 + t) - f(t_0^+) - f(t_0^-)$, si ha che $g(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0$ e quindi basterà dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) D_n(t) dt = 0.$$

Si noti che $g(t)$ è ancora a variazione limitata; poiché ogni funzione a variazione limitata è la differenza di due funzioni crescenti e non negative,

possiamo anche supporre che $g(t)$ sia crescente e non negativa in un intorno destro di $t = 0$ e che $g(t) \rightarrow 0$ se $t \rightarrow 0$.

Fissato $\varepsilon > 0$, scegliamo $\delta > 0$ tale che g sia crescente in $(0, \delta)$ e si abbia $g(t) < \varepsilon$ se $0 < t < \delta$. Per il Lemma 3.2.3 ancora, abbiamo che

$$\int_{\delta}^{\frac{1}{2}} g(t) D_n(t) dt \rightarrow 0.$$

Per il Lemma A.4.1, esiste $\eta \in (0, \delta)$ tale che

$$\left| \int_0^{\delta} g(t) D_n(t) dt \right| = g(\delta^-) \left| \int_{\eta}^{\delta} D_n(t) dt \right| \leq C \varepsilon,$$

dato che

$$\begin{aligned} \left| \int_{\eta}^{\delta} D_n(t) dt \right| &\leq \\ &\left| \int_{\eta}^{\delta} \left[\frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t} \right] \sin(2n+1)\pi t dt \right| + \left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{\pi t} dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\delta} \left| \frac{1}{\sin \pi t} - \frac{1}{\pi t} \right| dt + 2 \sup_{M>0} \left| \int_0^M \frac{\sin \pi t}{t} dt \right| = C \end{aligned}$$

e C non dipende da n . □

3.3. Convergenza in media

Abbiamo già osservato che il sistema $\mathcal{S} = \{e^{2\pi i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è ortonormale in $L^2(\mathbb{T})$; vale dunque la *disuguaglianza di Bessel*:

$$(3.13) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt$$

se $f \in L^2(\mathbb{T})$. Il sistema \mathcal{S} è anche *completo*, perché genera tutti i polinomi trigonometrici, che sono densi in $L^2(\mathbb{T})$, come risulterà chiaro dal Corollario 3.3.2.

Teorema 3.3.1. *Sia $f \in C^1(\mathbb{T})$. Allora $S_n f$ converge uniformemente ad f .*

Dim. Poiché $f' \in L^2(\mathbb{T})$, detto γ_n il suo n -simo coefficiente di Fourier, risulta:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\gamma_n|^2 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f'(t)|^2 dt$$

Si osservi che, integrando per parti,

$$\gamma_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f'(t) e^{-2\pi i n t} dt = 2\pi i n \hat{f}(n),$$

e quindi, dato che

$$\left| \hat{f}(n) e^{2\pi i n t} \right| \leq \frac{1}{2\pi n} |\gamma_n| \leq \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{n^2} + |\gamma_n|^2 \right\},$$

la serie di Fourier di f (3.7) converge totalmente. \square

Corollario 3.3.2. *Per $1 \leq p < \infty$, polinomi trigonometrici sono densi in $L^p(\mathbb{T})$.*

Dim. Sia $f \in L^p(\mathbb{T})$; poichè $C^1(\mathbb{T})$ è denso in $L^p(\mathbb{T})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C^1(\mathbb{T})$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Per il Teorema 3.3.1, esiste un polinomio trigonometrico $p_n = S_n g$ tale che $\|g - p_n\|_\infty < \varepsilon/2$. Le disuguaglianze

$$\|f - p_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - p_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - p_n\|_\infty$$

implicano allora che $\|f - p_n\|_p < \varepsilon$. \square

Nel caso in cui $p = 2$, questo Corollario equivale a dire che il sistema ortonormale \mathcal{S} è completo. La teoria degli spazi di Hilbert allora ci garantisce che vale il "teorema di Pitagora".

Teorema 3.3.3 (Identità di Parseval). *Siano $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Allora*

$$(3.14) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(t)|^2 dt,$$

$$(3.15) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \overline{\hat{g}(n)} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

3.4. Nuclei di sommabilità

La convergenza di $S_n f$ ad f non è sempre soddisfacente. Può essere conveniente avere a disposizione altri metodi di approssimazione di una funzione periodica f a partire dai suoi coefficienti di Fourier.

Si ricorda che una successione numerica $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge secondo Cesàro se esiste finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Se una successione converge nel senso ordinario, allora converge anche nel senso di Cesàro allo stesso limite.

La successione $S_n f(t)$ convergerà quindi nel senso di Cesàro se converge la successione

$$\sigma_n f(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k f(t).$$

Si noti che

$$\sigma_n f(t) = F_n \star f(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_n(\tau) f(t - \tau) dt,$$

dove F_n è il nucleo di Fejér

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(t) = \frac{1}{n+1} \left[\frac{\sin((n+1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \right]^2.$$

Le proprietà salienti di F_n (analoghe alle proprietà (3.11) e (3.12) di D_n) sono:

$$(3.16) \quad \begin{aligned} F_n(t) &\geq 0, \quad \|F_n\|_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_n(t) dt = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| < 1/2} F_n(t) dt &= 0 \quad \text{se } \delta > 0. \end{aligned}$$

Teorema 3.4.1. *Se $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$ oppure, se f è continua e $p = \infty$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\sigma_n f - f\|_p = 0.$$

Dim. La prima riga di (3.16) e la disuguaglianza di Jensen implicano che

$$\begin{aligned} \|\sigma_n f - f\|_p^p &\leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F_n(t) \|\mathcal{T}_t f - f\|_p^p dt \leq \\ &\leq \int_{|t| < \delta} F_n(t) \|\mathcal{T}_t f - f\|_p^p dt + 2^{p-1} \|f\|_p^p \int_{\delta < |t| < 1/2} F_n(t) dt \leq \\ &\leq \sup_{|t| < \delta} \|\mathcal{T}_t f - f\|_p^p + 2^{p-1} \|f\|_p^p \int_{\delta < |t| < 1/2} F_n(t) dt. \end{aligned}$$

Utilizzando la seconda riga di (3.16) ed il fatto che le traslate $\mathcal{T}_t f$ convergono ad f , si conclude. \square

Corollario 3.4.2.

- (i) I polinomi trigonometrici sono densi in $L^p(\mathbb{T})$, $1 \leq p < \infty$.
- (ii) Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ e $\hat{f}(n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$, allora $f \equiv 0$.

Un altro nucleo di sommabilità importante è il *nucleo di Poisson*:

$$(3.17) \quad P_r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{2\pi i n t} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(2\pi t) + r^2},$$

dove $0 < r < 1$. La successione $P_{r_n}(t)$, dove $r_n \rightarrow 1$, soddisfa le stesse proprietà (3.16) del nucleo di Fejèr e quindi vale un teorema analogo al Teorema 3.4.1 per la successione $P_{r_n} \star f$.

Concludiamo questo paragrafo segnalando [Ha], un libro molto affascinante in cui si utilizzano i vari tipi di convergenza qui incontrati.

3.5. Il fenomeno di Gibbs

Come previsto dal Teorema 3.2.5, la successione:

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin(2\pi k t)}{k}$$

converge alla funzione $f(t) = \frac{1}{2} - t$ per ogni $0 < t < 1$. Ne studiamo ora il comportamento in vicinanza di $t = 0$. Dato che f è discontinua in un intorno di $t = 0$, è chiaro che $S_n(t)$ non può convergere uniformemente in tale intorno.

Supponiamo $t > 0$ ed osserviamo che

$$S_n(t) + t = \int_0^t D_n(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\sin((2n+1)\pi\tau)}{\sin(\pi\tau)} d\tau.$$

Dato che

$$\begin{aligned} 0 < S_n(t) + t - \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi t} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi t} \frac{\sin \tau}{\tau} \left[\frac{\tau/(2n+1)}{\sin(\tau/(2n+1))} - 1 \right] d\tau < \\ < \frac{2}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\tau}{\sin \tau} - 1 \right) d\tau, \end{aligned}$$

possiamo scrivere che

$$(3.18) \quad S_n(t) + t = \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}((2n+1)\pi t) + o(1)$$

uniformemente in $[0, \pi]$ per $n \rightarrow \infty$, dove

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$$

è la funzione *seno integrale*.

Anche da (3.18) si vede che $S_n(t)$ converge puntualmente ad $f(t)$ dato che la successione $\operatorname{Si}((2n+1)\pi t) \rightarrow \frac{1}{2}$ per $t > 0$ fissato. La formula (3.18) ci dice anche che, fissato $k \in \mathbb{N}$, $S_n(k/(2n+1)) \rightarrow \operatorname{Si}(k\pi)$. In particolare, le curve $s = S_n(t)$, che passano tutte per il punto $(0, 0)$, tendono ad addensarsi verso l'intervallo $0 \leq s \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Si}(\pi)$ ed il rapporto tra la lunghezza di questo e quella dell'intervallo $0 \leq s \leq f(0^+) = \frac{1}{2}$ è

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = 1.179 \dots$$

Questo tipo di comportamento passa sotto il nome di *fenomeno di Gibbs* (Fig. 1): supponiamo che una successione di funzioni $f_n(t)$ converga per $t_0 \leq t \leq t_0 + \delta$ ad un limite $f(t)$ e che esista $f(t_0^+)$; supponiamo anche che

$$\liminf_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow t_0^+}} f_n(t) < f(t_0^+) \quad \text{o} \quad \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ t \rightarrow t_0^+}} f_n(t) > f(t_0^+);$$

allora si dice che per $f_n(t)$ si verifica il fenomeno di Gibbs in un intorno destro di t_0 .

Questo fenomeno si verifica ogni volta in cui la funzione che si vuole approssimare con la serie di Fourier è una funzione che ha dei salti (si veda A. Zygmund, *Trigonometric series*). Si ovvia a questo problema usando la convergenza alla Cesàro.

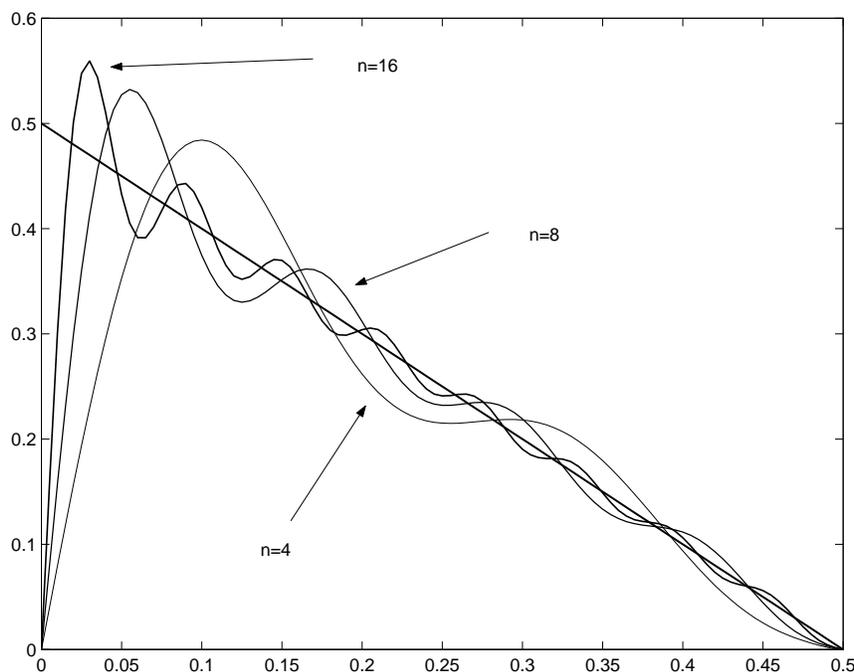


Figura 1. Il fenomeno di Gibbs.

3.6. Applicazione: il metodo di separazione delle variabili

Le equazioni a derivate parziali lineari sono un campo di applicazione delle serie di Fourier, che anzi furono introdotte da Fourier proprio con questo scopo. L'idea è quella di cercare famiglie di soluzioni relativamente semplici (in cui le variabili in gioco si separano) per poi tentare di ricostruire ogni altra soluzione "sovrapponendo" opportunamente quelle precedentemente ottenute.

In questo paragrafo consideriamo due esempi: uno relativo all'equazione di Laplace ed uno a quella del calore.

Esempio 3.6.1. Sia D il cerchio con centro nell'origine e raggio $r_0 > 0$. Si vuole costruire $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ tale che

$$(3.19) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{in } D, \quad u = f \quad \text{su } \partial D,$$

dove f è una funzione definita su ∂D almeno continua.

Per risolvere questo problema con il metodo della separazione delle variabili, è opportuno tenere conto della geometria del dominio D . In questo caso è conveniente usare coordinate polari anziché rettangolari:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Occorrerà perciò riscrivere l'equazione differenziale in (3.19) nelle nuove coordinate; dato che

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x, & u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y, \\ u_{xx} &= u_{rr} r_x^2 + 2u_{r\theta} r_x \theta_x + u_{\theta\theta} \theta_x^2 + u_r r_{xx} + u_\theta \theta_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{rr} r_y^2 + 2u_{r\theta} r_y \theta_y + u_{\theta\theta} \theta_y^2 + u_r r_{yy} + u_\theta \theta_{yy}, \end{aligned}$$

si ottiene che

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta},$$

poiché

$$\begin{aligned} r_x &= \cos \theta, & \theta_x &= -\frac{\sin \theta}{r}, & \theta_{xx} + \theta_{yy} &= 0, \\ r_y &= \sin \theta, & \theta_y &= \frac{\cos \theta}{r}, & r_{xx} + r_{yy} &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Il problema (3.19) si può ora riscrivere come

$$(3.20) \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi,$$

$$(3.21) \quad u(r_0, \theta) = f(\theta), \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Cerchiamo ora soluzioni del tipo $u = R(r)\Theta(\theta)$:

$$R'' \Theta + \frac{1}{r} R' \Theta + \frac{1}{r^2} R \Theta'' = 0;$$

dividendo questa equazione per $\frac{1}{r^2} R\Theta$ e riordinando i termini, abbiamo che

$$\frac{R'' + \frac{1}{r} R'}{\frac{1}{r^2} R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ciò implica che ambedue i membri di questa equazione devono essere costanti, dato che il primo non dipende da θ mentre il secondo non dipende da r . Deve esistere perciò un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$(3.22) \quad \Theta'' + \lambda \Theta = 0 \quad \text{per} \quad -\pi \leq \theta < \pi,$$

$$(3.23) \quad R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{\lambda}{r^2} R = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq r < r_0.$$

A queste due equazioni dobbiamo aggiungere le condizioni

$$(3.24) \quad \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi),$$

ed inoltre vogliamo che $u = R(r)\Theta(\theta)$ sia di classe $C^2(D)$.

Se $\lambda < 0$, è facile rendersi conto che non esistono soluzioni non nulle di (3.22) che soddisfano (3.24). Se $\lambda = 0$, ogni costante soddisfa (3.22) e (3.24). Se $\lambda > 0$, l'integrale generale di (3.22) è

$$\Theta(\theta) = c_+ e^{i\sqrt{\lambda} \theta} + c_- e^{-i\sqrt{\lambda} \theta},$$

con $c_+, c_- \in \mathbb{C}$. Applicando le condizioni in (3.24), dopo qualche manipolazione, otteniamo:

$$\begin{aligned} c_+ \left[e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \right] - c_- \left[e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \right] &= 0, \\ c_+ \left[e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \right] + c_- \left[e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Questo sistema lineare omogeneo ha soluzione non banale se il suo determinante è nullo e cioè se

$$\left[e^{i\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-i\sqrt{\lambda}\pi} \right]^2 = 0.$$

Questo si verifica solo per i valori $\lambda = 1, 2^2, 3^2, \dots$. In corrispondenza di questi valori e di $\lambda = 0$ otteniamo dunque le soluzioni di (3.22), (3.24):

$$\Theta_n(\theta) = c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \Theta_0(\theta) = c_0.$$

L'equazione (3.23) ora diventa:

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{n^2}{r^2} R = 0 \quad \text{per } 0 \leq r < r_0,$$

con $n = 0, 1, 2, \dots$. L'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$R(r) = a r^n + b r^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

la richiesta $u = R(r) \Theta(\theta)$ sia regolare implica che $b = 0$. In definitiva, otteniamo le seguenti soluzioni di (3.20):

$$u_n = r^n (c_n e^{in\theta} + c_{-n} e^{-in\theta}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad u_0 = c_0.$$

Sovrapponendo queste soluzioni, possiamo quindi concludere che la serie

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi,$$

è soluzione di (3.20).

Dobbiamo ora determinare le costanti $c_n \in \mathbb{C}$ in modo che questa u soddisfi (3.21): si deve porre

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n r_0^{|n|} e^{in\theta} \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Otteniamo allora che

$$c_n r_0^{|n|} = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z},$$

e dunque la formula:

$$(3.25) \quad u = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{|n|} e^{in\theta}, \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Se, per esempio, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$, la serie in (3.25) converge uniformemente ad una funzione continua in \bar{D} e derivabile infinite volte in D , u risulta dunque la soluzione cercata del problema (3.20), (3.21), o (3.19).

Ricordandosi la definizione del nucleo di Poisson (3.17), con qualche modifica dalla (3.25) possiamo ottenere la formula:

$$u = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\varphi) d\varphi}{r^2 - 2rr_0 \cos(\theta - \varphi) + r_0^2}.$$

Infine, utilizzando gli argomenti a margine della formula (3.17), se f è continua su ∂D , possiamo concludere che la formula precedente fornisce una soluzione $u \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ del problema (3.19).

Esempio 3.6.2. Consideriamo il seguente problema per l'equazione del calore:

$$(3.26) \quad u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, \infty),$$

$$(3.27) \quad u = f, \quad (x, y, t) \in \Omega \times \{0\},$$

$$(3.28) \quad u = 0 \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty),$$

dove Ω è un dominio limitato di \mathbb{R}^2 con frontiera abbastanza regolare.

Cerchiamo prima soluzioni del tipo $u(x, y, t) = U(x, y)T(t)$ ed otteniamo:

$$\frac{U_{xx} + U_{yy}}{U} = \frac{T'}{T} = -\lambda$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenendo conto di (3.28) possiamo scrivere che U e T devono soddisfare le condizioni

$$(3.29) \quad U_{xx} + U_{yy} + \lambda U = 0 \text{ in } \Omega, \quad U = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

e

$$(3.30) \quad T' - \lambda T = 0 \text{ se } t > 0.$$

Dimostreremo nel paragrafo 7.8 che il problema (3.29) ammette un'infinità numerabile di soluzioni non identicamente nulle U_n corrispondenti a certi valori λ_n tali che $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$. Tali soluzioni U_n , opportunamente normalizzate, formano una base dello spazio $L^2(\Omega)$.

In corrispondenza dei valori λ_n l'equazione (3.30) ha le soluzioni:

$$T_n(t) = c_n e^{-\lambda_n t}$$

dove $c_n \in \mathbb{R}$. Sovrapponendo le soluzioni elementari $u_n = U_n(x, y) T_n(t)$, otteniamo:

$$u(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n U_n(x, y) e^{-\lambda_n t},$$

che chiaramente soddisfa (3.26) e (3.28). La (3.27) sarà soddisfatta se

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n U_n(x, y) = u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega;$$

poiché le U_n formano una base di $L^2(\Omega)$, avremo che

$$c_n = \int_{\Omega} f(x, y) U_n(x, y) \, dx dy = \hat{f}_n$$

e quindi

$$u(x, y, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}_n U_n(x, y) e^{-\lambda_n t}$$

è la soluzione cercata del problema (3.26)-(3.28).

Si osservi che, nel caso in cui Ω sia un disco D , le soluzioni del problema (3.29) possono essere costruite sempre per separazione delle variabili, dopo aver riscritto l'equazione differenziale in (3.29) in coordinate polari:

$$U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r} U_{\theta\theta} + \lambda U = 0 \quad r \geq 0, \quad -\pi \leq \theta < \pi.$$

Procedendo come nell'esempio precedente, separando le variabili, troveremo le soluzioni elementari $U_{n,\lambda} = R_{n,\lambda}(r) e^{in\theta}$, dove $R_{n,\lambda}(r)$ soddisfa

$$R'' + \frac{1}{r} R' + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0, \quad 0 < r < r_0.$$

Soluzioni opportunamente regolari di questa equazione sono

$$R_{n,\lambda}(r) = J_n(\sqrt{\lambda}r), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dove $J_n(z)$ soddisfa l'equazione di Bessel:

$$J_n'' + \frac{1}{z} J_n' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2} \right) J_n = 0;$$

risulta che

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k+n}$$

— la *funzione di Bessel di ordine n* .

Dato che la condizione sul bordo in (3.29) implica che $R(r_0) = 0$, si dovrà avere:

$$J_n(\sqrt{\lambda}r_0) = 0.$$

La funzione J_n ha un'infinità numerabile di zeri

$$0 \leq j_{0,n} \leq j_{1,n} \leq \dots \leq j_{1,n} \leq \dots$$

In definitiva, otteniamo le soluzioni:

$$U_{m,n} = J_n(j_{m,n}r/r_0) e^{in\theta}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots,$$

corrispondenti ai valori

$$\lambda_{m,n} = j_{m,n}^2 r_0^{-2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Esercizi

1. Sia f derivabile $k-1$ volte su \mathbb{T} e tale che la derivata $(k-1)$ -esima $f^{(k-1)}$ sia assolutamente continua. Dimostrare che $\hat{f}(n) = o(1/n^k)$ se $|n| \rightarrow \infty$.
2. Sia f derivabile k volte su \mathbb{T} e tale che $f^{(k)} \in L^2(\mathbb{T})$. Dimostrare che $\|S_n f - f\|_2 = o(1/n^k)$ se $|n| \rightarrow \infty$.
3. (a) Calcolare

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i k n t / N},$$

dove $n, N \in \mathbb{Z}$.

(b) Dimostrare che se $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t}$, allora

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t/N + k/N) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(nN) e^{2\pi i n t}.$$

4. Sia $E \subset (0, 1)$ misurabile secondo Lebesgue e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. Dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E \cos^2(\pi n t + x_n) dt = \frac{1}{2} m(E).$$

5. La successione $S_n f$ converge ad f in $L^p(\mathbb{T})$ con $1 \leq p < \infty$ se e solo se esiste una costante C_p , indipendente da n , tale che

$$\|S_n f\|_p \leq C_p \|f\|_p$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{T})$.²

6. Sia $C^0(\mathbb{T})$ lo spazio di Banach delle funzioni continue su \mathbb{T} con la norma L^∞ , sia D_n il nucleo di Dirichlet e sia $S_n f = D_n \star f$. Dimostrare che
 - (i) il funzionale lineare $S_n : C^0(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{C}$ definito dal valore di $S_n f$ in $t = 0$ ha norma $\|S_n\| = \|D_n\|_1$;
 - (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\|_1 = \infty$;
 - (iii) esiste un sottoinsieme $E \subset C^0(\mathbb{T})$, che è intersezione numerabile di sottoinsiemi densi in $C^0(\mathbb{T})$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n f(0)| = \infty$$

per ogni $f \in E$.³

²Suggerimento: usare anche il teorema di Banach-Steinhaus.

³Suggerimento: usare il teorema di Banach-Steinhaus.

7. Sia $\alpha \in (0, 1)$; si dice che $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è hölderiana di esponente α su \mathbb{T} se è 1-periodica ed esiste una costante $L \geq 0$ tale che

$$|f(t) - f(\tau)| \leq L |t - \tau|^\alpha \quad \text{per ogni } t, \tau \in \mathbb{R}.$$

Sia X lo spazio $C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ delle funzioni 1-periodiche e hölderiane di esponente α dotato della norma

$$\|f\|_{0,\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{\substack{t, \tau \in \mathbb{T}, \\ t \neq \tau}} \frac{|f(t) - f(\tau)|}{|t - \tau|^\alpha}, \quad f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T}),$$

e sia Y lo spazio di Banach $(C^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

- (i) Dimostrare che X è completo.
 (ii) Dimostrare che esiste una costante C_α tale che

$$\|S_n f\|_Y \leq C_\alpha \|f\|_X \quad \text{per ogni } f \in X.^4$$

(iii) Dimostrare che $S_n f$ converge uniformemente ad f se $f \in X$.

8. Con il metodo della separazione delle variabili, determinare l'unica soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } (0, a) \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x) & \text{per } x \in [0, a], \\ u(0, t) = u(a, t) = 0 & \text{per } t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

9. Dimostrare che una funzione a variazione limitata è la differenza di due funzioni crescenti e non negative.
 10. Ci sono funzioni a variazione limitata che non sono continue e funzioni continue che non sono a variazione limitata.

⁴*Suggerimento:* usare il teorema di Banach-Steinhaus.

Trasformata di Fourier

4.1. Generalità

In questo capitolo lo spazio $L^p(\mathbb{R}^N)$ indicherà lo spazio di Banach delle funzioni a valori complessi con modulo a potenza p sommabile in \mathbb{R}^N .

Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$; la *trasformata di Fourier* di f è la funzione:

$$(4.1) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx,$$

dove $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_N \xi_N$. Le proprietà elementari della trasformata di Fourier sono analoghe a quelle dei coefficienti di Fourier.

Teorema 4.1.1. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\lambda > 0$, $h \in \mathbb{R}^N$ e sia $U \in O(N)$ una trasformazione ortogonale.*

Allora:

- (i) $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$ (linearità);
- (ii) $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ e \hat{f} è continua;
- (iii) $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (Riemann-Lebesgue);
- (iv) $\widehat{f \star g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$;
- (v) $\widehat{T_h f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i h \cdot \xi}$;
- (vi) $\widehat{\mathcal{R}_U f} = \mathcal{R}_U \hat{f}$, dove $(\mathcal{R}_U f)(x) = f(Ux)$;
- (vii) $\widehat{\mathcal{D}_\lambda f} = \lambda^{-N} \mathcal{D}_{\lambda^{-1}} \hat{f}$, dove $(\mathcal{D}_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$.

Dim. La (i) e la prima di (ii) seguono dalle proprietà elementari dell'integrale di Lebesgue. La continuità di \hat{f} segue dal teorema della convergenza

dominata dato che $f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \rightarrow f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi_0}$ quasi ovunque se $\xi \rightarrow \xi_0$ e $|f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi}| \leq |f(x)|$.

La (iii) si dimostra esattamente come il Lemma 3.2.3.

Con il teorema di Fubini ed un cambiamento di variabile otteniamo:

$$\begin{aligned} \widehat{f \star g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) g(y) dy = \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(z) e^{-2\pi i z \cdot \xi} dz \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) = \\ &= \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \end{aligned}$$

e cioè la (iv).

La (v) e la (vii) seguono dalla definizione con un facile cambiamento di variabile.

Dato che $U^*U = I$ (U^* è la matrice trasposta di U ed I è la matrice unità) e $(U^*y) \cdot \xi = y \cdot (U\xi)$, con il cambiamento di variabile $x = Uy$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}_U f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^N} f(Ux) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-2\pi i (U^*y) \cdot \xi} dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-2\pi i y \cdot (U\xi)} dy = \\ &= \hat{f}(U\xi), \end{aligned}$$

cioè (vi). □

4.2. La classe di Schwartz

A differenza di quanto accade per il toro \mathbb{T} , $L^1(\mathbb{R}^N)$ non contiene $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $p > 1$ e quindi non è possibile definire, con la formula (4.1), la trasformata di Fourier di una funzione di $L^p(\mathbb{R}^N)$. Nel seguito vedremo come essa si definisce per funzioni di $L^2(\mathbb{R}^N)$; nel frattempo, introduciamo una classe di funzioni molto utile, dato che è invariante rispetto alla trasformazione di Fourier.

Sia $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Una funzione f sta nella *classe di Schwartz*, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, se è differenziabile infinite volte e se, per ogni *multi-indice* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, risulta finito il numero:

$$p_{\alpha, \beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)|.$$

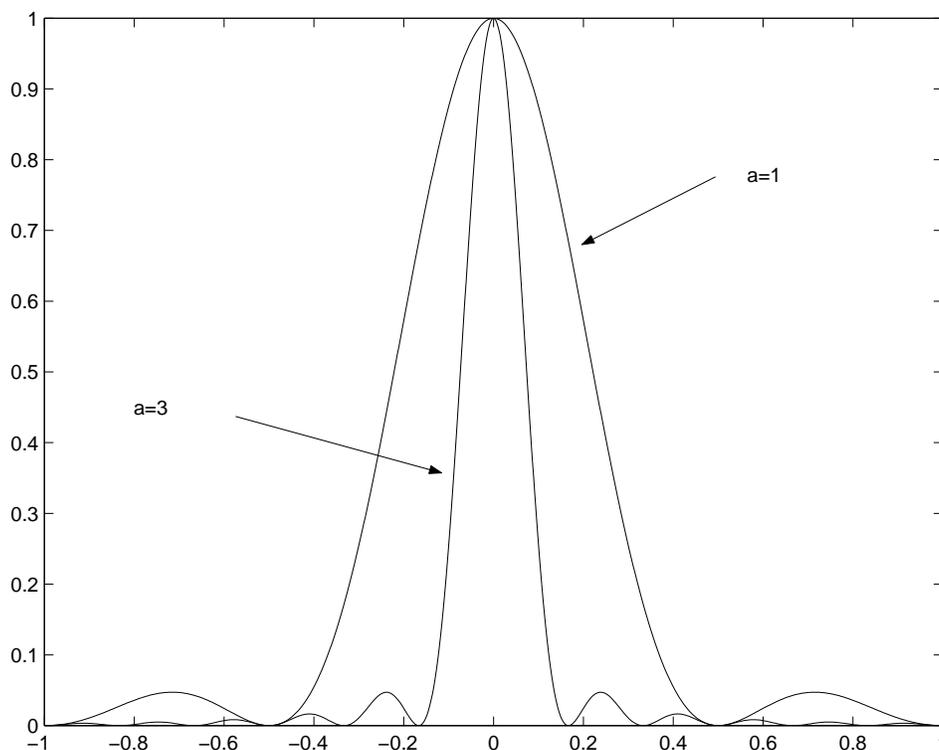


Figura 1. $|\hat{f}(\xi)|^2$ quando $f(x) = \frac{1}{2a} \mathcal{X}_{[-a,a]}(x)$.

In questa formula si intende che, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$, allora

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_N^{\alpha_N} \quad \text{e} \quad D^\beta f(x) = \frac{\partial^{|\beta|} f(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_N^{\beta_N}},$$

dove $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_N$.

Questa classe contiene la classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, ma anche funzioni del tipo $e^{-|x|^2}$ che non hanno supporto compatto.

La famiglia numerabile di seminorme $\{p_{\alpha,\beta}(f)\}_{\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^N}$ definisce una topologia nello spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: si dice che una successione f_n converge a 0 se e solo se per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\alpha,\beta}(f_n) = 0.$$

È chiaro che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è contenuto in ogni $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Una semplice ed importante proprietà della trasformata di Fourier è la seguente.

Teorema 4.2.1. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, allora anche $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e risulta:*

$$(4.2) \quad \widehat{f_{x_j}}(\xi) = 2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi), \quad j = 1, \dots, N,$$

$$(4.3) \quad -2\pi i \widehat{x_j f}(\xi) = \hat{f}_{\xi_j}(\xi), \quad j = 1, \dots, N.$$

Dim. Integrando per parti rispetto alla coordinata x_j , otteniamo che $\widehat{f_{x_j}}(\xi)$ è uguale a

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\left[f(x) e^{-2\pi i x_j \xi_j} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi i \xi_j \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i x_j \xi_j} dx_j \right) e^{-2\pi i x'_j \xi'_j} dx'_j,$$

dove si intende $dx'_j = dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_N$, e quindi a $2\pi i \xi_j \hat{f}(\xi)$.

La (4.3) segue facilmente derivando rispetto a ξ_j sotto il segno di integrale la formula (4.1).

Iterando le formule (4.2) e (4.3), si ottiene:

$$(-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{D^\beta(x^\alpha f)}(\xi) = (2\pi i)^{|\beta|} \xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi);$$

da questa segue che

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} |\xi^\beta D^\alpha \hat{f}(\xi)|$$

è finito per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$, dato che $D^\beta(x^\alpha f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Perciò $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.
□

Lemma 4.2.2 (Trasformata di una gaussiana). *Sia $\varepsilon > 0$ e sia $g_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$(4.4) \quad g_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}.$$

Allora

$$(4.5) \quad \widehat{g}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\pi}{\varepsilon}|\xi|^2} = \varepsilon^{-\frac{N}{2}} g_{1/\varepsilon}(\xi).$$

Dim. Poiché $g_\varepsilon = \mathcal{D}_{\sqrt{\varepsilon}} g_1$, si avrà $\widehat{g}_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-\frac{N}{2}} \widehat{g}_1(\frac{\xi}{\sqrt{\varepsilon}})$ per la (vii) del Teorema 4.1.1; basterà quindi dimostrare il Lemma quando $\varepsilon = 1$.

Per il teorema di Fubini, dato che

$$g_1(x) = \prod_{j=1}^N e^{-\pi x_j^2},$$

basterà dimostrare la tesi quando $N = 1$.

La funzione $g(x) = e^{-\pi x^2}$ sta nello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e soddisfa il problema di Cauchy:

$$g' + 2\pi x g = 0, \quad g(0) = 1.$$

Applicando le formule (4.2) e (4.3), abbiamo che \hat{g} soddisfa la stessa equazione ed inoltre:

$$\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Per la parte unicit  del teorema di Cauchy, concludiamo. \square

4.3. La trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$

Teorema 4.3.1 (Identit  di Plancherel). *Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Allora vale l'identit  di Plancherel:*

$$(4.6) \quad \|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

Inoltre, l'applicazione $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ definita da $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ ha un'unica estensione lineare a tutto $L^2(\mathbb{R}^N)$ e per questa estensione vale ancora l'identit  di Plancherel, cio  la (4.6) vale per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Infine, se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, vale l'identit  di Parseval:

$$(4.7) \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Dim. Sia g_ε la funzione definita in (4.4). Poich  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, allora l'integrale

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 g_\varepsilon(\xi) d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \overline{f(y)} e^{2\pi i y \cdot \xi} dy \right) d\xi. \end{aligned}$$

Poich  $f(x) \overline{f(y)} g_\varepsilon(\xi)$   una funzione sommabile in \mathbb{R}^{3N} , possiamo applicare il teorema di Fubini ed ottenere:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 g_\varepsilon(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^{3N}} g_\varepsilon(\xi) f(x) \overline{f(y)} e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} dx dy d\xi = \\ & \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(x) \overline{f(y)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(\xi) e^{-2\pi i(x-y) \cdot \xi} d\xi \right) dx dy = \\ & \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(x) \overline{f(y)} \hat{g}_\varepsilon(x-y) dx dy = \\ & \varepsilon^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^{2N}} f(x) \overline{f(y)} g_{1/\varepsilon}(x-y) dx dy = \\ & \varepsilon^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} (g_{1/\varepsilon} \star f)(y) \overline{f(y)} dy = (\varepsilon^{-\frac{N}{2}} g_{1/\varepsilon} \star f, f), \end{aligned}$$

dove la convoluzione $\varepsilon^{-\frac{N}{2}} g_{1/\varepsilon} \star f$ converge in $L^2(\mathbb{R}^N)$ ad f (infatti $\varepsilon^{-\frac{N}{2}} g_{1/\varepsilon}$ è un nucleo di sommabilità). Nella quarta uguaglianza si è usato il Lemma 4.2.2.

Dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 g_\varepsilon(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{-\frac{N}{2}} g_{1/\varepsilon} \star f, f) = \|f\|_2^2.$$

Dato che $|\hat{f}(\xi)|^2 g_\varepsilon(\xi)$ converge crescendo a $|\hat{f}(\xi)|^2$ per $\varepsilon \rightarrow 0$, per il teorema di Beppo Levi, risulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}(\xi)|^2 g_\varepsilon(\xi) d\xi = \|\hat{f}\|_2^2$$

e quindi dalla precedente formula segue (4.6), per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^2(\mathbb{R}^N)$; se $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ esiste quindi una successione di funzioni $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$. Osservando che $\|f_n - f_m\|_2 = \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2$, si conclude che la successione $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e quindi converge ad una funzione di questo spazio, che indichiamo con \hat{f} — la *trasformata di Fourier di f in $L^2(\mathbb{R}^N)$* . Notiamo che questa definizione non dipende dalla successione scelta: se $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un'altra successione che converge ad f in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e se \hat{g}_n convergesse ad una \hat{g} , si avrebbe:

$$\|\hat{f} - \hat{g}\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - \hat{g}_n\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - g_n\|_2 = 0.$$

È chiaro inoltre che, con questa definizione, \hat{f} soddisfa (4.6) e che l'applicazione $f \rightarrow \hat{f}$ è lineare su $L^2(\mathbb{R}^N)$, essendolo su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Infine:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \overline{g(x)} dx &= (f, g) = \\ \frac{1}{2} \left(\|f + g\|_2^2 + i\|f + ig\|_2^2 - (1+i)\|f\|_2^2 - (1+i)\|g\|_2^2 \right) &= \\ \frac{1}{2} \left(\|\hat{f} + \hat{g}\|_2^2 + i\|\hat{f} + i\hat{g}\|_2^2 - (1+i)\|\hat{f}\|_2^2 - (1+i)\|\hat{g}\|_2^2 \right) &= \\ (\hat{f}, \hat{g}) &= \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi, \end{aligned}$$

e quindi la (4.7) è provata. \square

Osservazione 4.3.2. È chiaro che, per definire la trasformata di una funzione in $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, non è necessario che le sue approssimanti siano nella classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: possiamo approssimare f con funzioni più o meno regolari — per esempio in $L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ — ottenendo lo stesso risultato.

Per esempio, le successioni

$$\hat{f}_n(\xi) = \int_{|x|<n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

e

$$\hat{g}_n(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \cos(|x|^2/n) e^{-|x|^2/n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

convergono allo stesso limite \hat{f} in $L^2(\mathbb{R}^N)$, anche se non è detto che convergano quasi ovunque. Si può comunque dire che \hat{f}_n e \hat{g}_n contengono sottosuccessioni che convergono quasi ovunque ad \hat{f} .

Teorema 4.3.3 (Formula di inversione). *Per $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, si definisca $\mathcal{C}(f)(x) = f(-x)$ — la riflessione di f rispetto all'origine.*

Allora $\mathcal{F}^2 = \mathcal{C}$ e quindi $f = \mathcal{C}\mathcal{F}(\hat{f})$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. In particolare, se $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, risulta:

$$(4.8) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi$$

quasi ovunque.

Dim. Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ una successione convergente ad f in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e sia g_ε definita da (4.4) con $\lambda = \varepsilon$ cosicché $\hat{g}_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{N}{2}} g_{1/\varepsilon}$. Risulta:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_\varepsilon(y-x) f_n(y) dy &= \\ \int_{\mathbb{R}^N} f_n(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(\xi) e^{-2\pi i (y-x) \cdot \xi} d\xi \right) dy &= \\ \int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_n(y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} dy \right) d\xi &= \\ \int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(\xi) \hat{f}_n(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Da questa, dato che $f_n \rightarrow f$ e $\hat{f}_n \rightarrow \mathcal{F}(f)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, e dato che sia g_ε che \hat{g}_ε sono funzioni di $L^2(\mathbb{R}^N)$, facendo tendere $n \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$(4.9) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_\varepsilon(y-x) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} g_\varepsilon(\xi) \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

La (4.9) si può anche riscrivere così:

$$\hat{g}_\varepsilon \star f(x) = \mathcal{C}\mathcal{F}(g_\varepsilon \hat{f})(x).$$

La conclusione segue allora osservando che $\widehat{g_\varepsilon} \star f \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, perché $\widehat{g_\varepsilon}$ è un nucleo mollificatore, e che $g_\varepsilon \widehat{f} \rightarrow \widehat{f}$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, per il Teorema della Convergenza Dominata.

Infine, se $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, osserviamo che $g_\varepsilon \widehat{f} \rightarrow \widehat{f}$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi $\mathcal{CF}(g_\varepsilon \widehat{f})$ converge uniformemente alla funzione continua

$$\mathcal{CF}(\widehat{f})(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi,$$

mentre $\widehat{g_\varepsilon} \star f$ converge q.o. ad f a meno di sottosuccessioni. \square

4.4. Nuclei di sommabilità

Il problema di ricostruire una funzione dalla sua trasformata di Fourier è analogo allo stesso problema per le serie di Fourier. Si vuole determinare se e in che senso

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = f(x),$$

dove B_R è la palla di raggio R centrata nell'origine.

Definiamo l'operatore di troncamento S_R con la formula:

$$\widehat{S_R f} = \chi_{B_R} \widehat{f}$$

— l'analogo delle somme parziali, per le serie di Fourier. Il nostro problema allora equivale a determinare se ed in che senso

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f = f.$$

Osserviamo subito che il teorema di Plancherel e la definizione di S_R implicano subito:

$$\|S_R f\|_2 = \|\widehat{S_R f}\|_2 = \|\chi_{B_R} \widehat{f}\|_2 \leq \|\widehat{f}\|_2$$

e quindi

$$\|S_R f\|_2 \leq \|f\|_2.$$

Questa disuguaglianza, per un risultato analogo all'esercizio 5 del capitolo 2, implica che $S_R f \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. La convergenza puntuale o in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $p \neq 2$, di $S_R f$ è più delicata e non ce ne occuperemo.

Se $N = 1$, allora

$$(4.10) \quad S_R f(x) = D_R \star f(x),$$

dove D_R è il *nucleo di Dirichlet*:

$$D_R(x) = \int_{-R}^R e^{2\pi i x \xi} d\xi = \frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x}.$$

Anche se $D_R \notin L^1(\mathbb{R})$, risulta che $D_R \in L^q(\mathbb{R})$ per ogni $q > 1$, allora (4.10) ha senso quasi ovunque se $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, per la disuguaglianza di Young per le convoluzioni.

Per la trasformata di Fourier, il metodo di sommabilità alla Cesàro consiste nel considerare le medie degli operatori di troncamento S_R rispetto al parametro R :

$$\sigma_R f(x) = \frac{1}{R} \int_0^R S_r f(x) dr.$$

Se $N = 1$, allora

$$\sigma_R f(x) = F_R \star f(x),$$

dove F_R è il *nucleo di Fejér*:

$$F_R(x) = \frac{1}{R} \int_0^R D_r(x) dr = \frac{\sin^2(\pi R x)}{R(\pi x)^2}.$$

Il nucleo di Fejér è sommabile e quindi $\sigma_R f$ converge ad f in $L^p(\mathbb{R})$, se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, ed uniformemente ad f se questa è continua e limitata.

Altri due metodi di convergenza sono quello di Abel-Poisson e quello di Gauss-Weierstrass. Il primo corrisponde allo studio della convergenza per $s \rightarrow 0^+$ delle funzioni:

$$(4.11) \quad u(x, s) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi s|\xi| + 2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

mentre nel secondo si studia la convergenza per $t \rightarrow 0^+$ degli integrali:

$$(4.12) \quad h(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{-\pi t|\xi|^2 + 2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Per quanto dimostrato nel Lemma 4.2.2, possiamo subito scrivere che

$$h(x, t) = H_t \star f(x),$$

dove

$$(4.13) \quad H_t(x) = t^{-N/2} e^{-\pi \frac{|x|^2}{t}}$$

è il *nucleo di Gauss-Weierstrass*.

In modo analogo,

$$u(x, s) = P_s \star f(x),$$

dove P_s è il cosiddetto *nucleo di Poisson* calcolato nel Lemma 4.4.1.

Con le solite osservazioni sulle convoluzioni con nuclei di sommabilità, potremo concludere che $u(\cdot, s) \rightarrow f$ per $s \rightarrow 0^+$ e $h(\cdot, t) \rightarrow f$ per $t \rightarrow$

0^+ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ o uniformemente se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ o f è continua e limitata, rispettivamente.

Lemma 4.4.1 (Trasformata del nucleo di Poisson). *Per $x \in \mathbb{R}^N$ e $s > 0$ sia*

$$(4.14) \quad P_s(x) = \pi^{-\frac{N+1}{2}} \Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right) \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{N+1}{2}}}$$

— il nucleo di Poisson in $\mathbb{R}_+^{N+1} = \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ — dove

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

definisce la funzione gamma di Eulero per $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) > 0$.

Risulta:

$$(4.15) \quad \hat{P}_s(\xi) = e^{-2\pi s|\xi|}, \quad x \in \mathbb{R}^N, s > 0.$$

Dim. Dimostriamo prima il caso in cui $N = 1$. Dalla formula di inversione e da (4.15), risulta:

$$\begin{aligned} P_s(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{P}_s(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2\pi s\xi + 2\pi i x \xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{2\pi s\xi + 2\pi i x \xi} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi(s - ix)} + \frac{1}{2\pi(s + ix)} = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + x^2}, \end{aligned}$$

cioè la (4.14).

Sia ora $N \geq 2$. Con il cambio di variabile $x = sy$, abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-2\pi i s y \cdot \xi}}{(1 + |y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} dy.$$

Osserviamo ora che la funzione $(1 + |y|^2)^{-(N+1)/2}$ di cui si fa la trasformata è a simmetria radiale, cioè è invariante per rotazioni; la sua trasformata è quindi a simmetria radiale per la proposizione (vi) del Teorema 4.1.1. Questo

ci permette di scrivere:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{e^{-2\pi i s y_1 |\xi|}}{(1 + |y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} dy_1 \cdots dy_N =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i s y_1 |\xi|} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{dy_2 \cdots dy_N}{(1 + |y|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \right) dy_1.$$

Poniamo $\rho^2 = y_2^2 + \cdots + y_N^2$ e $a^2 = 1 + y_1^2$. Dall'ultima uguaglianza, passando a coordinate polari nello spazio \mathbb{R}^{N-1} , otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = \omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i s y_1 |\xi|} \left[\int_0^{+\infty} \frac{\rho^{N-2} d\rho}{(a^2 + \rho^2)^{\frac{N+1}{2}}} \right] dy_1,$$

dove ω_{N-1} indica la misura della sfera unitaria in \mathbb{R}^{N-1} . Da questa uguaglianza, con il cambio di variabile $\rho = ar$, abbiamo che

$$(4.16) \quad \int_{\mathbb{R}^N} \frac{s}{(s^2 + |x|^2)^{\frac{N+1}{2}}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx =$$

$$\omega_{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i s y_1 |\xi|} dy_1 \left(\int_0^{+\infty} \frac{r^{N-2} dr}{a^2(1 + r^2)^{\frac{N+1}{2}}} \right) dy_1 =$$

$$= \frac{\omega_{N-1}}{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i s y_1 |\xi|}}{1 + y_1^2} dy_1 = \frac{\omega_{N-1}}{N-1} \pi e^{-2\pi s |\xi|},$$

dove si è usato il fatto che

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^{N-2} dr}{(1 + r^2)^{\frac{N+1}{2}}} = \frac{1}{N-1}$$

e che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2\pi i s y_1 |\xi|}}{1 + y_1^2} dy_1 = \pi e^{-2\pi s |\xi|}.$$

Quest'ultima formula segue dalla (4.15) per $N = 1$ (che abbiamo provato all'inizio di questa dimostrazione).

Osservando che

$$\pi \frac{\omega_{N-1}}{N-1} = \frac{\pi^{\frac{N+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N+1}{2}\right)},$$

si conclude. □

4.5. La formula di addizione di Poisson

Il seguente risultato mette in relazione serie e trasformata di Fourier.

Teorema 4.5.1 (Formula di addizione di Poisson). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con la proprietà che esistono due costanti positive A e δ tali che:*

$$(4.17) \quad |f(x)| \leq \frac{A}{(1+|x|)^{1+\delta}} \quad e \quad |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{A}{(1+|\xi|)^{1+\delta}}.$$

Allora risulta:

$$(4.18) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t} \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Dim. Si noti dapprima che, valendo (4.17), sia f che \hat{f} sono sommabili e quindi, per l'affermazione (ii) del Teorema 4.1.1 (e per la formula d'inversione), sia \hat{f} che f sono continue. Osserviamo inoltre che le ipotesi (4.17) implicano anche che le serie di funzioni in (4.18) convergono uniformemente, la prima su ogni intervallo chiuso e limitato, mentre la seconda su tutta la retta reale.

La funzione

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t+n)$$

è periodica di periodo 1; calcoliamo i suoi coefficienti di Fourier:

$$\begin{aligned} \hat{g}(k) &= \int_0^1 g(t) e^{-2\pi i k t} dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 f(t+n) e^{-2\pi i k t} dt = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i k(x-n)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2\pi i k x} dx = \hat{f}(k). \end{aligned}$$

Nella terza uguaglianza si è posto $x = t+n$ e nella quarta si è osservato che $e^{2\pi i k n} = 1$.

Perciò:

$$g(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) e^{2\pi i n t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t},$$

cioè la (4.18) è provata. □

Esempio 4.5.2. Applichiamo la formula (4.18) alla funzione (4.14) ed alla sua trasformata (4.15) per $N = 1$. Risulta:

$$\frac{s}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{s^2 + (x - n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\pi s|n| + 2\pi i n x}}{1 - e^{-2\pi(s+ix)}} + \frac{e^{-2\pi(s-ix)}}{1 - e^{-2\pi(s-ix)}},$$

e quindi

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{s^2 + (x - n)^2} = \frac{\pi(1 - e^{-4\pi s})}{s} \frac{1}{1 + e^{-4\pi s} - 2e^{-2\pi s} \cos(2\pi x)}.$$

Fissato $x \notin \mathbb{Z}$, facendo tendere s a 0 in quest'ultima formula, otteniamo:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

Questa formula, che si può ottenere anche con metodi di analisi complessa, è estendibile a tutto il piano complesso (eccettuati gli interi sull'asse reale):

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)}.$$

Osservando che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x - n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x + n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} - \frac{1}{x^2}$$

e facendo tendere x a zero, ritroviamo la ben nota formula:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Osservazione 4.5.3. La formula di addizione di Poisson può essere usata per dimostrare un'identità notevole per la funzione *zeta di Riemann*

$$(4.19) \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \left(= \prod_{p \text{ primo}} \frac{1}{1 - 1/p^s} \right), \quad \operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}.$$

Applichiamo infatti (4.18) alla gaussiana $g_t(x) = e^{-\pi t x^2}$ ed otteniamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi t n^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/t}.$$

Definendo la funzione *theta di Jacobi* come

$$\theta(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\pi n^2 \tau} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau},$$

l'ultima identità si può scrivere così:

$$(4.20) \quad \theta(it) = \frac{1}{\sqrt{t}} \theta(i/t).$$

Ricordando la definizione della funzione *gamma di Eulero*

$$(4.21) \quad \Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0,$$

per $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ otteniamo:

$$\begin{aligned} \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty (\pi n^2)^{-s} t^{s-1} e^{-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-\pi n^2 t} dt = \\ &= \int_0^\infty t^{s-1} \left[\theta(it) - \frac{1}{2} \right] dt = \\ &= \int_1^\infty t^{s-1} \left[\theta(it) - \frac{1}{2} \right] dt + \int_0^1 t^{s-1} \theta(it) dt - \frac{t^s}{2s} \Big|_0^1 = \\ &= \int_1^\infty t^{s-1} \left[\theta(it) - \frac{1}{2} \right] dt + \int_1^\infty t^{-s-1} \theta(i/t) dt - \frac{1}{2s} = \\ &= \int_1^\infty \left(t^{s-1} + t^{1/2-s-1} \right) \left[\theta(it) - \frac{1}{2} \right] dt - \frac{1}{2s} - \frac{1}{1-2s}, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'identità (4.20) all'ultimo passaggio. Perciò, sostituendo $s/2$ al posto di s , abbiamo:

$$\pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) = \int_1^\infty \left(t^{s/2-1} + t^{(1-s)/2-1} \right) \left[\theta(it) - \frac{1}{2} \right] dt - \frac{1}{s} - \frac{1}{1-s}.$$

Da questa formula, ponendo $\xi(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$, segue allora l'identità cercata:

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

Con un piccolo sforzo ulteriore, si può dimostrare che (i) $\xi(s)$ può essere estesa ad una funzione meromorfa su tutto \mathbb{C} con poli semplici in $s = 0$ e 1 ; (ii) $\xi(s) - 1/s - 1/(1-s)$ è limitata su ogni striscia $\{s \in \mathbb{C} : a < \operatorname{Re}(s)\} < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ (si veda [GM]).

È il caso di ricordare che la funzione zeta di Riemann è la protagonista della più celebre congettura matematica rimasta ancora insoluta — l'*ipotesi di Riemann*:

ogni radice complessa dell'equazione $\zeta(s) = 0$ ha parte reale uguale a $\frac{1}{2}$.

Esercizi

1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Se f è anche hölderiana con esponente α , $0 < \alpha < 1$, allora $\hat{f}(\xi) = O(|\xi|^{-\alpha})$ per $|\xi| \rightarrow +\infty$.

2. Dimostrare che se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ è tale che

$$|f(x)| \leq \frac{A}{(1 + |x|)^{N+\delta}}$$

per qualche coppia di costanti positive A e δ , allora per ogni $\alpha \in (0, \delta)$, \hat{f} è hölderiana con esponente α .

3. Usando la trasformata di Fourier, trovare una soluzione $u(x, t)$ del problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4. Usando la trasformata di Fourier, trovare una soluzione $u(x, t)$ del problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x, t) & \text{in } \mathbb{R} \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

5. (Alcuni integrali notevoli). Calcolare gli integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

e calcolare il volume della pallina $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$.

6. Calcolare la somma $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^4}$.

7. Mediante la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione $u - \Delta u = f$ in \mathbb{R}^N .

Cenni sulle distribuzioni

5.1. Qualche motivazione

La teoria delle distribuzioni si è sviluppata per varie esigenze. Una di queste è il trattamento delle forze impulsive. Come sappiamo dalla Fisica, la velocità di cambiamento della quantità di moto p è uguale alla forza F applicata, in formule $dp/dt = F$. Una forza impulsiva è una forza molto intensa che agisce in un intervallo di tempo molto breve $[t, t+h]$. L'impulso di tale forza è definito da $I = \int F(t) dt$, cosicché $p(t+h) = p(t) + I$. Quando $h \rightarrow 0$, possiamo pensare idealmente ad una forza che agisce istantaneamente e che provoca un salto della quantità di moto p . Formalmente, tale forza idealizzata è nulla, tranne che ad un certo istante, per esempio $t = 0$, ma ha impulso totale non nullo, cioè $\int F(t) dt = I \neq 0$. È chiaro che nessuna funzione può avere questo comportamento: c'è perciò bisogno di un concetto generalizzato di funzione.

Un'altra motivazione ci viene ancora dalla Fisica. Supponiamo che $u(x)$ sia una grandezza fisica che dipende da un parametro x . Sappiamo che è impossibile misurare i valori di u punto per punto: infatti ogni strumento di misurazione non può aumentare la sua precisione indefinitamente. Questo è vero nella Meccanica Classica, ma è ancor più vero in Meccanica Quantistica dove i valori puntuali di un campo potrebbero non esistere. Si può pensare però di misurare delle medie della grandezza u , $\int u(x)\phi(x) dx$, rispetto a funzioni peso abbastanza regolari (non è forse ciò che fa, per esempio, l'occhio umano nel decidere il valore di una lunghezza?)

La grandezza è “osservata” come se fosse un funzionale lineare

$$\phi \mapsto \int u(x)\phi(x) dx.$$

È anche ragionevole richiedere che le funzioni peso ϕ abbiano supporto compatto: quando osserviamo una grandezza lo facciamo solo localmente. Infine, a misurazioni “vicine” vogliamo che corrispondano risultati “vicini”. In altre parole, assumeremo che il funzionale “osservato” sia continuo.

5.2. Generalità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Indichiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio delle *funzioni test*, cioè lo spazio delle funzioni di $C_0^\infty(\Omega)$ con la seguente nozione di convergenza: una successione $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge in $\mathcal{D}(\Omega)$ ad una $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ se e solo se esiste un compatto $K \subset \Omega$, contenente tutti i supporti delle funzioni ϕ_n , tale che per ogni multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ risulta che

$$D^\alpha \phi_n \rightarrow D^\alpha \phi$$

per $n \rightarrow \infty$ uniformemente su K . È chiaro che $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Una *distribuzione* T è un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$ che è continuo rispetto alla convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$, cioè se per ogni successione di funzioni ϕ_n convergente in $\mathcal{D}(\Omega)$ ad una funzione ϕ si verifica che $T(\phi_n) \rightarrow T(\phi)$.

In altre parole, una distribuzione è un elemento del duale $\mathcal{D}'(\Omega)$ di $\mathcal{D}(\Omega)$. In seguito, l'azione di una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ su una funzione test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ sarà indicato con $\langle T, \phi \rangle$.

Si dice che una successione di distribuzioni $T_n \in \mathcal{D}'(\Omega)$ converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ ad una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se $T_n(\phi) \rightarrow T(\phi)$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Esempio 5.2.1. (i) **La delta di Dirac.** Sia $x_0 \in \Omega$ e sia $\delta_{x_0} : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) \text{ per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

È facile verificare che $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$; δ_{x_0} si dice la *delta di Dirac* concentrata in x_0 .

(ii) **Funzioni localmente sommabili.** Sia $1 \leq p \leq \infty$; una funzione misurabile $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartiene ad $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ se $\|f\|_{L^p(K)} < \infty$ per ogni compatto $K \subset \Omega$. Una successione di funzioni $f_n \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ si dice che converge in $L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ ad una $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$, se $f_n \rightarrow f$ in $L^p(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$.

Ogni funzione $f \in L_{\text{loc}}^p(\Omega)$ definisce una distribuzione T_f tramite la posizione:

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f \cdot \phi dx \text{ per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

(iii) **Misure e distribuzioni.** Ogni misura di Borel μ su Ω , finita sui compatti, definisce una distribuzione T_μ su Ω :

$$\langle T_\mu, \phi \rangle = \int_{\Omega} \phi \, d\mu \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Proposizione 5.2.2. *Un funzionale lineare $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ appartiene a $\mathcal{D}'(\Omega)$ se e solo se per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono un intero $n = n(K, T)$ ed una costante $c \geq 0$ tali che per tutte le $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con supporto in K risulta che*

$$(5.1) \quad |\langle T, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq n} \max_K |D^\alpha \phi|.$$

Dim. È chiaro che se vale (5.1) allora T è continuo.

Viceversa, supponiamo che (5.1) sia violata per qualche compatto K . Per ogni intero n e costante $c > 0$ possiamo trovare $\phi_{n,c} \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$|\langle T, \phi_{n,c} \rangle| > c \sum_{|\alpha| \leq n} \max_K |D^\alpha \phi_{n,c}|.$$

Posto

$$\psi_n = \frac{1}{n} \frac{\phi_{n,n}}{\sum_{|\alpha| \leq n} \max_K |D^\alpha \phi_{n,n}|},$$

si ottiene allora che

$$|\langle T, \psi_n \rangle| > 1 \quad \text{e} \quad \sum_{|\alpha| \leq n} \max_K |D^\alpha \psi_n| < \frac{1}{n}.$$

Perciò ϕ_n converge a 0 con ogni sua derivata, uniformemente in K , ma $\langle T, \phi_n \rangle$ non converge a 0. \square

Se esiste $c > 0$ tale che (5.1) si verifichi, si dirà che T ha ordine n in K . Se T ha lo stesso ordine n su ogni compatto $K \subset \Omega$, si dirà che T ha ordine n in Ω . Una distribuzione ha ordine finito su Ω se ha ordine n su Ω per qualche n .

Proposizione 5.2.3 (Le funzioni sono univocamente determinate come distribuzioni). *Sia $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che*

$$\int_{\Omega} f \phi \, dx = 0 \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Allora $f = 0$ quasi ovunque in Ω .

Dim. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $\Omega_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}\}$. Sia $j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} j(x) dx = 1$ e $\text{supp}(j) \subseteq B(0, 1)$. Poniamo inoltre $j_n(x) = n^N j(nx)$ e $\phi(y) = j_n(x - y)$.

Fissato $\nu \in \mathbb{N}$, se $n \geq \nu$ ed $x \in \Omega_\nu$ abbiamo che $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (dato che $\text{supp}(\phi) \subseteq x + \overline{B(0, 1/n)} \subset \Omega$) e quindi

$$j_n \star f(x) = \int_{\Omega} f(y) j_n(x - y) dy = \int_{\Omega} f(y) \phi(y) dy = 0$$

per l'ipotesi. Poiché $j_n \star f \rightarrow f$ in ogni $L^1(K)$ con K compatto contenuto in Ω_ν , allora $f = 0$ q.o. in K e quindi anche in Ω_ν . Si conclude, facendo tendere ν ad ∞ . \square

5.3. La derivata distribuzionale e gli spazi di Sobolev

Siano $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$, $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$, e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. La distribuzione

$$D^\alpha T = \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}$$

definita da

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

è la α -sima derivata distribuzionale di T .

Se $f \in C^1(\Omega)$, otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_j} T_f, \phi \rangle &= -\langle T_f, \partial_{x_j} \phi \rangle = -\int_{\Omega} (\partial_{x_j} \phi) f dx = \\ &= -\int_{\Omega} [\partial_{x_j}(\phi f) - \phi \partial_{x_j} f] dx = \int_{\Omega} (\partial_{x_j} f) \phi dx = \\ &= \langle T_{\partial_{x_j} f}, \phi \rangle, \end{aligned}$$

dove si è usato il Teorema della Divergenza nell'ultima uguaglianza. Dunque la definizione di derivata distribuzionale estende quella classica.

Si noti che con questa definizione ogni distribuzione risulta differenziabile infinite volte.

Esempio 5.3.1. Sia $H(x) = \mathcal{X}_{[0, +\infty)}(x)$ — la *funzione di Heavisde*. È chiaro che $H'(x) = 0$ quasi ovunque in \mathbb{R} .

Calcoliamo la derivata distribuzionale di H :

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0),$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Perciò $H' = \delta_0$ nel senso delle distribuzioni.

Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Se per ogni $j, 1 \leq j \leq N$, esiste $g_j \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che

$$\langle \partial_{x_j} f, \phi \rangle = \int_{\Omega} g_j \phi \, dx,$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, e cioè tale che

$$\int_{\Omega} f \partial_{x_j} \phi \, dx = - \int_{\Omega} g_j \phi \, dx,$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, allora si dice che g_j è la *derivata distribuzionale* di f rispetto a x_j e che $f \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. $W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale.

Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega) \subset W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $f \in L^p(\Omega)$ le cui derivate parziali prime nel senso delle distribuzioni sono tutte funzioni di $L^p(\Omega)$.

Lo spazio $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach con la norma

$$\|f\|_{1,p} = \left(\|f\|_p^p + \sum_{j=1}^N \|\partial_{x_j} f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{se } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_{\infty} + \sum_{j=1}^N \|\partial_{x_j} f\|_{\infty}.$$

Inoltre, se $1 \leq p < \infty$, si dirà che una successione di funzioni $f_n \in W^{1,p}(\Omega)$ converge debolmente ad una $f \in W^{1,p}(\Omega)$ in $W^{1,p}(\Omega)$, e si scriverà $f_n \rightharpoonup f$ in $W^{1,p}(\Omega)$, se per ogni $g \in L^{p'}(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, gli $N+1$ integrali

$$\int_{\Omega} g (f_n - f) \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} g (\partial_{x_j} f_n - \partial_{x_j} f) \, dx, \quad 1 \leq j \leq N,$$

convergono a zero.

Gli spazi di Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ con $m \geq 2$ intero si definiscono in modo analogo.

5.4. Operazioni sulle distribuzioni

Questa utile proposizione è dovuta a P.D. Lax e ci permette di estendere alcune operazioni elementari alle distribuzioni.

Proposizione 5.4.1 (Estensione di un operatore lineare). *Siano $L : \mathcal{D}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_2)$ e $L^* : \mathcal{D}(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega_1)$ due operatori lineari e continui per successioni che siano uno l'aggiunto dell'altro, cioè tali che*

$$\int_{\Omega_2} L(\phi)(y)\psi(y) \, dy = \int_{\Omega_1} \phi(x)L^*(\psi)(x) \, dx$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$ ed ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$.

Allora L si può estendere ad un operatore lineare e continuo di $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ in $\mathcal{D}'(\Omega_2)$ definito da

$$\langle L(T), \psi \rangle = \langle T, L^*(\psi) \rangle$$

per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ ed ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_2)$.

Dim. Se $\psi_n \rightarrow \psi$ in $\mathcal{D}(\Omega_2)$, allora $L^*(\psi_n) \rightarrow L^*(\psi)$ in $\mathcal{D}(\Omega_1)$, dato che L^* è continuo per successioni, e quindi $\langle T, L^*(\psi_n) \rangle \rightarrow \langle T, L^*(\psi) \rangle$; ciò dimostra che $\langle L(T), \psi_n \rangle \rightarrow \langle L(T), \psi \rangle$ e cioè che $L(T)$ è una distribuzione.

Se $T = T_f$ per qualche $f \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, allora

$$\langle L(T_f), \psi \rangle = \langle T_f, L^*(\psi) \rangle = \int_{\Omega_1} f(x) \cdot L^*(\psi)(x) \, dx = \int_{\Omega_2} L(f)(x) \cdot \psi(x) \, dx,$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che L^* è il trasposto di L sulle funzioni. Perciò $L(T_f) = L(f)$, il che prova che L estende $L|_{\mathcal{D}}$.

Infine, se $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega_1)$, allora

$$\langle L(T_n), \psi \rangle = \langle T_n, L^*(\psi) \rangle \rightarrow \langle T, L^*(\psi) \rangle = \langle L(T), \psi \rangle,$$

cioè L è continuo per successioni. □

Esempio 5.4.2. (i) **Moltiplicazione.** Sia $a \in C^\infty(\Omega)$; l'applicazione $L(\phi) = a \cdot \phi$ di $\mathcal{D}(\Omega)$ in sé è evidentemente uguale alla sua trasposta. Dunque, per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $a \cdot T$ è una distribuzione ben definita da $\langle a \cdot T, \phi \rangle = \langle T, a \cdot \phi \rangle$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(ii) **Traslazione e riflessione.** Siano $\Omega_1 = \Omega$ e $\Omega_2 = h + \Omega$ per $h \in \mathbb{R}^N$ e sia $L = \mathcal{T}_h$ — la traslazione tale che $\mathcal{T}_h \phi(x) = \phi(x - h)$; allora $L^* = \mathcal{T}_{-h}$. Per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la traslata $\mathcal{T}_h(T)$ è una distribuzione ben definita da $\langle \mathcal{T}_h(T), \psi \rangle = \langle T, \mathcal{T}_{-h} \psi \rangle$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(h + \Omega)$.

Analogamente, si può estendere alle distribuzioni l'operatore di riflessione \mathcal{R} , definito da $(\mathcal{R}\phi)(x) = \phi(-x)$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, che è il trasposto di sé stesso.

(iii) **Operatori differenziali.** Sia $L = D^\alpha$ definito su $\mathcal{D}(\Omega)$; integrando per parti $|\alpha|$ volte si ottiene che $L^* = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$. Quindi la differenziazione si estende (come abbiamo già fatto nel paragrafo precedente) alle distribuzioni.

Avendo già definito la moltiplicazione, possiamo ricavare la regola di derivazione di un prodotto $a \cdot T$:

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_j}(a \cdot T), \phi \rangle &= -\langle a \cdot T, \partial_{x_j} \phi \rangle = \\ &= -\langle T, a \cdot \partial_{x_j} \phi \rangle = -\langle T, \partial_{x_j}(a \cdot \phi) \rangle + \langle T, (\partial_{x_j} a) \cdot \phi \rangle = \\ &= \langle a \cdot \partial_{x_j} T, \phi \rangle + \langle (\partial_{x_j} a) \cdot T, \phi \rangle, \end{aligned}$$

cioè $\partial_{x_j}(a \cdot T) = a \cdot \partial_{x_j}T + (\partial_{x_j}a) \cdot T$.

Se inoltre

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha(x) D^\alpha$$

è un operatore differenziale lineare a coefficienti $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$ allora P manda $\mathcal{D}'(\Omega)$ in sé stesso con $\langle PT, \phi \rangle = \langle T, P^*\phi \rangle$ dove P^* è l'operatore trasposto definito da

$$(P^*\psi)(x) = \sum_{|\alpha|=0}^m (-1)^{|\alpha|} D^\alpha [a_\alpha(x)\psi(x)]$$

per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

(iv) **Jacobiano.** Se $\eta : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ è un diffeomorfismo ed L è la composizione $L(\phi) = \phi \circ \eta$, allora

$$\langle L(\phi), \psi \rangle = \int_{\Omega_2} \phi(\eta(y)) \psi(y) dy = \int_{\Omega_1} \phi(x) \psi(\eta^{-1}(x)) \text{Jac}(\eta^{-1})(x) dx,$$

dove $\text{Jac}(\eta^{-1})$ è il determinante Jacobiano della trasformazione $y = \eta^{-1}(x)$. Il trasposto L^* è dunque definito da $L^*(\psi) = (\psi \circ \eta^{-1}) \text{Jac}(\eta^{-1})$.

Perciò, per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $T \circ \eta$ è ben definita da $\langle T \circ \eta, \psi \rangle = \langle T, \text{Jac}(\eta^{-1})(\psi \circ \eta^{-1}) \rangle$.

(v) **Convulsione.** Sia $\Omega = \mathbb{R}^N$ e sia $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. L'operatore di convulsione L_ξ , definito da $L_\xi(\phi) = \xi \star \phi$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, manda $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ in sé stesso in modo continuo. Con il teorema di Fubini, si fa vedere che il suo trasposto L_ξ^* è definito da $L_\xi^*(\psi) = (\mathcal{R}\xi) \star \psi$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Perciò, per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, la convulsione $\xi \star T$ è ben definita da $\langle \xi \star T, \psi \rangle = \langle T, (\mathcal{R}\xi) \star \psi \rangle$, per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Per esempio, se $T = \delta$, la delta di Dirac, allora

$$\langle \xi \star \delta, \psi \rangle = \langle \delta, (\mathcal{R}\xi) \star \psi \rangle = ((\mathcal{R}\xi) \star \psi)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \xi(y)\psi(y) dy = \langle \xi, \psi \rangle;$$

quindi $\xi \star \delta = \xi$.

Si noti ancora che

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha(\xi \star T), \psi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \xi \star T, D^\alpha \psi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, (\mathcal{R}\xi) \star D^\alpha \psi \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha((\mathcal{R}\xi) \star \psi) \rangle = \langle D^\alpha T, (\mathcal{R}\xi) \star \psi \rangle = \\ &= \langle \xi \star D^\alpha T, \psi \rangle. \end{aligned}$$

In maniera completamente analoga, dimostriamo che $D^\alpha(\xi \star T) = (D^\alpha \xi) \star T$. Ritornando all'esempio della delta di Dirac, otteniamo che $\xi \star D^\alpha \delta = D^\alpha \xi$.

Infine, possiamo definire la convoluzione a destra: $L_\xi(\phi) = \phi \star \xi$; questa si estende ad una distribuzione T ed in più si ha che

$$T \star \xi = \xi \star T.$$

Lemma 5.4.3. *Sia $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-N} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \eta(m/n) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta(x) dx.$$

Dim. Sia Q il cubo $[-1, 1] \times \cdots \times [-1, 1]$ e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\eta = 0$ fuori del cubo kQ . Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x) dx = \int_{kQ} \eta(x) dx.$$

Sia \mathcal{P} la partizione definita su kQ dai cubi $m + Q/n$. Se $s(\eta, \mathcal{P})$ e $S(\eta, \mathcal{P})$ indicano le somme di Riemann inferiori e superiori relative alla funzione η , si ha:

$$s(\eta, \mathcal{P}) \leq n^{-N} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \eta(m/n) \leq S(\eta, \mathcal{P})$$

e quindi la tesi. \square

Teorema 5.4.4 (Regolarità della convoluzione). *Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e $\xi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. La funzione $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = \langle T, \mathcal{T}_x(\mathcal{R}\xi) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, come distribuzione, coincide con $\xi \star T$

Dim. Sia $f(x) = \langle T, \mathcal{T}_x(\mathcal{R}\xi) \rangle$; dato che

$$\max_{y \in \mathbb{R}^N} |D^\alpha \xi(x_n - y) - D^\alpha \xi(x - y)| \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}_0^N,$$

se $x_n \rightarrow x$, allora $\mathcal{T}_{x_n}(\mathcal{R}\xi) \rightarrow \mathcal{T}_x(\mathcal{R}\xi)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, e quindi $f(x_n) \rightarrow f(x)$, cioè f è continua.

Analogamente, se Δ_j^h è l'operatore definito da

$$(\Delta_j^h \phi)(x) = \frac{\phi(x + he_j) - \phi(x)}{h},$$

osservando che

$$\Delta_j^h f = \langle T, \mathcal{T}_x \Delta_j^h(\mathcal{R}\xi) \rangle$$

e che $\mathcal{T}_x \Delta_j^h(\mathcal{R}\xi) \rightarrow \mathcal{T}_x D_j(\mathcal{R}\xi)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ se $h \rightarrow 0$, dimostriamo che $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e che $D_j f = \langle T, \mathcal{T}_x D_j(\mathcal{R}\xi) \rangle$. Per induzione segue che $f \in C^n(\mathbb{R}^N)$ per tutti gli $n \in \mathbb{N}$ ed inoltre $D^\alpha f(x) = \langle T, \mathcal{T}_x D^\alpha(\mathcal{R}\xi) \rangle$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ con $|\alpha| \leq n$.

Dimostriamo ora che f e $\xi \star T$ coincidono come distribuzioni. Sia $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$; poichè abbiamo appena dimostrato che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\langle T_f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) \langle T, \mathcal{T}_x(\mathcal{R}\xi) \rangle dx.$$

Utilizzando il Lemma 5.4.3, risulta allora che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) \langle T, \mathcal{T}_x(\mathcal{R}\xi) \rangle dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-N} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \psi\left(\frac{m}{n}\right) \langle T, \mathcal{T}_{\frac{m}{n}}(\mathcal{R}\xi) \rangle = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, n^{-N} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \psi\left(\frac{m}{n}\right) \mathcal{T}_{\frac{m}{n}}(\mathcal{R}\xi) \rangle. \end{aligned}$$

Si noti che, nella formula precedente, la sommatoria è finita perché fatta sugli $m \in \mathbb{Z}$ per cui $m/n \in \text{supp}(\psi)$.

Osserviamo ora che

$$n^{-N} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \psi\left(\frac{m}{n}\right) \mathcal{T}_{\frac{m}{n}}(\mathcal{R}\xi) \rightarrow (\mathcal{R}\xi) \star \psi \text{ in } \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$$

per $n \rightarrow \infty$ e quindi l'ultimo limite è uguale a $\langle T, (\mathcal{R}\xi) \star \psi \rangle = \langle \xi \star T, \psi \rangle$, cioè $f = \xi \star T$. \square

Teorema 5.4.5 (Lo spazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ è denso in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$). *Siano $j, \eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tali che $\int_{\mathbb{R}^N} j(x) dx = 1$ e $\eta(0) = 1$. Siano inoltre $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} j(x/\varepsilon)$ e $\eta_\varepsilon(x) = \eta(\varepsilon x)$.*

Allora per ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ le distribuzioni $\eta_\varepsilon T, j_\varepsilon \star T$ e $\eta_\varepsilon(j_\varepsilon \star T)$ convergono a T in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ se $\varepsilon \rightarrow 0$.

In particolare, dato che $\eta_\varepsilon(j_\varepsilon \star T) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, ogni $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ è limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ di elementi di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Dim. Basterà dimostrare i primi due casi: il terzo seguirà con facilità dai primi due.

È chiaro che $\mathcal{R}j_\varepsilon$ è un nucleo mollificatore e quindi $(\mathcal{R}j_\varepsilon) \star \phi \rightarrow \phi$ uniformemente se $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. D'altra parte, $D^\alpha((\mathcal{R}j_\varepsilon) \star \phi) = (\mathcal{R}j_\varepsilon) \star D^\alpha \phi$, per ogni multi-indice α , e questo converge uniformemente a $D^\alpha \phi$ per la stessa ragione. Dunque, $(\mathcal{R}j_\varepsilon) \star \phi \rightarrow \phi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e quindi

$$\langle j_\varepsilon \star T, \phi \rangle = \langle T, (\mathcal{R}j_\varepsilon) \star \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle.$$

Abbiamo ora che

$$\|\eta_\varepsilon \cdot \phi - \phi\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \max\{|\eta(\varepsilon x) - 1| : x \in \text{supp}(\phi)\} \rightarrow 0,$$

se $\varepsilon \rightarrow 0$. In modo analogo, si dimostra che $D^\alpha(\eta_\varepsilon \cdot \phi) \rightarrow D^\alpha \phi$ uniformemente e dunque $\eta_\varepsilon \cdot \phi \rightarrow \phi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Per esempio, dato che

$$\begin{aligned} \|D_j(\eta_\varepsilon \phi) - D_j \phi\|_\infty &\leq \\ &\varepsilon \|D_j \eta\|_\infty \|\phi\|_\infty + \|D_j \phi\|_\infty \max\{|\eta(\varepsilon x) - 1| : x \in \text{supp}(\phi)\}, \end{aligned}$$

si ottiene la convergenza delle derivate prime.

$$\text{In conclusione } \langle \eta_\varepsilon \cdot T, \phi \rangle = \langle T, \eta_\varepsilon \cdot \phi \rangle \rightarrow \langle T, \phi \rangle. \quad \square$$

5.5. Distribuzioni a supporto compatto

Lo spazio $\mathcal{E}(\Omega)$ è lo spazio metrico completo delle funzioni $C^\infty(\Omega)$ dove la distanza d è definita come segue. Sia K_n una successione crescente di compatti contenuti in Ω , l'unione dei quali sia uguale ad Ω . Per ogni n , definiamo

$$\|\phi\|_n = \sum_{|\alpha| \leq n} \max_{K_n} |D^\alpha \phi|,$$

per ogni $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$, e

$$d(\phi, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{\|\phi - \psi\|_n}{1 + \|\phi - \psi\|_n},$$

per ogni $\phi, \psi \in \mathcal{E}(\Omega)$.

La seguente proposizione dà una prima caratterizzazione dei funzionali lineari e continui su $\mathcal{E}(\Omega)$ e cioè degli elementi di $\mathcal{E}'(\Omega)$.

Proposizione 5.5.1. *Sia $L : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare. Allora L è continuo se e solo se esistono un intero $n \geq 0$ ed una costante c tali che*

$$(5.2) \quad |\langle L, \phi \rangle| \leq c \|\phi\|_n \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Dim. Dato che, se $\phi_k \rightarrow \phi$ per $k \rightarrow \infty$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ allora $\|\phi_k - \phi\|_m \rightarrow 0$ per ogni $m = 0, 1, \dots$, allora (5.2) implica che

$$|\langle L, \phi_k \rangle - \langle L, \phi \rangle| \leq c \|\phi_k - \phi\|_n \rightarrow 0,$$

e quindi L è continuo.

Viceversa, se non valesse (5.2), per ogni intero n e costante $c > 0$ potremmo trovare $\phi_{n,c} \in \mathcal{E}(\Omega)$ tale che

$$|\langle L, \phi_{n,c} \rangle| > c \|\phi_{n,c}\|_n.$$

Posto

$$\psi_n = \frac{1}{n} \frac{\phi_{n,n}}{\|\phi_{n,n}\|_n},$$

si ottiene allora che

$$|\langle L, \psi_n \rangle| > 1 \quad \text{e} \quad \|\psi_n\|_n = \frac{1}{n}.$$

Si noti ora che per ogni intero $m \geq 0$ fissato risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_n = 0.$$

Perciò, dato che per ogni $\nu \in \mathbb{N}$

$$d(\psi_n, 0) \leq \sum_{m=0}^{\nu} \frac{\|\psi_n\|_m}{1 + \|\psi_n\|_m} + \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^m},$$

si ha:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(\psi_n, 0) \leq \sum_{m=\nu+1}^{\infty} \frac{1}{2^m},$$

cioè $d(\psi_n, 0) \rightarrow 0$ per l'arbitrarietà di ν . \square

Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia ω un sottoinsieme aperto di Ω ; diremo che T è *uguale a zero in ω* se $\langle T, \phi \rangle = 0$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\omega)$.

Il *supporto di T* , indicato con $\text{supp}(T)$, è il complementare dell'insieme dei punti x di Ω tali che T è uguale a zero in un intorno di x .

Indichiamo con $\mathcal{D}'_0(\Omega)$ l'insieme di tutte le distribuzioni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tali che $\text{supp}(T)$ è compatto.

Lemma 5.5.2. *Supponiamo che $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ abbiano supporti disgiunti, allora $\langle T, \phi \rangle = 0$.*

Dim. Per ogni $y \in \text{supp}(\phi)$, dato che $y \notin \text{supp}(T)$, possiamo scegliere un aperto $\omega_y \subset \Omega$ contenente y e sul quale T è uguale a zero. Sia $h_y \in \mathcal{D}(\omega_y)$ non-negativa e con $h_y(y) > 0$; possiamo supporre che $h_y > 0$ in ω_y . Al variare di y , gli insiemi ω_y ricoprono $\text{supp}(\phi)$ e quindi, per la compattezza di $\text{supp}(\phi)$, esiste un numero finito di aperti $\omega_{y_1}, \dots, \omega_{y_m}$ che ricoprono $\text{supp}(\phi)$; poniamo $h_j = h_{y_j}$ e, per $j = 1, \dots, m$, definiamo delle funzioni ψ_j così:

$$\psi_j = \begin{cases} \phi \frac{h_j}{h_1 + \dots + h_m} & \text{in } \bigcup_{j=1}^m \omega_{y_j}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poichè $h_1 + \dots + h_m > 0$ su $\text{supp}(\phi)$, ψ_j è C^∞ con supporto in ω_j . Dato che T è uguale a zero in ω_j , allora $\langle T, \psi_j \rangle = 0$ e, poichè $\phi = \sum_{j=1}^m \psi_j$, allora $\langle T, \phi \rangle = 0$. \square

Teorema 5.5.3. *Se $L : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è un funzionale lineare e continuo, allora L è un distribuzione a supporto compatto. Perciò $\mathcal{E}'(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'_0(\Omega)$.*

Dim. Per la Proposizione 5.5.1, esistono $n \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che $|\langle L, \phi \rangle| \leq c \|\phi\|_n$ per ogni $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Sia K_n il compatto che serve a definire $\|\cdot\|_n$; se $x \notin K_n$, esiste $\omega_x \subset \Omega$ con $\omega_x \cap K_n = \emptyset$; se $\phi \in \mathcal{D}(\omega_x)$, allora $|\langle L, \phi \rangle| \leq c \|\phi\|_n = 0$ e cioè $x \notin \text{supp}(L)$. Dunque $\text{supp}(L) \subseteq K_n$. \square

Quindi, i funzionali lineari e continui su $\mathcal{E}(\Omega)$ sono distribuzioni a supporto compatto. Il seguente risultato ci garantisce che è vero anche il contrario.

Teorema 5.5.4 ($\mathcal{D}'_0(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega)$). *Se $T \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$ allora esistono un compatto $K \subset \Omega$, un intero $n \geq 0$ ed una costante $c > 0$ tali che*

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq n} \|D^\alpha \phi\|_{\infty, K},$$

per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Inoltre, T si estende ad un funzionale lineare continuo su $\mathcal{E}(\Omega)$ in modo univoco.

In altre parole, $\mathcal{D}'_0(\Omega) \subseteq \mathcal{E}(\Omega)$.

Dim. Sia $T \in \mathcal{D}'_0(\Omega)$ e scegliamo $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno di $\text{supp}(T)$ e si ponga $K = \text{supp}(\psi)$. Allora il Lemma 5.5.2 implica che $\langle T, \phi \rangle = \langle T, \psi \phi \rangle$ per qualsiasi $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, dato che i supporti di $(1 - \psi)\phi$ e di T sono disgiunti.

Sia $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$; dato che $\text{supp}(\psi \phi) \subseteq \text{supp}(\psi) = K$, la Proposizione 5.2.2 garantisce che esistono $n = n(\psi) = m(T)$ e $\tilde{c}_T > 0$ tali che

$$|\langle T, \psi \phi \rangle| \leq \tilde{c}_T \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(\psi \phi)\|_{\infty, K}.$$

Si noti che

$$D^\alpha(\psi \phi) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \phi D^{\alpha-\beta} \psi,$$

dove

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_N}{\beta_N}$$

(si veda l'Esercizio 9).

Quindi, dato che $\text{supp}(\psi\phi) \subset K \cap \text{supp}(\phi)$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \|D^\alpha(\psi\phi)\|_{\infty, K} &= \|D^\alpha(\psi\phi)\|_{\infty, K \cap \text{supp}(\phi)} \leq \\ &\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N} \binom{\alpha}{\beta} \|D^\beta\phi\|_{\infty, K \cap \text{supp}(\phi)} \|D^{\alpha-\beta}\psi\|_{\infty, K \cap \text{supp}(\phi)} \leq \\ &\left\{ \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N} \binom{\alpha}{\beta} \|D^{\alpha-\beta}\psi\|_{\infty, K} \right\} \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta\phi\|_{\infty, K}, \end{aligned}$$

da cui

$$|\langle T, \phi \rangle| = |\langle T, \psi\phi \rangle| \leq c \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta\phi\|_{\infty, K},$$

dove la costante

$$c = \tilde{c}_T \sum_{|\alpha| \leq m} \left\{ \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\beta_N=0}^{\alpha_N} \binom{\alpha}{\beta} \|D^{\alpha-\beta}\psi\|_{\infty, K} \right\}$$

dipende solo da N e da T . Dunque T ha ordine finito.

Con la scelta fatta di ψ , l'applicazione lineare $\tilde{T} : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle$ per $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$ risulta allora continua, dato che esiste $K_n \supseteq K$ con $n \geq m$ e quindi

$$|\langle T, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta\phi\|_{\infty, K} \leq c \|\phi\|_n;$$

\tilde{T} estende T a tutto $\mathcal{E}(\Omega)$: infatti se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha che $\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle = \langle T, \phi \rangle$.

Il fatto che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$ implica che tale estensione è unica. \square

Proposizione 5.5.5 (Lo spazio $\mathcal{E}'(\Omega)$ è contenuto in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$). *Sia $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$; allora esiste una ed una sola $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ con $\text{supp}(\tilde{T}) \subset \Omega$ tale che $\tilde{T} = T$ su $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Dim. Come abbiamo fatto nella dimostrazione del Teorema 5.5.4, definiamo $\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, dove $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\text{supp}(\psi) \subset \Omega$ e $\psi \equiv 1$ in un intorno di $\text{supp}(T)$. Con argomenti analoghi a quelli già visti, possiamo dimostrare che \tilde{T} estende T , è continuo ed è univocamente determinato.

Se ora $x \notin \text{supp}(\psi)$, esiste un intorno $\omega_x \subset \Omega$ di x con $\omega_x \cap \text{supp}(\psi) = \emptyset$. Se $\phi \in \mathcal{D}(\omega_x)$, allora $\text{supp}(\psi\phi) \cap \text{supp}(T) = \emptyset$ dato che $\text{supp}(T) \subseteq \text{supp}(\psi)$ e $\text{supp}(\phi) \subset \omega_x$. Perciò $\langle \tilde{T}, \phi \rangle = \langle T, \psi\phi \rangle = 0$ e quindi $x \notin \text{supp}(\tilde{T})$. Dunque $\text{supp}(\tilde{T}) \subseteq \text{supp}(\psi) \subset \Omega$. \square

La proposizione appena dimostrata ci autorizza a considerare $\mathcal{E}'(\Omega)$ come sottoinsieme di $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 5.5.6 (Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{D}'(\Omega)$). *Per ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, esiste una successione $T_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ che converge a T in $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Dim. Per $n \in \mathbb{N}$ poniamo $\Omega_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{n}, |x| < n\}$. Allora $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ per $n \in \mathbb{N}$ e $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$.

Sia $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tale che $\text{supp}(\psi_n) \subset \Omega_{n+1}$ e $\psi_n \equiv 1$ su $\bar{\Omega}_n$. È chiaro che $\text{supp}(\psi_n T) \subseteq \text{supp}(\psi_n)$ e che $\psi_n T \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. In questo modo si ha anche che $\psi_n T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$.

Sia j_ε il solito nucleo di sommabilità tale che $\text{supp}(j_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon)$; scegliamo una successione di numeri positivi ε_n che converga decrescendo a zero, facendo attenzione che $\varepsilon_n < \text{dist}(\text{supp}(\psi_n), \partial\Omega_{n+1})$. Perciò, abbiamo che $\text{supp}(j_{\varepsilon_n} \star (\psi_n T)) \subset \Omega_{n+1}$ e quindi $j_{\varepsilon_n} \star (\psi_n T) \in \mathcal{D}(\Omega_{n+1}) \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$. Per il Teorema 5.4.5, $j_{\varepsilon_n} \star (\psi_n \cdot T) \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ e quindi anche in $\mathcal{D}'(\Omega)$. \square

5.6. Il teorema fondamentale per le distribuzioni

Teorema 5.6.1 (Fondamentale del calcolo). *Siano $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Supponiamo che esista un vettore $h \in \mathbb{R}^N$ tale che la traslata $\mathcal{T}_{th}\phi$ appartenga a $\mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $t \in [0, 1]$.*

Allora

$$(5.3) \quad \langle T, \mathcal{T}_h\phi \rangle - \langle T, \phi \rangle = \int_0^1 \sum_{j=1}^N y_j \langle \partial_j T, \mathcal{T}_{th}\phi \rangle dt.$$

In particolare, se $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ e per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ risulta:

$$(5.4) \quad f(x+h) - f(x) = \int_0^1 h \cdot \nabla f(x+th) dt.$$

Dim. Sia $\mathcal{O}_\phi = \{z \in \mathbb{R}^N : \mathcal{T}_z\phi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$; per quanto dimostrato nel Teorema 5.4.4, la funzione $z \mapsto \langle \partial_j T, \mathcal{T}_z\phi \rangle$ è di classe $C^\infty(\mathcal{O}_\phi)$; inoltre, per ipotesi, $th \in \mathcal{O}_\phi$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Posto $\psi(t) = \langle T, \mathcal{T}_{th}\phi \rangle$, risulta che

$$(5.5) \quad \langle T, \mathcal{T}_h\phi \rangle - \langle T, \phi \rangle = \psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t) dt.$$

Ora, dato che per $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\frac{\mathcal{T}_{z+\varepsilon e_j} \phi(x) - \mathcal{T}_z \phi(x)}{h} = \frac{\phi(x - z - \varepsilon e_j) - \phi(x - z)}{h} \rightarrow -\partial_j \mathcal{T}_z \phi(x)$$

in $\mathcal{D}(\Omega)$, si ha che

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \langle T, \mathcal{T}_z \phi \rangle = \langle \partial_j T, \mathcal{T}_z \phi \rangle$$

e dunque

$$\psi'(t) = \sum_{j=1}^N h_j \langle \partial_j T, \mathcal{T}_{th} \phi \rangle,$$

da cui, tramite la (5.5), si ottiene la (5.3).

Nel caso in cui $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ risulta che

$$\begin{aligned} \langle \partial_j T_f, \mathcal{T}_{th} \phi \rangle &= - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \partial_j \phi(x - th) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x) \phi(x - th) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x + th) \phi(x) dx \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle T_f, \mathcal{T}_h \phi \rangle - \langle T_f, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \phi(x - h) dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) \phi(x) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x + h) - f(x)] \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Queste due formule e (5.3) allora implicano che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} [f(x + h) - f(x)] \phi(x) dx &= \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^N h_j \int_{\mathbb{R}^N} \partial_j f(x + th) \phi(x) dx \right\} dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x) \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^N h_j \partial_j f(x + th) dt \right\} dx, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal teorema di Fubini, dato che $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ e $\partial_j f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$; (5.4) segue allora per l'arbitrarietà di $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. \square

Teorema 5.6.2 (Le distribuzioni con gradiente nullo sono costanti). *Sia Ω un aperto connesso in \mathbb{R}^N e sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.*

Se $\partial_j T = 0$, $j = 1, \dots, N$, allora esiste una costante C tale che

$$\langle T, \phi \rangle = C \int_{\Omega} \phi(x) dx \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dim. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\};$$

Ω_ε è aperto e non vuoto se ε è piccolo.

Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ e se $|y| < \varepsilon$, allora $\mathcal{T}_{ty}\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $t \in [0, 1]$. Per il Teorema 5.6.1 e per l'ipotesi,

$$\langle T, \mathcal{T}_y\phi \rangle - \langle T, \phi \rangle = 0.$$

Sia ora $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\text{supp}(\psi) \subset B(0, \varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) dy = 1$; la convoluzione $\psi \star \phi$ sta in $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$. Moltiplicando la precedente equazione per $\psi(y)$ ed integrando in y , risulta quindi che

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{B(0, \varepsilon)} \langle T, \mathcal{T}_y\phi \rangle \psi(y) dy.$$

Ora, per la Proposizione 5.4.4,

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \varepsilon)} \langle T, \mathcal{T}_y\phi \rangle \psi(y) dy &= \langle (\mathcal{R}\phi) \star T, \psi \rangle = \\ \langle T, \phi \star \psi \rangle &= \langle (\mathcal{R}\psi) \star T, \phi \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \langle T, \mathcal{T}_x\psi \rangle \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Perciò T è rappresentata in Ω_ε dalla funzione $f(x) = \langle T, \mathcal{T}_x\psi \rangle$, che è di classe C^∞ , ancora per la Proposizione 5.4.4. Dato che ε è arbitrario (ed f non dipende da ε), f rappresenta T su tutto Ω . Poiché $\partial_j T = 0$, allora $\partial_j f = 0$ in Ω , $j = 1, \dots, N$. Dunque esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $f = C$ su Ω , dato che Ω è connesso. \square

Il teorema appena dimostrato segue anche da un teorema più generale che presentiamo qui di seguito, per completezza.

Proposizione 5.6.3 (Equivalenza tra derivate classiche e distribuzionali). *Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia G_j la distribuzione $\partial_j T$, $j \in \{1, \dots, N\}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) T è una funzione $f \in C^1(\Omega)$;
- (ii) G_j è una funzione $g_j \in C^0(\Omega)$.

In ciascun caso, $g_j = \partial_j f$ — la derivata classica di f .

Dim. (i) \Rightarrow (ii). Per definizione

$$\langle G_j, \phi \rangle = - \int_{\Omega} f(x) \partial_j \phi(x) dx$$

e quindi, integrando per parti, si ottiene che

$$\langle G_j, \phi \rangle = \int_{\Omega} \partial_j f(x) \phi(x) dx,$$

dato che ϕ ha supporto compatto ed $f \in C^1(\Omega)$ per ipotesi. Dunque G_j è definita dalla funzione $\partial_j f$.

(ii) \Rightarrow (i). Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia Ω_ε l'insieme definito nella dimostrazione precedente. Se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ e se $|y| < \varepsilon$, allora $\mathcal{T}_{ty}\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ per ogni $t \in [0, 1]$.

Per il Teorema 5.6.1 e per l'ipotesi,

$$\begin{aligned} \langle T, \mathcal{T}_y \phi \rangle - \langle T, \phi \rangle &= \int_0^1 \sum_{j=1}^N y_j \langle \partial_j T, \mathcal{T}_{ty} \phi \rangle dt = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^N y_j \int_{\Omega_\varepsilon} g_j(x) \phi(x - ty) dx \right) dt, \end{aligned}$$

e quindi

$$(5.6) \quad \langle T, \mathcal{T}_y \phi \rangle - \langle T, \phi \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\int_0^1 y \cdot g(x + ty) dt \right] \phi(x) dx,$$

dove abbiamo indicato con $g(x)$ il vettore di componenti $g_j(x)$.

Come già fatto, sia ora $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\text{supp}(\psi) \subset B(0, \varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \psi(x) dx = 1$; la convoluzione $\psi \star \phi$ sta in $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\phi \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$. Moltiplicando la formula (5.6) per $\psi(y)$ ed integrando in y , risulta quindi che

$$(5.7) \quad \int_{B(0, \varepsilon)} \langle T, \mathcal{T}_y \phi \rangle \psi(y) dy - \langle T, \phi \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x) \left\{ \int_{B(0, \varepsilon)} \psi(y) \left[\int_0^1 y \cdot g(x + ty) dt \right] dy \right\} dx,$$

dove si è applicato ancora una volta il teorema di Fubini.

Ora, per la Proposizione 5.4.4,

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \varepsilon)} \langle T, \mathcal{T}_y \phi \rangle \psi(y) dy &= \langle (\mathcal{R}\phi) \star T, \psi \rangle = \\ \langle T, \phi \star \psi \rangle &= \langle (\mathcal{R}\psi) \star T, \phi \rangle = \int_{\Omega_\varepsilon} \langle T, \mathcal{T}_x \psi \rangle \phi(x) dx. \end{aligned}$$

La formula (5.7) può dunque essere riscritta così:

$$\begin{aligned}\langle T, \phi \rangle &= \int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x) \left\{ \langle T, \mathcal{T}_x \psi \rangle - \int_{B(0, \varepsilon)} \psi(y) \left[\int_0^1 y \cdot g(x + ty) dt \right] dy \right\} dx = \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \phi(x) f(x) dx,\end{aligned}$$

dove si è definito $f(x)$ uguale all'espressione dentro la parentesi graffa.

Infine, dalla formula (5.6) e dal fatto che sia f che g sono continue segue che per $x \in \Omega_\varepsilon$ ed $|y| < \varepsilon$ si ha:

$$\begin{aligned}f(x + y) - f(x) &= \int_0^1 y \cdot g(x + ty) dt = \\ &= g(x) \cdot y + \int_0^1 y \cdot [g(x + ty) - g(x)] dt = \\ &= g(x) \cdot y + o(|y|),\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che $g_j \in C^0(\Omega)$. Questo vuol dire che $f \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ e che $\partial_j f = g_j$. Si conclude scegliendo ε arbitrariamente piccolo. \square

5.7. Le distribuzioni temperate

Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ lo spazio di Schwartz delle funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ che decadono all'infinito, insieme a tutte le loro derivate, più rapidamente di qualsiasi polinomio (si veda il paragrafo 4.2 per la definizione e le prime proprietà). Diremo che una successione $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge a 0 in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{\alpha, \beta}(\phi_n) = 0$$

per ogni coppia di multi-indici α e β , dove, come già definito:

$$p_{\alpha, \beta}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta \phi(x)|.$$

Lo spazio dei funzionali lineari e continui da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ a \mathbb{C} , il duale $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, si dice lo spazio delle *distribuzioni temperate*. Un funzionale lineare $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ appartiene quindi a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T, \phi_n \rangle \text{ ogni volta che } \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = 0 \text{ in } \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Dato che $\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se e solo se $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, possiamo definire la trasformata di Fourier di una distribuzione temperata: se $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ poniamo per definizione:

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Il Teorema 4.2.1 ed il Teorema 4.3.3 implicano che la trasformata di Fourier è un'applicazione lineare e continua di $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in sé stesso tale che

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi \quad \text{per ogni } f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Teorema 5.7.1. *La trasformazione di Fourier è una biiezione lineare e continua di $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ in sé stesso, la cui inversa è anche continua.*

Dim. Se $T_n \rightarrow T$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ risulta:

$$\langle \hat{T}_n, f \rangle = \langle T_n, \hat{f} \rangle \rightarrow \langle T, \hat{f} \rangle = \langle \hat{T}, f \rangle,$$

cioè la trasformazione di Fourier è continua. Inoltre, per la formula di inversione, fare l'inversa della trasformazione di Fourier equivale ad applicare la trasformazione 3 volte: ne segue che anche l'inversa è continua. \square

Concludiamo calcolando la trasformata di Fourier di una distribuzione notevole.

Proposizione 5.7.2 (Trasformata di Fourier di $|x|^{\alpha-N}$). *Per $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < N$, si definisca:*

$$C_\alpha = \pi^{-\alpha/2} \Gamma(\alpha/2).$$

Allora per ogni $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ risulta:

$$(5.8) \quad C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi = C_{N-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\alpha-N} f(y) dy.$$

Dim. Si comincia con la seguente formula elementare:

$$C_\alpha |\xi|^{-\alpha} = \int_0^{+\infty} e^{-\pi \lambda |\xi|^2} \lambda^{\alpha/2-1} d\lambda.$$

Poiché $|\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi)$ è sommabile, applicando il teorema di Fubini, otteniamo:

$$\begin{aligned}
C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi &= \\
\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\pi \lambda |\xi|^2} \lambda^{\alpha/2-1} d\lambda \right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi &= \\
\int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi \lambda |\xi|^2} e^{2\pi i \xi \cdot x} \hat{f}(\xi) d\xi \right) \lambda^{\alpha/2-1} d\lambda &= \\
\int_0^{+\infty} \lambda^{-N/2} \lambda^{\alpha/2-1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{\pi}{\lambda} |x-y|^2} f(y) dy \right) d\lambda &= \\
C_{N-\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\alpha-N} f(y) dy. &
\end{aligned}$$

Nella terza uguaglianza abbiamo usato il Lemma 4.2.2 ed il punto (iv) del Teorema 4.1.1. L'ultima uguaglianza segue dal teorema di Fubini. \square

Esercizi

1. Scegliendo Ω opportunamente, dimostrare con un esempio che $L^p(\Omega) \not\subseteq L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Considerare poi il problema nel caso di un aperto Ω qualsiasi.
2. Dimostrare che T_f e T_μ sono distribuzioni.
3. Sia $j \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^N} j(x) dx = 1$, e sia $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} j(x/\varepsilon)$. Dimostrare che, se $0 \in \Omega$, $T_{j_\varepsilon} \rightarrow \delta_0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
4. Verificare che le distribuzioni definite nell'Esempio 5.2.1 sono di ordine 0.
5. Il funzionale su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ definito da

$$\langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx = \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx,$$

si dice il *valore principale* di $\frac{1}{x}$, e si indica anche con $\text{V.P.}(\frac{1}{x})$. Dimostrare che esso è ben definito e che è una distribuzione di ordine 1.¹

Dimostrare inoltre che se $\varepsilon \rightarrow 0$, allora $\frac{1}{x} \chi_{\{|x| > \varepsilon\}}(x) \rightarrow \text{V.P.}(\frac{1}{x})$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

¹Suggerimento: $\text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = \text{V.P.} \int_0^{+\infty} \frac{\phi(x) - \phi(-x)}{x} dx$.

6. Il funzionale

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d^n \phi}{dx^n} (1/n)$$

definisce una distribuzione sull'intervallo $(0, 1)$ che non è di ordine finito.

7. Il supporto di ogni distribuzione T è un sottoinsieme chiuso di Ω .
8. Dimostrare che $\text{supp}(\delta_x) = \{x\}$.
9. Se f è una funzione continua in Ω , allora $\text{supp}(T_f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$. Se inoltre $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, allora il supporto di T_f è il supporto essenziale di f .
10. Dimostrare la formula $D^\alpha(\psi \phi)$ anticipata nella dimostrazione del Teorema 5.5.4.²
11. Dimostrare che $\text{supp}(D^\alpha T) \subseteq \text{supp}(T)$. Con un esempio dimostrare che in generale $\text{supp}(D^\alpha T) \subsetneq \text{supp}(T)$.
12. Dimostrare che la topologia generata dalla distanza definita nel paragrafo 5.5 non dipende dalla particolare successione di compatti. Dimostrare poi che $\mathcal{E}(\Omega)$ è effettivamente uno spazio metrico completo rispetto a tale distanza e che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$.
13. Verificare il teorema fondamentale del calcolo per $T = \delta_{x_0}$.
14. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ assolutamente continua. Dimostrare che $DT_f = T_{f'}$.
15. Sia $k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la funzione di Cantor. È vero che $k' = 0$ in $(0, 1)$ nel senso delle distribuzioni?
16. Dimostrare che ogni distribuzione a supporto compatto è una distribuzione temperata. Trovare un esempio di una distribuzione che non sia temperata.
17. Dimostrare che il valore principale di $1/x$ — la distribuzione definita nell'Esercizio 5 — è una distribuzione temperata. Dimostrare inoltre che

$$\langle \text{V.P.}(1/x), \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\varepsilon^2 + x^2} \phi(x) dx.$$

18. Calcolare la trasformata di Fourier di $\text{V.P.}(1/x)$.
19. Calcolare la trasformata di Fourier di $x_j/|x|^{N+1}$, $j = 1, \dots, N$.
20. Calcolare la trasformata di Fourier di $D^\alpha \delta_{x_0}$.
21. Sia $s > 0$. Determinare tutte le funzioni $u \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $u'' - s^2 u = -\delta_0$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
22. Dimostrare che la funzione f definita alla fine della dimostrazione della Proposizione 5.6.3 non dipende da ε .

²Suggerimento: dimostrarla dapprima quando $N = 1$.

Funzioni armoniche

6.1. Generalità

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia u una funzione di classe $C^2(\Omega)$. L'*operatore di Laplace* o *laplaciano* è l'operatore differenziale Δ definito da

$$\Delta u = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \operatorname{div} (\nabla u).$$

L'*equazione di Poisson* è formalmente la seguente:

$$(6.1) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

dove $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione data. Nel caso in cui $f \equiv 0$ l'equazione (6.1) si dice l'*equazione di Laplace*:

$$(6.2) \quad \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Una funzione $u \in C^2(\Omega)$ che soddisfi (6.2) si dice una *funzione armonica* in Ω .

Queste due equazioni trovano applicazione in svariate situazioni fisiche. Per esempio, la funzione f può rappresentare una distribuzione di masse di densità variabile e la funzione u rappresenta il potenziale gravitazionale generato da f ; in idrodinamica piana, il potenziale della velocità di un fluido incompressibile, che si muove di moto non vorticoso, si può approssimare con una funzione armonica; la temperatura in un corpo omogeneo ed isotropo in equilibrio termico è anch'essa approssimabile con una funzione armonica.

6.2. La proprietà della media

Si dice che una funzione $u \in C^0(\Omega)$ gode della *proprietà della media in Ω* se

$$(6.3) \quad u(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y =$$

per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$.

Si noti che, se $u \in C^0(\Omega)$, (6.3) vale per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ se e solo se

$$(6.4) \quad u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy$$

vale per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$. Infatti, (6.3) implica che

$$\begin{aligned} \int_{B(x, r)} u(y) dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(x, s)} u(y) dS_y \right) ds = u(x) \int_0^r |\partial B(x, s)| ds = \\ &= u(x) |B(x, r)|, \end{aligned}$$

e quindi vale (6.4). Viceversa, derivando rispetto ad r l'identità

$$\int_{B(x, r)} u(y) dy = u(x) |B(x, r)|,$$

si ottiene (6.3).

Vedremo che la proprietà della media caratterizza le funzioni armoniche.

Teorema 6.2.1. *Se $u \in C^0(\Omega)$ soddisfa la proprietà della media per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, allora $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ e sia $j_\varepsilon = j_\varepsilon(|x|)$ di classe $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\text{supp}(j_\varepsilon) \subseteq B(0, \varepsilon)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(|x|) dx = 1$.

Per $x \in \Omega_\varepsilon$ definiamo $u_\varepsilon(x) = j_\varepsilon \star u(x)$ (si ricordi che $j_\varepsilon \star u = j_\varepsilon \star (u \chi_{\Omega_\varepsilon})$); allora $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, se $x \in \Omega_\varepsilon$, risulta:

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{B(0, \varepsilon)} j_\varepsilon(y) u(x - y) dy = \\ &= \int_0^\varepsilon j_\varepsilon(r) \left(\int_{\partial B(0, r)} u(x - y) dS_y \right) dr = \\ &= u(x) \int_0^\varepsilon j_\varepsilon(r) \omega_N r^{N-1} dr = u(x) \int_{\mathbb{R}^N} j_\varepsilon(y) dy = u(x). \end{aligned}$$

Dunque $u_\varepsilon = u$ in Ω_ε e quindi $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, concludiamo che $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

Teorema 6.2.2 (Proprietà della media per le funzioni armoniche). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Se $u \in C^2(\Omega)$ è armonica in Ω , allora u verifica la proprietà della media (6.3).*

Dim. Fissiamo $x \in \Omega$ e, per $r > 0$ tale che $r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, definiamo la funzione:

$$\psi(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} u(x + rz) dS_z.$$

Derivando sotto il segno di integrale, otteniamo:

$$\begin{aligned} \psi'(r) &= \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} z \cdot \nabla u(x + rz) dS_z = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0, 1)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + rz) dS_z = \\ &= \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y) dy = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nella penultima uguaglianza abbiamo usato il teorema della divergenza.

Perciò ψ è costante e si ha $\psi(r) = \psi(0^+) = u(x)$. \square

Teorema 6.2.3 (Inverso della proprietà della media). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Se $u \in C^0(\Omega)$ è tale che (6.3) vale per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, allora u è armonica in Ω .*

Dim. Per il Teorema 6.2.1 $u \in C^\infty(\Omega)$. Se $\Delta u(x) \neq 0$, esiste una pallina $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ tale che, per esempio, $\Delta u > 0$ su $B(x, r)$. Ma allora

$$0 = \psi'(r) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} \Delta u(y) dy > 0,$$

che è assurdo. \square

Una funzione u , continua in Ω , si dice *subarmonica* in Ω se, per ogni pallina $B(x, r) \subset \Omega$, risulta:

$$(6.5) \quad u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

Una funzione u si dice *superarmonica* in Ω se $-u$ è subarmonica.

È chiaro che le funzioni armoniche sono anche subarmoniche. Con una lieve modifica della dimostrazione del Teorema 6.2.2, si dimostra che, se $u \in C^2(\Omega)$ allora $\Delta u \geq 0$ in Ω se e solo se u è subarmonica in Ω (Esercizio 5).

6.3. Il principio di massimo

Una conseguenza della proprietà della media è il seguente risultato.

Teorema 6.3.1 (Principio di massimo). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $u \in C^0(\Omega)$ subarmonica in Ω .*

(i) *Se Ω è connesso ed esiste $x_0 \in \Omega$ tale che*

$$u(x_0) = \sup_{\Omega} u,$$

allora u è costante in Ω .

(ii) *Se Ω è limitato e $u \in C^0(\overline{\Omega})$ allora*

$$(6.6) \quad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

La prima proprietà passa sotto il nome di *principio di massimo forte*, mentre (6.6) si dice semplicemente il *principio di massimo*.

È chiaro che le funzioni superarmoniche godono di un *principio di minimo* e che le funzioni armoniche godono di ambedue i principi.

Dim. (i) Dimostriamo per prima il principio di massimo forte. Sia $M = \sup_{\Omega} u$ e sia $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = M$. Allora l'insieme $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ è non vuoto; esso è inoltre chiuso, essendo u continua. Se $x \in A$, la (6.5) implica che

$$0 \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} [M - u(y)] dS_y =$$

$$M - \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y \leq u(x) - u(x) = 0$$

per ogni $r \in (0, \text{dist}(x, \partial\Omega))$, e dunque $u \equiv M$ su $\partial B(x, r)$ dato che $M - u$ è non-negativa. Ciò vuol dire che, se $0 < r < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$, $B(x, r) \subset A$, cioè A è aperto in Ω . Perciò $A = \Omega$, dato che Ω è connesso.

(ii) Se Ω è limitato, esiste $x_0 \in \overline{\Omega}$ tale che $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$. Se $x_0 \in \Omega$, detta Ω' la componente connessa di Ω contenente x_0 , per quanto appena dimostrato, si ha che

$$u \equiv \max_{\overline{\Omega}} u$$

su Ω' e quindi (6.6) segue senz'altro. \square

Osservazione 6.3.2. Si osservi che la dimostrazione del Teorema 6.3.1 continua a valere anche nell'ipotesi meno restrittiva in cui si supponga che, per ogni $x \in \Omega$ fissato, esista $r_x > 0$ tale che u soddisfi (6.5) per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ con $0 < r < r_x$.

Osservazione 6.3.3. In particolare, il principio di massimo afferma che se $u \in C^0(\overline{\Omega})$ è superarmonica in Ω e $u = g$ su $\partial\Omega$ con $g \geq 0$ e non identicamente nulla, allora $u > 0$ in Ω se Ω è connesso.

Un utile strumento nello studio delle funzioni armoniche è il seguente *lemma di Hopf*.

Lemma 6.3.4 (Lemma di Hopf). *Sia B una palla e sia $p \in \partial B$. Supponiamo che*

- (i) $u \in C^2(B)$ sia continua in $B \cup \{p\}$ e $u < u(p)$ in B ;
- (ii) $\Delta u \geq 0$ in B .

Sia infine ℓ un vettore tale che $\ell \cdot \nu(p) > 0$, dove $\nu(p)$ è il versore della normale esterna a ∂B in p .

Allora

$$(6.7) \quad \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(p) - u(p - h\ell)}{h} > 0.$$

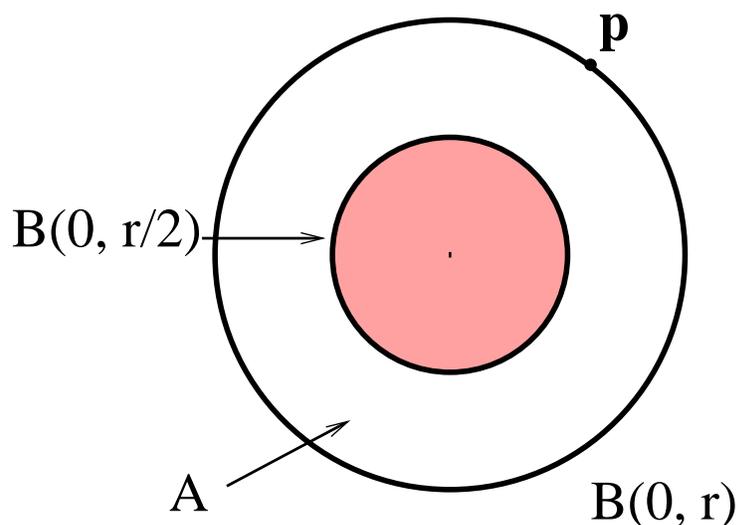


Figura 1. La costruzione nella dimostrazione del Teorema 6.3.5.

Dim. A meno di sostituire B con una palla leggermente più piccola, contenuta in B e tangente in p , possiamo sempre supporre che u sia continua su ∂B ; supponiamo inoltre che $B = B(0, r)$ con $r > 0$.

Definiamo la funzione $v(x) = e^{-\lambda|x|^2} - e^{-\lambda r^2}$ per $x \in B(0, r)$ dove il parametro $\lambda > 0$ sarà scelto in seguito. Risulta:

$$\nabla v(x) = -2\lambda e^{-\lambda|x|^2} x \quad \text{e} \quad \Delta v(x) = 2\lambda e^{-\lambda|x|^2} [2\lambda|x|^2 - N].$$

Possiamo quindi scegliere $\lambda > 0$ in modo tale che nell'insieme $A = B(0, r) \setminus B(0, r/2)$ risulti $\Delta v(x) \geq 0$ (basta scegliere $\lambda \geq 2N/r^2$).

Sia $M = \max_{\partial B(0, r/2)} u$; poiché $M < u(p)$ e $v = e^{-\lambda r^2/4} - e^{-\lambda r^2} > 0$ su $\partial B(0, r/2)$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ in modo tale che $u(x) + \varepsilon v(x) \leq u(p)$ per ogni $x \in \partial B(0, r/2)$ (basta scegliere $\varepsilon < (u(p) - M)/(e^{-\lambda r^2/4} - e^{-\lambda r^2})$).

D'altra parte su $\partial B(0, r)$ si ha $u(p) \geq u(x) = u(x) + \varepsilon v(x)$ e quindi in definitiva:

$$u + \varepsilon v - u(p) \leq 0 \quad \text{su} \quad \partial A.$$

Poiché $\Delta[u + \varepsilon v - u(p)] = \Delta u + \varepsilon \Delta v \geq 0$ in A , per il principio di massimo, $u + \varepsilon v - u(p) \leq 0$ in A . Ne segue che

$$\frac{(u + \varepsilon v)(p) - (u + \varepsilon v)(p - h\ell)}{h} \geq 0$$

per $h > 0$, cioè

$$\frac{u(p) - u(p - h\ell)}{h} \geq -\varepsilon \frac{v(p) - v(p - h\ell)}{h}.$$

Dato che

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{u(p) - u(p - h\ell)}{h} &\geq \\ -\varepsilon \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(p) - v(p - h\ell)}{h} &= -\varepsilon \nabla v(p) \cdot \ell > 0, \end{aligned}$$

concludiamo. □

Nel caso in cui u sia differenziabile in p la conclusione (6.7) del lemma si scrive semplicemente in termini della *derivata direzionale* di u in p :

$$\frac{\partial u}{\partial \ell}(p) > 0.$$

Teorema 6.3.5. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e $p \in \partial\Omega$.*

Supponiamo che esista una pallina aperta $B \subset \Omega$ tale che $p \in \partial B$ e sia $\nu(p)$ il versore della normale esterna a ∂B in p . Supponiamo inoltre che u soddisfi in Ω le ipotesi (i) e (ii) del Lemma 6.3.4.

Allora, per ogni vettore ℓ tale che $\ell \cdot \nu(p) > 0$, u soddisfa la (6.7).

Dim. Possiamo sempre scegliere una pallina $B' \subset B$ tale che in B' siano soddisfatte le ipotesi del Lemma 6.3.4 (è possibile infatti che ∂B contenga altri punti di $\partial\Omega$ oltre a p). Si conclude allora applicando il lemma in B' . □

Osservazione 6.3.6. Le conclusioni del Lemma 6.3.4 e del Teorema 6.3.5 non cambiano se rimpiazziamo l'ipotesi $\Delta u \geq 0$ in Ω con, per esempio, l'ipotesi $\Delta u + b(x) \cdot \nabla u \geq 0$ in Ω , dove $b(x) = (b_1(x), \dots, b_N(x))$ e le funzioni b_j , $j = 1, \dots, N$, sono continue in Ω . Ipotesi più generali per questo tipo di risultato si possono reperire in [PW].

6.4. La disuguaglianza di Harnack

Teorema 6.4.1 (Disuguaglianza di Harnack). *Sia u armonica e non negativa in un aperto Ω .*

Per ogni aperto connesso e limitato A tale che $\bar{A} \subset \Omega$, esiste una costante $C > 0$, che dipende solo da A , tale che

$$(6.8) \quad \sup_A u \leq C \inf_A u.$$

Dim. Sia $d_A = \text{dist}(A, \partial\Omega)$ e sia $r > 0$ tale che $4r < d_A$. Presi $x, y \in A$ tali che $|x - y| < r$, per la proprietà della media risulta:

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, 2r)|} \int_{B(x, 2r)} u(z) dz \geq \frac{N}{\omega_N (2r)^N} \int_{B(y, r)} u(z) dz = \frac{\omega_N r^N}{\omega_N 2^N r^N} u(y) = \frac{1}{2^N} u(y).$$

Scambiando x con y , si ottiene anche che $u(x) \leq 2^N u(y)$ per $x, y \in A$ con $|x - y| < r$.

Poiché \bar{A} è compatto, A può essere ricoperto da un numero finito di palline di raggio r (e contenute in Ω); inoltre, dato che A è connesso, fissati x ed y in A , possiamo scegliere da questo ricoprimento $n = n_A$ palline B_1, \dots, B_n in modo che $x \in B_1$, $y \in B_n$ ed con $B_{k+1} \cap B_k \neq \emptyset$ per $k = 1, \dots, n-1$ (vedi Fig. 4.2). Infatti, se esistesse una pallina B_i tale che $B_i \cap B_j = \emptyset$ per ogni $j \geq i+1$, allora A sarebbe sconnesso.

Presi quindi $n+1$ punti p_0, \dots, p_n tali che $p_0 = x, p_n = y$ e $p_k \in B_{k+1} \cap B_k$, per $k = 1, \dots, n-1$, dato che $|p_{k-1} - p_k| < r, k = 1, \dots, n$, abbiamo:

$$u(x) = u(p_0) \geq 2^{-N} u(p_1) \geq 2^{-2N} u(p_2) \geq \dots \geq 2^{-nN} u(p_n) = 2^{-nN} u(y).$$

Analogamente, si ottiene che $u(x) \leq 2^{nN} u(y)$. \square

L'importanza della disuguaglianza di Harnack è forse meglio apprezzata considerando alcune delle sue applicazioni.

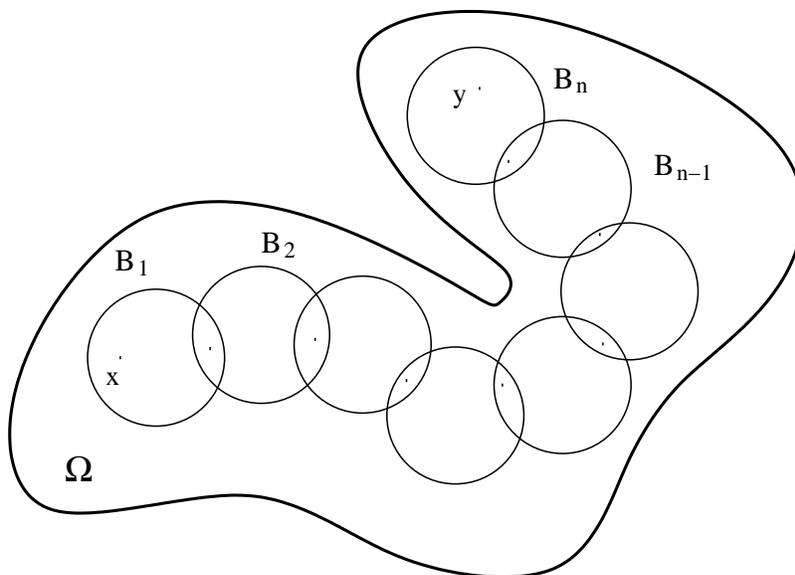


Figura 2. La costruzione nella dimostrazione del Teorema 6.4.1.

Teorema 6.4.2 (Liouville). *Se u è armonica e limitata inferiormente in tutto \mathbb{R}^N , allora u è costante.*

Dim. Dato che $u - \inf_{\mathbb{R}^N} u$ è armonica e non negativa in \mathbb{R}^N , per ogni $y \in \mathbb{R}^N$, preso $r > |x - y|$, dal Teorema 6.4.1 si ha che

$$0 \leq u(x) - \inf_{\mathbb{R}^N} u \leq 2^N \{u(y) - \inf_{\mathbb{R}^N} u\}.$$

Si osservi che quest'ultima disuguaglianza non dipende dal parametro r scelto e quindi essa continua a valere per ogni $y \in \mathbb{R}^N$ e perciò:

$$0 \leq u(x) - \inf_{\mathbb{R}^N} u \leq 2^N \inf_{\mathbb{R}^N} \{u - \inf_{\mathbb{R}^N} u\} = 0,$$

cioè $u(x) = \inf_{\mathbb{R}^N} u$. □

Teorema 6.4.3 (Unicità per l'equazione di Poisson). *Sia $N \geq 3$. Allora due soluzioni limitate dell'equazione di Poisson (6.1) in \mathbb{R}^N differiscono per una costante; (6.1) ha dunque una sola soluzione che tende a zero all'infinito.*

Dim. Se u_1 e u_2 sono due soluzioni limitate di (6.1), la funzione $w = u_1 - u_2$ è armonica e limitata in \mathbb{R}^N . Per il teorema di Liouville, w deve essere costante. □

Il teorema che segue mette in evidenza il collegamento tra la disuguaglianza di Harnack e la regolarità di una funzione.

Teorema 6.4.4. *Sia w una funzione definita in un aperto Ω e tale, per ogni $c \in \mathbb{R}$, le funzioni $w + c$ e $c - w$ soddisfino la disuguaglianza di Harnack (6.8) per ogni aperto limitato e connesso tale che $\overline{A} \subset \Omega$ in cui esse siano non negative.*

Allora w è localmente hölderiana, cioè per ogni $x \in \Omega$ esistono una pallina $B(x, R)$, una costante L ed un esponente $\alpha > 0$ tali che $|w(y) - w(z)| \leq L|y - z|^\alpha$ per ogni $y, z \in B(x, R)$.

Dim. Sia $x \in \Omega$ e sia $R_0 > 0$ tale che $\overline{B(x, R_0)} \subset \Omega$. Inoltre, per $R \in (0, R_0)$, si definisca:

$$M_R = \sup_{B(x, R)} w \quad \text{e} \quad m_R = \inf_{B(x, R)} w.$$

Poiché $M_R - w$ e $w - m_R$ sono non-negative in $B(x, R)$, per l'ipotesi del teorema risulta:

$$\begin{aligned} \sup_{B(x, R/2)} (M_R - w) &\leq C \inf_{B(x, R/2)} (M_R - w) \quad \text{e} \\ \sup_{B(x, R/2)} (w - m_R) &\leq C \inf_{B(x, R/2)} (w - m_R); \end{aligned}$$

quindi, sommando membro a membro, otteniamo:

$$\begin{aligned} M_R - m_R &\leq C \left\{ M_R - \sup_{B(x, R/2)} w + \inf_{B(x, R/2)} w - m_R \right\} = \\ &= C \left\{ M_R - m_R - [M_{R/2} - m_{R/2}] \right\}. \end{aligned}$$

Posto $\omega(R) = \text{osc}_{B(x, R)} = M_R - m_R$, abbiamo che

$$\omega(R/2) \leq (1 - C^{-1}) \omega(R).$$

La tesi segue dal seguente lemma tecnico, ponendo $\tau = 1/2$ e $\gamma = 1 - C^{-1}$. □

Lemma 6.4.5. *Sia $\omega(R)$ una funzione crescente sull'intervallo $(0, R_0]$ che per ogni $R \leq R_0$ soddisfi la disuguaglianza:*

$$(6.9) \quad \omega(\tau R) \leq \gamma \omega(R),$$

dove τ e γ sono due numeri in $(0, 1)$.

Allora esistono una costante positiva $C = C(\tau, \gamma)$ ed un esponente positivo $\alpha = \alpha(\tau, \gamma)$ tali che

$$\omega(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^\alpha \quad \text{per ogni } R \leq R_0.$$

Dim. Iteriamo la disuguaglianza (6.9): risulta:

$$\omega(\tau^m R) \leq \gamma \omega(\tau^{m-1} R) \leq \dots \leq \gamma^m \omega(R) \leq \gamma^m \omega(R_0),$$

per ogni $R \leq R_0$ ed ogni intero $m \geq 1$.

Fissato $R \leq R_0$, dato che $\tau < 1$, esiste un intero m tale che $\tau^m R_0 < R \leq \tau^{m-1} R_0$. Perciò

$$\begin{aligned} \omega(R) &\leq \omega(\tau^{m-1} R_0) \leq \gamma^{m-1} \omega(R_0) \leq \gamma^{\log_\tau(R/R_0)} \omega(R_0) = \\ &\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log_\tau \gamma} \omega(R_0), \end{aligned}$$

e quindi la tesi con $C = \omega(R_0)$ ed $\alpha = \log_\tau \gamma$. \square

6.5. Criteri di compattezza

I criteri di compattezza per famiglie di funzioni armoniche sono particolarmente semplici.

Teorema 6.5.1. *Una successione di funzioni u_n armoniche in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, continue su $\overline{\Omega}$ e convergenti uniformemente su $\partial\Omega$, converge uniformemente su $\overline{\Omega}$ ad una funzione armonica.*

Dim. Siano $n, m \in \mathbb{N}$; poiché $u_n - u_m$ è armonica in Ω , allora

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_n - u_m| = \max_{\partial\Omega} |u_n - u_m|^1.$$

Quindi, poiché $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C^0(\partial\Omega)$, essa è di Cauchy in $C^0(\overline{\Omega})$.

Sia ora u la funzione (continua) definita da

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Fissato $x \in \Omega$ e presa $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, per il teorema della media risulta:

$$u_n(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u_n(y) dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dato che u_n converge uniformemente, possiamo passare al limite sotto il segno di integrale ed ottenere:

$$u(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} u(y) dy.$$

Per l'arbitrarietà di $B(x, r)$, concludiamo che u è armonica in Ω . \square

Il risultato seguente utilizza la disuguaglianza di Harnack.

¹Si osservi che $|w|$ è subarmonica se w è armonica.

Teorema 6.5.2. *Sia Ω un aperto connesso e sia $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ una serie di funzioni u_n , armoniche e non-negative in Ω .*

Se $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge in un punto $x_0 \in \Omega$, allora essa converge uniformemente in ogni compatto $K \subset \Omega$.

Dim. Sia K un compatto contenuto in Ω e, per $m \in \mathbb{N}$, sia $\Omega_m = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > 1/m\} \cap B(0, m)$. Se m è abbastanza grande, Ω_m è connesso e contiene sia K che x_0 . Per il Teorema 6.4.1, abbiamo che

$$\max_K u_n \leq \max_{\Omega_m} u_n \leq C \min_{\Omega_m} u_n \leq C u_n(x_0).$$

Dunque, la serie converge totalmente e quindi uniformemente in K . \square

Corollario 6.5.3. *Sia Ω un aperto connesso e sia $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni v_n , armoniche in Ω .*

Se $\{u_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge per qualche $x_0 \in \Omega$, allora essa converge uniformemente in ogni compatto $K \subset \Omega$.

Dim. Basta applicare il teorema precedente alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} (v_{n+1} - v_n)$. \square

Teorema 6.5.4. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia \mathcal{F} una famiglia infinita di funzioni armoniche in Ω equilimitata in Ω .*

Allora esiste una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ che converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di Ω .

Dim. Per ogni pallina $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ risulta che

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right| \leq \frac{N}{r} \max_{\partial B(x, r)} |u|, \quad k = 1, \dots, N, \quad u \in \mathcal{F},$$

per il Lemma 6.6.1. Sia $K \subset \Omega$ compatto e sia $0 < r < \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Per ogni $x \in K$, risulterà che

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_k}(x) \right| \leq \frac{N}{r} \max_{\partial B(x, r)} |u| \leq \frac{N}{r} \max_{\Omega} |u|, \quad k = 1, \dots, N, \quad u \in \mathcal{F}.$$

Perciò, \mathcal{F} è una famiglia di funzioni equilimitate ed equicontinue in K . Per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ che converge uniformemente in K ad una funzione che è armonica in Ω , per il Teorema 6.5.1. \square

Corollario 6.5.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso e sia \mathcal{F} una famiglia infinita di funzioni armoniche e non-negative in Ω .*

Sia $x_0 \in \Omega$; se esiste una costante M tale che $u(x_0) \leq M$ per ogni $u \in \mathcal{F}$, allora esiste una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ che converge uniformemente in ogni sottoinsieme compatto di Ω .

Dim. Per il Teorema 6.4.1, ragionando come nella dimostrazione del Teorema 6.5.2, otteniamo che la famiglia \mathcal{F} è equilimitata su ogni sottoinsieme compatto di Ω . Quindi, concludiamo con il Teorema 6.5.4. \square

6.6. Maggiorazioni a priori delle derivate

Le seguenti maggiorazioni si rivelano utili e permettono anche di dare dimostrazione dell'analiticità delle funzioni armoniche.

Teorema 6.6.1 (Maggiorazioni a priori delle derivate). *Sia u armonica in Ω e sia $x_0 \in \Omega$. Allora*

$$(6.1) \quad |D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{N+k}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))}$$

per ogni pallina $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ ed ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ tale che $|\alpha| = k$. (Risulta: $C_0 = N \omega_N^{-1}$ e $C_k = N \omega_N^{-1} (2^{N+1} N k)^k$, $k = 1, 2, \dots$).

Dim. Procediamo per induzione su k . Il caso $k = 0$ è immediato per la proprietà della media per u .

Poiché anche u_{x_i} è armonica, anch'essa gode della proprietà della media e quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} |u_{x_i}(x_0)| &= \frac{1}{|B(x_0, r/2)|} \left| \int_{B(x_0, r/2)} u_{x_i}(y) dy \right| = \\ &= \frac{2^N N}{\omega_N r^N} \left| \int_{\partial B(x_0, r/2)} u(y) \nu_i(y) dS_y \right| \leq \\ &\leq \frac{2^N N}{\omega_N r^N} \frac{\omega_N r^{N-1}}{2^{N-1}} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/2))} = \\ &= \frac{2N}{r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/2))}, \end{aligned}$$

mentre, se $x \in \partial B(x_0, r/2)$ allora $\overline{B(x, r/2)} \subset \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ e così:

$$|u(x)| \leq \frac{N}{\omega_N} \left(\frac{2}{r}\right)^N \|u\|_{L^1(B(x_0, r))},$$

per l'ipotesi di induzione, e perciò otteniamo in totale:

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{N}{\omega_N} \frac{N 2^{N+1}}{r^{N+1}} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))},$$

e cioè la tesi nel caso $k = 1$.

Sia ora $k \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per ogni pallina contenuta in Ω ed ogni multi-indice β tale che $|\beta| \leq k - 1$.

Sia $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ e sia α tale che $|\alpha| = k$. Allora $D^\alpha u = (D^\beta u)_{x_i}$ per qualche β tale che $|\beta| = k - 1$ e qualche $i \in \{1, \dots, n\}$. Con le stesse argomentazioni di prima otteniamo:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{1}{|B(x_0, r/k)|} \int_{B(x_0, r/k)} |D^\alpha u(y)| dy \leq \frac{N k}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B(x_0, r/k))}.$$

Se $x \in \partial B(x_0, r/k)$, allora $B(x, \frac{k-1}{k} r) \subset B(x_0, r) \subset \Omega$ e quindi per l'ipotesi di induzione

$$\begin{aligned} |D^\beta u(x)| &\leq C_{k-1} \left(\frac{k-1}{k} r \right)^{-(N+k-1)} \|u\|_{L^1(B(x, \frac{k-1}{k} r))} \\ &\leq C_{k-1} \left(\frac{k-1}{k} r \right)^{-(N+k-1)} \|u\|_{L^1(B(x_0, r))} \end{aligned}$$

e combinando le due disuguaglianze si ottiene (6.1). \square

Teorema 6.6.2 (Le funzioni armoniche sono analitiche). *Ogni funzione armonica u in un aperto Ω è ivi sviluppabile in serie di Taylor.*

Dim. Sia $x_0 \in \Omega$; dobbiamo dimostrare che u è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di x_0 . In altre parole, dobbiamo dimostrare che

$$R_n(x; x_0) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha u(x_0 + t(x - x_0))}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha,$$

— il resto n -simo della serie di Taylor per $u(x)$ in x_0 — è infinitesimo per $n \rightarrow \infty$ in un intorno di x_0 (si intende che $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$).

Sia $r > 0$ tale che $\overline{B(x_0, 2r)} \subset \Omega$ e sia $M = \frac{N}{\omega_N r^N} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))}$. Poiché $B(x, r) \subset B(x_0, 2r)$ per ogni $x \in B(x_0, r)$, applicando il Lemma 6.6.1 alla pallina $B(x, r)$, risulta

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C_{|\alpha|}}{r^{N+|\alpha|}} \|u\|_{L^1(B(x_0, 2r))} = M \left(\frac{2^{N+1} N}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}$$

per ogni $x \in B(x_0, r)$ e quindi

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq M \left(\frac{2^{N+1} N}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|}.$$

Per la formula di Stirling, $\frac{k^{k+1/2}}{e^k k!} \rightarrow \frac{1}{2\pi}$ se $k \rightarrow \infty$ e quindi esiste una costante C tale che $|\alpha|^{|\alpha|} \leq C e^{|\alpha|} |\alpha|!$. Perciò

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq C M \left(\frac{2^{N+1} N e}{r} \right)^{|\alpha|} |\alpha|!.$$

Inoltre la *formula multinomiale*

$$N^k = (1 + 1 + \dots + 1)^n = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha_1! \dots \alpha_N!}$$

implica che $|\alpha|! \leq N^{|\alpha|} \alpha!$ e quindi in definitiva:

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))} \leq C M \left(\frac{2^{N+1} N^2}{r} \right)^{|\alpha|} \alpha!.$$

Da questa maggiorazione segue che, se $x \in B(x_0, \rho)$ e $0 < \rho < r$, allora

$$\begin{aligned} |R_n(x; x_0)| &\leq \sum_{|\alpha|=n} \frac{\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B(x_0, r))}}{\alpha!} |x - x_0|^{|\alpha|} \leq \\ &CM \sum_{|\alpha|=n} \left(\frac{2^{N+1} N^2 e}{r} \right)^{|\alpha|} \rho^{|\alpha|} = \\ &CM \left(\frac{2^{N+1} N^2 e \rho}{r} \right)^n \sum_{|\alpha|=n} 1. \end{aligned}$$

Si noti che $\sum_{|\alpha|=n} 1$ è il numero delle derivate parziali di ordine n e cioè N^n .

Perciò

$$|R_n(x; x_0)| \leq C M \left(\frac{2^{N+1} N^3 e \rho}{r} \right)^n;$$

scegliendo un qualsiasi $0 < \rho < \frac{r}{2^{N+1} N^3 e}$, concludiamo che $R_n(x; x_0) \rightarrow 0$ se $n \rightarrow \infty$. \square

Esercizi

1. Dimostrare che l'operatore di Laplace è invariante per rotazioni.
2. Dimostrare che, a meno di costanti moltiplicative, l'operatore di Laplace è l'unico operatore differenziale lineare omogeneo del secondo ordine invariante per rotazioni e per traslazioni.
3. Determinare i polinomi armonici in due variabili omogenei di grado n .

4. Sia $u \in C^2(\Omega)$ e sia $\Omega \ni x \mapsto y(x) \in \Omega^*$ un diffeomorfismo. Calcolare $\Delta u(x)$ nelle nuove coordinate y .

Si esamini poi il caso delle coordinate polari in \mathbb{R}^2 e di quelle sferiche in \mathbb{R}^3 : $(x, y, z) = r(\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$.

5. Dimostrare che $u \in C^2(\Omega)$ è subarmonica in Ω se e solo se $\Delta u \geq 0$.
 6. Dimostrare che esiste al più una soluzione $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ del problema di Dirichlet:

$$\Delta u - u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega.$$

6. Dimostrare che la proprietà della media delle funzioni armoniche caratterizza le sfere, nel senso che, se D è un aperto connesso (con ∂D di classe C^1) tale che esiste un punto $p \in D$ per cui

$$u(p) = \frac{1}{|D|} \int_D u(x) \, dx$$

per ogni funzione armonica u in D di classe $C^0(\bar{\Omega})$, allora D è una pallina con centro in p .²

7. Dimostrare che, se valgono le ipotesi del Teorema 6.5.2, la serie in esame è derivabile termine a termine.
 8. Dimostrare l'asserto dell'Osservazione 6.3.6.

²Suggerimento: scegliere $u = (x_i - p_i) v_{x_j} - (x_j - p_j) v_{x_i}$ con v armonica ed applicare il Teorema della Divergenza).

Problemi al contorno

7.1. La soluzione fondamentale

Supponiamo per il momento che $\Omega = \mathbb{R}^N$ e che $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed applichiamo la trasformazione di Fourier ad entrambi i membri dell'equazione (6.1); procedendo formalmente otterremo:

$$4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

dove si è usata la proprietà (4.2). Perciò:

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{4\pi^2|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$$

ed, anti-trasformando e tenendo conto della formula (5.8) con $\alpha = 2$, otteniamo:

$$u(x) = \Phi \star f(x),$$

dove Φ è la funzione definita da

$$\Phi(x) = \frac{1}{(N-2)\omega_N} |x|^{2-N}.$$

La costante

$$\omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \quad N \geq 3,$$

è la misura della superficie della sfera unitaria in \mathbb{R}^N . La funzione Φ risulta soluzione dell'equazione (6.2) in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Si noti che per $N = 2$ la formula (5.8) non funziona: sarebbe infatti $\alpha = N$ in questo caso. Si osservi però che la funzione Φ appena costruita ha simmetria radiale. Nel caso $N = 2$ sarà ragionevole dunque ricercare la funzione Φ come soluzione a simmetria radiale dell'equazione di Laplace (6.2) in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Supponiamo quindi che $\Phi(x) = \phi(r)$ dove $r = |x|$ e calcoliamo:

$$\begin{aligned} u_{x_k} &= \phi'(r) \frac{x_k}{|x|}, \\ u_{x_k x_k} &= \phi''(r) \frac{x_k^2}{|x|^2} + \phi'(r) \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_k^2}{|x|^3} \right), \\ \Delta u &= \phi''(r) \frac{1}{r^2} \sum_{k=1}^N x_k^2 + \phi'(r) \left(\frac{N}{r} - \frac{1}{r^3} \sum_{k=1}^N x_k^2 \right) = \\ &= \phi''(r) + \frac{N-1}{r} \phi'(r). \end{aligned}$$

Se Φ soddisfa l'equazione (6.2) per $x \neq 0$, allora

$$\phi''(r) + \frac{N-1}{r} \phi'(r) = 0 \quad \text{per } r > 0;$$

otteniamo:

$$\phi(r) = \begin{cases} c_1 \log r + c_2, & \text{se } N = 2, \\ c_1 r^{2-N} + c_2, & \text{se } N \geq 3. \end{cases}$$

La funzione

$$(7.1) \quad \Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{se } N = 2, \\ \frac{1}{(N-2)\omega_N} |x|^{2-N}, & \text{se } N \geq 3, \end{cases}$$

definita per $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, si dice la *soluzione fondamentale per l'equazione di Laplace*.

Possiamo ragionevolmente pensare che la funzione $\Phi \star f$ risolva l'equazione (6.1) in \mathbb{R}^N , $N \geq 2$. Si osservi preliminarmente che

$$|\nabla \Phi(x)| = \frac{1}{\omega_N} |x|^{1-N} \quad \text{e} \quad |\nabla^2 \Phi(x)| = \frac{1}{\omega_N} \sqrt{2 + (N-2)^2} |x|^{-N}.$$

Teorema 7.1.1. *Sia $f \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$ e sia $u = \Phi \star f$, dove Φ è definita in (7.1). Allora u ha le proprietà seguenti:*

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$;
- (ii) u soddisfa l'equazione di Poisson (6.1) in \mathbb{R}^N , cioè $-\Delta u = f$ in \mathbb{R}^N ;
- (iii) se $N \geq 3$, ogni altra soluzione limitata di (6.1) differisce da u per una costante.

Dim. (i) Dato che $\Phi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$, dai teoremi sulle convoluzioni concludiamo che $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

(ii) Sempre per il fatto che $\Phi \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$, possiamo scrivere

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy.$$

Si osservi ora che

$$\left| \int_{B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy \right| \leq \|\Delta f\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dy,$$

dove l'integrale a secondo membro converge:

$$\int_{B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dy = \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon^2}{4}, & N = 2, \\ \frac{\varepsilon^2}{2(N-2)}, & N \geq 3. \end{cases}$$

Perciò

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy,$$

dove $B(0,\varepsilon)^c = \mathbb{R}^N \setminus B(0,\varepsilon)$.

D'altra parte, dato che $\Delta_x f(x-y) = \Delta_y f(x-y)$, dopo un'integrazione per parti otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Phi(y) \Delta f(x-y) dy = \\ - \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS_y, \end{aligned}$$

dove ν indica il versore della normale a $\partial B(0,\varepsilon)$ in y che punta all'interno di $B(0,\varepsilon)$. Il secondo integrale al secondo membro si maggiora così:

$$\left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \Phi(y) \frac{\partial f}{\partial \nu}(x-y) dS_y \right| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dS_y$$

dove

$$\int_{\partial B(0,\varepsilon)} |\Phi(y)| dS_y = \begin{cases} \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}, & N = 2, \\ \frac{\varepsilon}{N-2}, & N \geq 3. \end{cases}$$

Quindi

$$\Delta u(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy.$$

Integrando ancora per parti, otteniamo:

$$\begin{aligned} & - \int_{B(0,\varepsilon)^c} \nabla \Phi(y) \cdot \nabla_y f(x-y) dy = \\ & \int_{B(0,\varepsilon)^c} \Delta \Phi(y) f(x-y) dy - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS_y = \\ & - \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS_y. \end{aligned}$$

Ora $\nabla \Phi(y) = -\frac{1}{\omega_N} \frac{y}{|y|^N}$ e $\nu(y) = -\frac{y}{|y|}$; quindi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) = \frac{1}{\omega_N |y|^{N-1}}.$$

Dalle due ultime formule segue che

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y) f(x-y) dS_y = \\ & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-y) dS_y = \\ & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(0,1)} f(x-\varepsilon z) dS_z = -f(x). \end{aligned}$$

In conclusione, $\Delta u(x) = -f(x)$.

(iii) Segue dal Teorema 6.4.3, dato che u è limitata (Esercizio 1). \square

Osservazione 7.1.2. Se $N = 2$, la (iii) non vale, perché u non è limitata.

Osservazione 7.1.3. Se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, è chiaro che $u = \Phi \star f$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Usando il linguaggio delle distribuzioni, abbiamo allora dimostrato il risultato seguente:

$$\begin{aligned} \langle -\Delta \Phi, f \rangle &= -\langle \Phi, \Delta f \rangle = - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) \Delta f(y) dy = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(y) \Delta f(0-y) dy = f(0) = \\ &= \langle \delta_0, f \rangle, \end{aligned}$$

per ogni $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Perciò:

$$-\Delta \Phi = \delta_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N).$$

7.2. I problemi di Dirichlet, Neumann e Robin

In questo capitolo esamineremo alcuni problemi al contorno per l'equazione di Laplace e Poisson e, quando possibile, per equazioni più generali.

Sia Ω un aperto limitato e connesso di \mathbb{R}^N , con frontiera costituita da un numero finito di porzioni di superficie di classe C^1 .

Il *problema di Dirichlet* per l'equazione di Poisson consiste nella determinazione di una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tale che

$$(7.2) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ ed $f \in C^0(\Omega)$ sono funzioni date.

Il *problema di Neumann* consiste invece nella determinazione di una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ tale che

$$(7.3) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \psi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

dove $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ ed $f \in C^0(\Omega)$ sono funzioni date.

Per il Teorema della Divergenza è chiaro che la funzione ψ non può essere assegnata in modo arbitrario: dato che

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_y,$$

dovrà essere

$$(7.4) \quad \int_{\Omega} f(x) \, dx = - \int_{\partial\Omega} \psi(y) \, dS_y.$$

Si noti inoltre che aggiungendo una costante ad una soluzione di (7.3) si trova un'altra soluzione.

Siano ora α, β e ψ funzioni definite su $\partial\Omega$ e tali che $|\alpha| + |\beta| > 0$ su $\partial\Omega$. Il *problema di Robin* consiste nel trovare una funzione $u \in C^2(\Omega)$, continua in $\bar{\Omega}$, dotata di derivata normale in ogni punto di $\partial\Omega$ in cui sia $\alpha \neq 0$ e tale che

$$(7.5) \quad -\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = \psi \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Osserviamo che i casi in cui $\alpha \equiv 0, \beta \equiv 1$ e $\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0$ corrispondono rispettivamente al problema di Dirichlet ed a quello di Neumann.

7.3. Teoremi di unicità

Una conseguenza del principio di massimo è il seguente risultato di unicità per il problema di Dirichlet.

Teorema 7.3.1 (Unicità per il problema di Dirichlet). *Siano $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ ed $f \in C^0(\Omega)$. Il problema di Dirichlet (7.2) ha al più una soluzione u nella classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$.*

Dim. Siano u e v due soluzioni di (7.2). Allora la funzione $w = u - v$ è armonica in Ω e nulla su $\partial\Omega$. Per il principio di massimo $w \leq 0$ in Ω . Analogamente, $-w \leq 0$ e dunque $w \equiv 0$ in Ω . \square

Un'applicazione del lemma di Hopf è il seguente teorema di unicità per il problema di Neumann. In seguito si dirà che un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ gode della *proprietà della sfera interna* se per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una pallina aperta B tale che $x_0 \in \partial B$.

Teorema 7.3.2 (Unicità per il problema di Neumann). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con la proprietà della sfera interna e siano $\psi \in C^0(\partial\Omega)$ ed $f \in C^0(\Omega)$ funzioni soddisfacenti la condizione di compatibilità (7.4).*

Allora il problema di Neumann (7.3) ha, a meno di costanti additive, al più una soluzione u nella classe $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

Dim. Siano u e v due soluzioni di (7.3) soddisfacenti la (7.4) e sia $w = u - v$. Se w non fosse costante, assumerebbe il suo massimo in un punto $x_0 \in \partial\Omega$. Inoltre, per il principio di massimo forte risulterebbe $u < u(x_0)$ in Ω . Per il lemma di Hopf, dovrebbe essere $\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) > 0$, mentre $\frac{\partial w}{\partial \nu} \equiv 0$ su $\partial\Omega$. \square

Teorema 7.3.3 (Unicità per il problema di Robin). *Se $\alpha\beta \geq 0$ e β non è identicamente nulla su $\partial\Omega$, esiste al più una funzione armonica in Ω , di classe $C^1(\bar{\Omega})$ e che verifica (7.5).*

Se $\beta \equiv 0$ su Ω , due funzioni armoniche in Ω , di classe $C^1(\bar{\Omega})$ e che verificano (7.5), differiscono per una costante.

Dim. Siano u_1 e u_2 due funzioni che soddisfano le ipotesi del teorema e sia $u = u_1 - u_2$. Essa è armonica in Ω , di classe $C^1(\bar{\Omega})$ e verifica (7.5) con $f \equiv 0$. Per il teorema della divergenza abbiamo quindi:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} \{ \operatorname{div} (u \nabla u) - u \Delta u \} dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x.$$

Nei punti in cui $\alpha = 0$, abbiamo che $u = 0$, mentre $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ nei punti in cui $\beta = 0$. Perciò:

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega^+} u \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x = - \int_{\partial\Omega^+} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} u^2 dS_x \leq 0,$$

dove $\partial\Omega^+ = \{x \in \partial\Omega : \alpha(x)\beta(x) > 0\}$. Quindi $\nabla u \equiv 0$ in Ω , e dunque u è costante in Ω . Nel caso in cui β non sia identicamente nulla, dalla condizione

di Robin otteniamo che $u = -\frac{\alpha}{\beta} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ in qualche punto di $\partial\Omega$ e quindi questa costante deve essere nulla. \square

Sia Ω un aperto connesso e illimitato, con frontiera costituita da un numero finito di porzioni di superficie di classe C^1 . Siano α , β ed f funzioni definite su $\partial\Omega$ e tali che $|\alpha| + |\beta| > 0$ su $\partial\Omega$. Supponiamo inoltre che $\alpha(x) \neq 0$ in ogni $x \in \partial\Omega$ in cui esista il piano tangente a $\partial\Omega$ ed esista una pallina $B \subset \Omega$ tale che $\partial B \cap \partial\Omega = \{x\}$.

Teorema 7.3.4. *Se $\alpha, \beta \geq 0$ su $\partial\Omega$, allora esiste al più una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ tale che*

- (i) u è armonica in Ω ,
- (ii) esiste la derivata normale $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ in ogni $x \in \partial\Omega$ tale che $\alpha(x) \neq 0$,
- (iii) $\alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = f$ su $\partial\Omega$,
- (iv) esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = a$.

Dim. Siano u_1 e u_2 due funzioni che soddisfano le ipotesi (i)-(iv) e sia $u = u_1 - u_2$. Allora u soddisfa (i)-(iv) con $f \equiv 0$ ed $a = 0$.

Poichè u è continua in $\bar{\Omega}$ e tende a zero all'infinito, allora è limitata; se non fosse nulla, esisterebbe $x_0 \in \bar{\Omega}$ tale che $u(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} u > 0$ e, per il principio di massimo, risulterebbe che $x_0 \in \partial\Omega$. Inoltre, dato che $u(x_0) > 0$, allora $\alpha(x_0) \neq 0$, altrimenti $\beta(x_0)u(x_0) = 0$ e quindi $u(x_0) = 0$.

Per la (ii), esiste allora $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$ ed inoltre valgono in x_0 le ipotesi del lemma di Hopf 6.3.5: dunque $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$; ma

$$\alpha(x_0)\beta(x_0)u(x_0) = -\alpha(x_0)^2 \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

cioè $u(x_0) \leq 0$, che è una contraddizione. \square

I problemi al contorno per insiemi illimitati si possono ricondurre allo studio di problemi al contorno per insiemi limitati mediante la *trasformazione di Kelvin*, come spiegato qui di seguito.

Sia Ω illimitato e fissiamo l'origine 0 degli assi cartesiani fuori di $\bar{\Omega}$. Abbiamo già osservato che l'applicazione

$$x \mapsto y = \frac{x}{|x|^2}$$

trasforma Ω in un insieme limitato Ω^* , che non contiene l'origine (nel caso in cui Ω sia il complementare della chiusura di un dominio semplicemente connesso, allora Ω^* è un dominio semplicemente connesso privato dell'origine).

La funzione

$$(7.6) \quad v(y) = |y|^{2-N} u(y/|y|^2)$$

è armonica in $\Omega^* \setminus \{0\}$ se u è armonica in Ω .

Infatti, sia $a(y) = |y|^{2-N}$; risulta:

$$\Delta v = u \Delta a + 2 \sum_{j=1}^N \partial_j u (\nabla a \cdot \nabla x_j) + a \sum_{j,k=1}^N \partial_{jk} u (\nabla x_j \cdot \nabla x_k) + a \sum_{j=1}^N \partial_j u \Delta x_j,$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta a &= 0, & \nabla a \cdot \nabla x_j &= -(2-N) |y|^{-(N+2)} y_j, \\ \nabla x_j \cdot \nabla x_k &= |y|^{-4} \delta_{jk}, & \Delta x_j &= 2(2-N) |y|^{-4} y_j. \end{aligned}$$

Perciò:

$$\Delta v = a(y) |y|^{-4} \Delta u(y/|y|^2) = |y|^{-(N+2)} \Delta u(y/|y|^2).$$

Il lemma seguente ci permette di estendere armonicamente v a tutto l'aperto Ω^* a patto che u si comporti in modo appropriato quando $|x| \rightarrow \infty$.

Lemma 7.3.5 (Singularità removibili). *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto e sia $x_0 \in \Omega$. Sia inoltre u una funzione armonica in $\Omega \setminus \{x_0\}$ e tale che*

$$(7.7) \quad u(x) = o(\Phi(x - x_0)) \quad \text{se } x \rightarrow x_0,$$

dove Φ è la soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace.

Allora u si può prolungare con continuità in x_0 e la funzione risultante è armonica in Ω .

Dim. Diamo la dimostrazione nel caso $N \geq 3$; il caso $N = 2$ procede in modo completamente analogo.

Scegliamo $r > 0$ tale che $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Sia v la funzione armonica in $B(x_0, r)$ tale che $v = u$ su $\partial B(x_0, r)$: v è ben definita, come vedremo, da (7.17). Poniamo inoltre $w = u - v$.

Fissato $\bar{x} \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, si scelga $0 < \varepsilon < |\bar{x} - x_0| < r$ e si ponga $M_\varepsilon = \max_{\partial B(x_0, \varepsilon)} |w|$.

La funzione

$$w_\varepsilon(x) = w(x) - M_\varepsilon \frac{\varepsilon^{N-2}}{|x - x_0|^{N-2}}$$

è armonica per $x \neq x_0$ ed inoltre $w_\varepsilon = w - M_\varepsilon \leq 0$ su $\partial B(x_0, \varepsilon)$ e $w_\varepsilon = -M_\varepsilon (\varepsilon/r)^{N-2} < 0$ su $\partial B(x_0, r)$. Per il principio di massimo $w_\varepsilon < 0$ in $B(x_0, r) \setminus \overline{B(x_0, \varepsilon)}$ e quindi in particolare

$$w(\bar{x}) < M_\varepsilon \frac{\varepsilon^{N-2}}{|\bar{x} - x_0|^{N-2}}$$

per ogni $0 < \varepsilon < |\bar{x} - x_0|$. Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene che $w(\bar{x}) \leq 0$ dato che

$$\varepsilon^{N-2} M_\varepsilon \leq \varepsilon^{N-2} \max_{\partial B(x_0, \varepsilon)} |u| + \varepsilon^{N-2} \max_{\partial B(x_0, \varepsilon)} |v| \rightarrow 0$$

per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, per l'ipotesi (7.7) ed il fatto che v è limitata in $B(x_0, r)$.

In modo analogo dimostriamo che $w(\bar{x}) \geq 0$ in ogni $\bar{x} \in B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$. Dunque $w \equiv 0$ e cioè $u \equiv v$ in $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$ e quindi v estende armonicamente u a tutto $B(x_0, r)$. \square

Osservazione 7.3.6. Risulta chiaro che, se u è armonica nell'insieme illimitato $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{D}$ (con D limitato e semplicemente connesso) ed infinitesima per $|x| \rightarrow \infty$, allora la funzione v definita in (7.6) e soddisfa in Ω^* le ipotesi del Lemma 7.3.5 con $x_0 = 0$. Possiamo pertanto estendere armonicamente v a $\Omega^* \cup \{0\}$.

Concludiamo questo paragrafo con il seguente risultato di unicità per il problema di Dirichlet in aperti piani illimitati.

Teorema 7.3.7 (Unicità per il problema di Dirichlet nel piano). *Sia $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^2$ aperto ed illimitato e sia $g \in C^0(\partial\Omega)$.*

Esiste al più una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, limitata in Ω e tale che

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = g \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Dim. Siano u_1 ed u_2 due soluzioni limitate del problema di Dirichlet e sia $u = u_1 - u_2$. Allora u è armonica in Ω , limitata in Ω ed inoltre $u = 0$ su $\partial\Omega$.

Fissata l'origine degli assi fuori di $\overline{\Omega}$, la funzione $v(y) = u(\frac{y}{|y|^2})$ è armonica nell'insieme limitato Ω^* immagine dell'applicazione $x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$. Inoltre v è continua in $\overline{\Omega^*} \setminus \{0\}$ ed esiste una costante M per cui $|v| < M$ in Ω^* .

Sia $B(0, R)$ una pallina contenente Ω^* e sia definita la funzione:

$$w_\varepsilon(y) = M \frac{\log |y| - \log R}{\log \varepsilon - \log R},$$

per $y \neq 0$ e con $0 < \varepsilon < R$. Risulta che w_ε è positiva in Ω^* ed inoltre $w_\varepsilon = M$ se $|y| = \varepsilon$.

Sia $\Omega_\varepsilon^* = \{y \in \Omega^* : |y| > \varepsilon\}$; la funzione $v - w_\varepsilon$ è armonica in Ω_ε^* , continua in $\overline{\Omega_\varepsilon^*}$ e negativa su $\partial\Omega_\varepsilon^*$, dato che $v - w_\varepsilon = v - M < 0$ su $\partial B(0, \varepsilon)$ e $v - w_\varepsilon = -w_\varepsilon$ su $\partial\Omega^*$. Dunque $v < w_\varepsilon$ in Ω_ε^* e quindi, fissato $y \in \Omega^*$ e scelto $\varepsilon \in (0, |y|)$, si ha:

$$v(y) < M \frac{\log |y| - \log R}{\log \varepsilon - \log R}.$$

Facendo tendere ε a zero, si ottiene che $v(y) < 0$. In modo analogo, considerando la funzione $v + w_\varepsilon$, si ottiene che $v(y) > 0$, cioè $v = 0$ in ogni $y \in \Omega^*$, e quindi $u \equiv 0$ in Ω . \square

7.4. La funzione di Green

In questo paragrafo, Ω è un aperto limitato in \mathbb{R}^N e $\partial\Omega$ è di classe C^1 , cioè $\partial\Omega$ è localmente il grafico di una funzione C^1 .

Teorema 7.4.1 (Identità di Stokes). *Sia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Allora*

$$(7.8) \quad u(x) = - \int_{\Omega} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \left\{ \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right\} dS_y.$$

Dim. Sia $x \in \Omega$; sia $\varepsilon > 0$ così piccolo che $\overline{B(x, \varepsilon)} \subset \Omega$ e sia $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$.

Per l'identità di Green, si ha:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \Phi(y-x) \Delta u(y) dy = \int_{\Omega_\varepsilon} [\Phi(y-x) \Delta u(y) - u(y) \Delta \Phi(y-x)] dy = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left\{ \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) \right\} dS_y.$$

Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 7.1.1, otteniamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) dS_y = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(y-x) dS_y = u(x).$$

Concludiamo allora dall'identità di Green sopra citata, osservando che $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial B(x, \varepsilon)$. \square

Useremo ora l'identità (7.8) per costruire una soluzione del problema di Dirichlet (7.2), dove supponiamo per ora le funzioni f e φ abbastanza regolari.

Si noti che se u soddisfa (7.2), allora nella formula (7.8) conosciamo Δu in Ω e u su $\partial\Omega$, ma non conosciamo $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ su $\partial\Omega$. Introduciamo ora, per ogni $x \in \Omega$ fissato, una funzione ausiliaria Φ^x che ci permetterà di ignorare i valori

di $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ su $\partial\Omega$. A questa funzione $\Phi^x = \Phi^x(y)$, che chiameremo il *correttore* o *funzione di Robin*, richiediamo che soddisfi il problema di Dirichlet:

$$(7.9) \quad \begin{cases} \Delta\Phi^x = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Phi^x(y) = \Phi(y-x) & \text{per } y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Applicando la formula di Green alle funzioni Φ^x ed u , otteniamo:

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Phi^x(y) \Delta u(y) dy &= \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial\Phi^x}{\partial\nu}(y) - \Phi^x(y) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right\} dS_y = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left\{ u(y) \frac{\partial\Phi^x}{\partial\nu}(y) - \Phi(y-x) \frac{\partial u}{\partial\nu}(y) \right\} dS_y, \end{aligned}$$

e, combinando questa identità con (7.8), possiamo concludere che

$$u(x) = - \int_{\Omega} \{ \Phi(y-x) - \Phi^x(y) \} \Delta u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) - \frac{\partial\Phi^x}{\partial\nu}(y) \right\} u(y) dS_y.$$

La funzione definita da

$$(7.10) \quad G(x, y) = \Phi(y-x) - \Phi^x(y), \quad \text{per } x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y,$$

si dice la *funzione di Green* per l'operatore Δ in Ω .

Teorema 7.4.2 (Formula di rappresentazione). *Siano $f \in C^0(\Omega)$ e $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ è una soluzione del problema (7.2), allora*

$$(7.11) \quad u(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x, y) \varphi(y) dS_y,$$

per ogni $x \in \Omega$.

Osservazione 7.4.3. La costruzione della funzione di Green G in generale non è semplice: calcoleremo in seguito G nel caso in cui Ω abbia una geometria semplice e, nel paragrafo 7.5, ne dimostreremo l'esistenza sotto opportune ipotesi di regolarità per Ω .

Si noti anche che, fissato $x \in \Omega$, la funzione $y \mapsto G(x, y)$ soddisfa l'equazione

$$-\Delta_y G = \delta_x \quad \text{in } \Omega$$

nel senso delle distribuzioni ed è tale che

$$G(x, y) = 0 \quad \text{per ogni } y \in \Omega.$$

Osservazione 7.4.4. Se Ψ^x è una funzione tale che

$$\begin{cases} \Delta\Psi^x = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial\Psi^x}{\partial\nu}(y) = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(y-x) + \frac{1}{|\partial\Omega|} & \text{per } y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

allora, con calcoli analoghi, otteniamo la formula di rappresentazione per il problema di Neumann (7.3); a meno di costanti additive risulta infatti

$$(7.12) \quad u(x) = \int_{\Omega} N(x, y) f(y) dy + \int_{\partial\Omega} N(x, y) \psi(y) dS_y,$$

per ogni $x \in \Omega$, dove

$$N(x, y) = \Phi(y - x) - \Psi^x(y)$$

è la *funzione di Neumann*.

Teorema 7.4.5 (Simmetria della funzione di Green). *Per ogni $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$, risulta che $G(y, x) = G(x, y)$.*

Dim. Fissiamo $x, y \in \Omega$ con $x \neq y$ e poniamo:

$$v(z) = G(x, z) \quad \text{e} \quad w(z) = G(y, z).$$

Allora $\Delta v = 0$ se $z \neq x$ e $\Delta w = 0$ se $z \neq y$ ed inoltre $v = w = 0$ se $z \in \partial\Omega$. Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $\overline{B(x, \varepsilon)} \cup \overline{B(y, \varepsilon)} \subset \Omega$ e $\overline{B(x, \varepsilon)} \cap \overline{B(y, \varepsilon)} = \emptyset$ ed applichiamo la formula di Green alle funzioni v e w in $\Omega \setminus [\overline{B(x, \varepsilon)} \cup \overline{B(y, \varepsilon)}]$: risulta che

$$(7.13) \quad \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \left[\frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v \right] dS_z + \int_{\partial B(y, \varepsilon)} \left[\frac{\partial v}{\partial \nu} w - \frac{\partial w}{\partial \nu} v \right] dS_z = 0.$$

Ora, poiché w è armonica, e quindi regolare, vicino ad x , l'integrale

$$\int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial w}{\partial \nu} v dS_z \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

D'altra parte $v(z) = \Phi(z - x) - \Phi^x(z)$ con Φ^x armonica in Ω ; dunque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial v}{\partial \nu} w dS_z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(x, \varepsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x - z) w(z) dS_z = w(x).$$

Perciò il primo membro di (7.13) converge a $w(x)$ ed, in maniera analoga, il secondo membro di (7.13) converge a $-v(y)$, cioè $G(y, x) = w(x) = v(y) = G(x, y)$. \square

Calcoleremo ora la funzione di Green per il semispazio $\mathcal{H}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ e per la palla $B(0, R) \subset \mathbb{R}^N$.

Se $x = (x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \in \mathcal{H}^N$, indichiamo con x^* il suo punto riflesso rispetto all'iperpiano $\partial\mathcal{H}^N$, cioè $x^* = (x_1, \dots, x_{N-1}, -x_N)$. Scegliamo

$\Phi^x(y) = \Phi(y - x^*) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{N-1} - x_{N-1}, y_N + x_N)$; allora risulta che $\Phi^x(y_1, \dots, y_{N-1}, 0) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{N-1} - x_{N-1}, x_N)$ e quindi:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi^x &= 0 \text{ in } \mathcal{H}^N, \\ \Phi^x(y) &= \Phi(y - x) \text{ per } y \in \partial\mathcal{H}^N.\end{aligned}$$

Perciò in questo caso

$$(7.14) \quad G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(y - x^*)$$

ed inoltre

$$\begin{aligned}-\frac{\partial G}{\partial\nu}(x, y) &= \frac{\partial G}{\partial y_N}(x, y) = -\frac{1}{\omega_N} \left[\frac{y_N - x_N}{|x - y|^N} - \frac{y_N + x_N}{|x^* - y|^N} \right] = \\ &= \frac{2}{\omega_N} \frac{x_N}{|x - y|^N},\end{aligned}$$

dato che $|x - y| = |x^* - y|$ se $y \in \partial\mathcal{H}^N$.

La funzione $P : \mathcal{H}^N \times \partial\mathcal{H}^N \rightarrow (0, +\infty)$ definita da

$$P(x, y) = \frac{2}{\omega_N} \frac{x_N}{|x - y|^N},$$

si dice il *nucleo di Poisson per il semi-spazio* \mathcal{H}^N . Si noti che $P(x, y) = P_{x_N}(x' - y')$ dove si è posto $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$ e dove P_s non è altro che il nucleo di sommabilità definito in (4.14) (con N al posto di $N + 1$).

Teorema 7.4.6 (Formula di Poisson per il semispazio). *Sia*

$$(7.15) \quad u(x, x_N) = \frac{2}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{x_N}{(x_N^2 + |x - y|^2)^{N/2}} \varphi(y) dy,$$

con $\varphi \in C^0(\mathbb{R}^{N-1}) \cap L^\infty(\mathbb{R}^{N-1})$.

Allora

- (i) $u \in C^\infty(\mathcal{H}^N) \cap L^\infty(\mathcal{H}^N)$,
- (ii) $\Delta u = 0$ in \mathcal{H}^N ,
- (iii) $\lim_{x_N \rightarrow 0^+} u(x, x_N) = \varphi(x)$ per ogni $x \in \partial\mathcal{H}^N$.

Dim. Abbiamo già dimostrato (iii) nel Capitolo 4, sfruttando le proprietà del nucleo P_s definito in (4.14). Inoltre, dato che

$$\frac{2}{\omega_N} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{x_N}{(x_N^2 + |x - y|^2)^{N/2}} dy = 1,$$

otteniamo facilmente che $|u(x, x_N)| \leq \|\varphi\|_\infty$ e cioè (i). L'armonicità (e quindi la regolarità) di u segue dall'armonicità di P (che si verifica direttamente) e dai teoremi standard di derivazione sotto il segno di integrale. \square

Calcoliamo ora la funzione di Green per $B(0, 1)$. Diremo che $x^* = \frac{x}{|x|^2}$ è il *punto duale* del punto $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ rispetto a $\partial B(0, 1)$.

L'applicazione $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} \ni x \mapsto x^* \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si dice *l'inversione per raggi vettori reciproci* rispetto a $\partial B(0, 1)$.

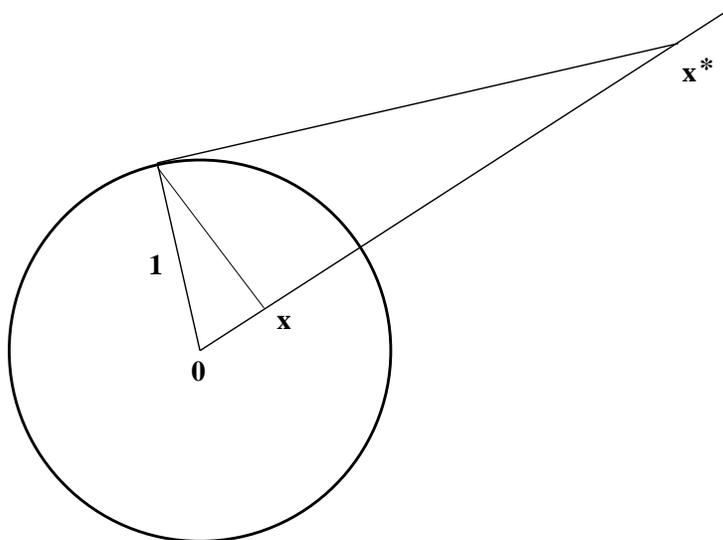


Figura 1. Il punto duale x^* del punto $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ rispetto a $\partial B(0, 1)$.

Useremo questa applicazione per costruire un correttore Φ^x tale che

$$\Delta \Phi^x = 0 \text{ in } B(0, 1),$$

$$\Phi^x(y) = \Phi(y - x) \text{ per } y \in \partial B(0, 1),$$

cosicché la funzione di Green sarà di nuovo $G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi^x(y)$.

La funzione $\Phi^x(y) = |x|^{2-N} \Phi(y - x^*) = \Phi(|x|(y - x^*))$ è armonica per $y \neq x^*$ e quindi per $y \in B(0, 1)$. Inoltre, se $y \in \partial B(0, 1)$, risulta:

$$|x|^2 |y - x^*|^2 = |x|^2 \left(|y|^2 - \frac{2y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \right) = |x|^2 - 2y \cdot x + 1 = |x - y|^2,$$

e quindi $\Phi^x(y) = \Phi(y - x)$ per $y \in \partial B(0, 1)$.

La *funzione di Green per la sfera* è dunque

$$(7.16) \quad G(x, y) = \Phi(y - x) - \Phi(|x|(y - x^*)), \quad x, y \in B(0, 1), \quad x \neq y.$$

Questa formula vale anche nel caso in cui $N = 2$.

Calcoliamo la derivata normale di G :

$$\frac{\partial G}{\partial y_k}(x, y) = \frac{1}{\omega_N} \frac{x_k - y_k}{|x - y|^N} + \frac{1}{\omega_N} \frac{|x|^2 y_k - x_k}{|x - y|^N},$$

se $y \in \partial B(0, 1)$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x, y) &= \sum_{k=1}^N y_k \frac{\partial G}{\partial y_k}(x, y) = \\ &= -\frac{1}{\omega_N |x-y|^N} \sum_{k=1}^N y_k [y_k - x_k - |x|^2 y_k + x_k] = \\ &= -\frac{1}{\omega_N |x-y|^N} [1 - x \cdot y - |x|^2 + x \cdot y] = -\frac{1}{\omega_N} \frac{1 - |x|^2}{|x-y|^N}. \end{aligned}$$

Teorema 7.4.7 (Formula di Poisson per la sfera). *Sia $\varphi \in C^0(\partial B(0, R))$ e sia*

$$(7.17) \quad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} dS_y.$$

Allora

- (i) $u \in C^\infty(B(0, R))$,
- (ii) $\Delta u = 0$ in $B(0, R)$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \varphi(x_0)$ per ogni $x_0 \in \partial B(0, R)$.

Dim. La dimostrazione segue la falsariga di quella del Teorema 7.4.6. \square

Sfruttando la formula di Poisson per la sfera, possiamo ridimostrare la proprietà di analiticità delle funzioni armoniche.

Corollario 7.4.8. *Ogni funzione armonica in un aperto Ω è ivi analitica.*

Dim. Dobbiamo dimostrare che u è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di un punto qualsiasi di Ω . Senza perdere di generalità, possiamo supporre che tale punto sia l'origine.

Sia ora $\overline{B(0, R)} \subset \Omega$. Per la (7.17), possiamo scrivere:

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B(0, R)} \frac{u(y)}{|x-y|^N} dS_y, \quad x \in B(0, R).$$

Per $x \in B(0, R/3)$ ed $y \in \partial B(0, R)$, si ha che

$$\begin{aligned} |x-y|^{-N} &= \{|x|^2 - 2x \cdot y + R^2\}^{-N/2} = \\ R^{-N} \left\{ 1 + \frac{|x|^2 - 2x \cdot y}{R^2} \right\}^{-N/2} &= R^{-N} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-N/2}{n} \left(\frac{|x|^2 - 2x \cdot y}{R^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Quindi otteniamo

$$\frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N R} |x - y|^{-N} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+2}(x, y),$$

dove $P_{2n+2}(x, y)$ è un polinomio di grado $2n + 2$ in $x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$. Scambiando la serie con l'integrale, concludiamo che, per $x \in B(0, R/3)$, $u(x)$ è uguale ad una serie di polinomi in x_1, \dots, x_N (di grado $2n + 2$) e quindi coincide con una serie di potenze in x_1, \dots, x_N . \square

7.5. Il metodo di Perron

Ricordiamo che una funzione u , continua in Ω , si dice *subarmonica* in Ω se, per ogni pallina $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, vale la (6.5) ossia che

$$u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y.$$

Una funzione u si dice *superarmonica* in Ω se $-u$ è subarmonica.

Proposizione 7.5.1. *Siano u_1, \dots, u_n subarmoniche in Ω .*

- (i) *Se c_1, \dots, c_n sono costanti non-negative, allora $c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$ è subarmonica in Ω .*
- (ii) *La funzione v definita da $v(x) = \max[u_1(x), \dots, u_n(x)]$, $x \in \Omega$, è subarmonica in Ω .*

Dim. (i) Immediata.

(ii) Sia $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$; esiste $k \in \{1, \dots, n\}$ tale che $v(x) = u_k(x)$. Dunque

$$v(x) = u_k(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u_k(y) dS_y \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} v(y) dS_y.$$

Per l'arbitrarietà di $\overline{B(x, r)}$ si conclude. \square

Lemma 7.5.2. *Sia $u \in C^0(\Omega)$. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- (i) *u è subarmonica in Ω ;*
- (ii) *per ogni $x \in \Omega$ esiste $r_x > 0$ tale che u soddisfa (6.5) per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ con $0 < r < r_x$;*
- (iii) *per ogni aperto A con $\overline{A} \subset \Omega$ e per ogni funzione v , armonica in A , continua in \overline{A} ed uguale ad u su ∂A risulta che $u \leq v$ in A .*

Dim. (i) \Rightarrow (ii). Immediata.

(ii) \Rightarrow (iii). Sia A un aperto tale che $\bar{A} \subset \Omega$ e sia v armonica in A , continua su \bar{A} e tale che $v = u$ su ∂A . Per il Teorema 6.3.1 e l'Osservazione 6.3.2, si ha che $u \leq v$ in A .

(iii) \Rightarrow (i). Sia $B(x, r) \subset \Omega$. La (iii) implica che

$$u(x) \leq v(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} v(y) dS_y = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y,$$

avendo scelto $A = B(x, r)$. \square

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto e B una pallina tale che $\bar{B} \subset \Omega$. Sia inoltre $M_B : C^0(\Omega) \rightarrow C^0(\Omega)$ l'operatore definito da

$$(7.18) \quad M_B(u) = \begin{cases} u & \text{in } \Omega \setminus B, \\ v & \text{in } B, \end{cases}$$

dove v è la funzione armonica in B tale che $v = u$ su ∂B .

Teorema 7.5.3. *Risulta che*

- (i) $M_B(u) \leq M_B(v)$ in Ω , se $u \leq v$ in Ω ;
- (ii) $M_B(u)$ è subarmonica in Ω , se u è subarmonica in Ω .

Dim. (i) La disuguaglianza è banale in $\Omega \setminus B$. Inoltre, $M_B(u) - M_B(v)$ è armonica in B e non-positiva su ∂B . Per il principio di massimo, essa è non-positiva su \bar{B} .

(ii) Sia $w = M_B(u)$.

Se $x \in B$, allora

$$w(x) = v(x) = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} v(y) dS_y = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} w(y) dS_y,$$

per ogni $\bar{B}(x, r) \subset B$.

Se $x \notin \bar{B}$, allora

$$w(x) = u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y = \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} w(y) dS_y,$$

per ogni $\bar{B}(x, r) \subset \Omega \setminus \bar{B}$.

Se $x \in \partial B$, allora

$$w(x) = u(x) \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y \leq \frac{1}{|\partial B(x, r)|} \int_{\partial B(x, r)} w(y) dS_y,$$

per ogni $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$, perché $w \geq u$ in Ω .

Basterà allora applicare a w il Lemma 7.5.2. \square

Teorema 7.5.4 (Metodo di Perron). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e sia*

$$\underline{S}(\Omega) = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : v \text{ subarmonica in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ su } \partial\Omega\}.$$

Allora la funzione definita per $x \in \overline{\Omega}$ da

$$(7.19) \quad u(x) = \sup\{v(x) : v \in \underline{S}(\Omega)\}$$

è armonica in Ω .

Dim. Sia

$$\overline{S}(\Omega) = \{v \in C^0(\overline{\Omega}) : v \text{ superarmonica in } \Omega \text{ e } v \leq \varphi \text{ su } \partial\Omega\}.$$

È chiaro che le classi $\underline{S}(\Omega)$ e $\overline{S}(\Omega)$ non sono vuote dato che contengono le funzioni $v \equiv \min_{\partial\Omega} \varphi$ e $w \equiv \max_{\partial\Omega} \varphi$, rispettivamente.

Se $v \in \underline{S}(\Omega)$ e $w \in \overline{S}(\Omega)$, allora $v - w$ è subarmonica in Ω e $v - w \leq 0$ su $\partial\Omega$ e quindi $v - w \leq 0$ in Ω ; pertanto:

$$v \leq w \text{ per ogni } v \in \underline{S}(\Omega) \text{ ed ogni } w \in \overline{S}(\Omega).$$

La funzione u definita da (7.19); è limitata, perché ogni $v \in \underline{S}(\Omega)$ è limitata da $\max_{\partial\Omega} \varphi$.

Fissato $x_0 \in \Omega$, esiste una successione di funzioni $u_n \in \underline{S}(\Omega)$ tale che $u_n(x_0) \rightarrow u(x_0)$. La successione di funzioni $v_n = \max[u_1, \dots, u_n]$, è crescente e fatta di funzioni di $\underline{S}(\Omega)$, per la Proposizione 7.5.1; inoltre, $v_n(x_0) \rightarrow u(x_0)$ se $n \rightarrow \infty$.

Sia $B = B(x_0, r)$ con $\overline{B} \subset \Omega$; la successione di funzioni $w_n = M_B(v_n)$ è crescente e fatta di funzioni di $\underline{S}(\Omega)$, per il Teorema 7.5.3; inoltre le w_n sono armoniche in B e, dato che $v_n \leq w_n$ in Ω , $w_n(x_0) \rightarrow u(x_0)$ per $n \rightarrow \infty$. Possiamo allora applicare il Corollario 6.5.3 alla successione di funzioni w_n in B : essa converge dunque ad una funzione w armonica in B e risulta $w(x_0) = u(x_0)$.

Fissiamo ora $x^* \in B$ ed indichiamo con $\{u_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di $\underline{S}(\Omega)$ tali che $u_n^*(x^*) \rightarrow u(x^*)$. Le funzioni v_n^* e w_n^* , definite rispettivamente da

$$v_n^* = \max[v_n, u_1^*, \dots, u_n^*] \text{ e } w_n^*(x) = M_B(v_n^*),$$

sono elementi di $\underline{S}(\Omega)$ e risulta $w_n \leq w_n^* \leq w_{n+1}^*$ ed anche che $w_n^*(x^*) \rightarrow u(x^*)$.

Analogamente a prima, possiamo dimostrare che w_n^* converge in B ad una funzione w^* , armonica in B e tale che $w^*(x^*) = u(x^*)$. Dato che $w_n \leq w_n^*$, risulta che $w \leq w^*$ in B ; ma

$$w(x_0) \leq w^*(x_0) \leq u(x_0) = \sup_{v \in \underline{S}(\Omega)} v(x_0)$$

e $w(x_0) = u(x_0)$; dunque $w^*(x_0) = u(x_0) = w(x_0)$.

Pertanto: $w - w^* \leq 0$ in B e $w(x_0) - w^*(x_0) = 0 = \max_B (w - w^*)$.

Essendo $w - w^*$ armonica in B , essa deve essere nulla in B , per il principio di massimo. Dunque $w \equiv w^*$ in B ed in particolare $w(x^*) = w^*(x^*) = u(x^*)$.

In conclusione, abbiamo dimostrato che, fissato $x^* \in B$, la funzione armonica w ha lo stesso valore di u in x^* e dunque u è armonica in B . Per l'arbitrarietà di B in Ω , concludiamo che u è armonica in Ω . \square

Una funzione ψ continua in $\bar{\Omega}$, nulla in $x_0 \in \partial\Omega$, positiva in $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ e superarmonica in Ω si dice una *funzione barriera in x_0* per il problema di Dirichlet in Ω .

Teorema 7.5.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato, $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ e supponiamo che $x_0 \in \partial\Omega$ ammetta una funzione barriera ψ .*

Se u è la funzione definita in (7.19), risulta che

$$\lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} u(x) = \varphi(x_0).$$

Dim. Poiché φ è continua in x_0 , per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ per $x \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_\varepsilon)$.

Dato che ψ è continua e positiva per $x \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_\varepsilon)^c$, posto

$$M_\varepsilon = \max \left\{ \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0)|}{\psi(x)} : x \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_\varepsilon)^c \right\},$$

risulta $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq M_\varepsilon \psi(x)$ per $x \in \partial\Omega \cap B(x_0, \delta_\varepsilon)^c$ e dunque

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon + M_\varepsilon \psi(x) \quad \text{per ogni } x \in \partial\Omega.$$

La funzione subarmonica $\varphi(x_0) - \varepsilon - M_\varepsilon \psi(x)$ appartiene quindi alla classe $\underline{S}(\Omega)$ e pertanto $\varphi(x_0) - \varepsilon - M_\varepsilon \psi(x) \leq u(x)$, per ogni $x \in \bar{\Omega}$. In maniera analoga, dimostriamo che $\varphi(x_0) + \varepsilon + M_\varepsilon \psi(x) \geq u(x)$, per ogni $x \in \bar{\Omega}$.

In definitiva:

$$|u - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon + M_\varepsilon \psi \quad \text{su } \bar{\Omega}.$$

Dato che ψ è continua in x_0 e $\psi(x_0) = 0$, abbiamo che

$$\limsup_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} |u(x) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue la tesi. \square

Diremo che un aperto Ω ha la *proprietà della sfera esterna* se per ogni punto $x \in \partial\Omega$ esiste una pallina B tale che $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x\}$.

Teorema 7.5.6. *Se Ω è un aperto limitato che gode della proprietà della sfera esterna, allora ogni $x_0 \in \partial\Omega$ ammette una barriera.*

Dim. Per l'ipotesi, esiste una pallina $B = B(a, r)$ tale che $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{x_0\}$. Per $x \neq a$ poniamo $\psi(x) = \Phi(x_0 - a) - \Phi(x - a)$, dove Φ è la soluzione fondamentale (7.1); ψ è la barriera cercata. \square

Sia $x_0 \in \partial\Omega$ e sia $\Omega_\rho(x_0) = \{x \in \Omega : |x - x_0| < \rho\}$. Si dice che x_0 è un *punto regolare* per il problema di Dirichlet in Ω se esiste una funzione barriera in x_0 per almeno un insieme $\Omega_\rho(x_0)$. In caso diverso, x_0 si dice un *punto eccezionale*.

Osserviamo che se x_0 è un punto regolare per il problema di Dirichlet secondo questa definizione, allora la funzione armonica u costruita con il metodo di Perron soddisfa la condizione al contorno di Dirichlet in x_0 . Infatti, se ψ è una barriera in x_0 per l'insieme $\Omega_\rho(x_0)$, sia $0 < \rho_0 < \rho$ ed $m = \min\{\psi(x) : x \in \overline{\Omega_\rho(x_0)} \setminus \Omega_{\rho_0}(x_0)\}$; allora $m > 0$ e la funzione $\overline{\psi}$ definita in Ω da

$$\overline{\psi} = \begin{cases} m & \text{in } \Omega \setminus \Omega_{\rho_0}(x_0), \\ \min(\psi, m) & \text{in } \Omega_{\rho_0}(x_0), \end{cases}$$

è una barriera in x_0 per Ω .

Come dimostrato nel Teorema 7.5.6, se Ω ha la proprietà della sfera esterna tutti i punti di $\partial\Omega$ sono regolari per il problema di Dirichlet in Ω . Nel caso di un dominio del piano, questa ipotesi si può indebolire, come mostra il seguente risultato.

Teorema 7.5.7 (Proprietà del segmento). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato, sia $z_0 \in \partial\Omega$ e supponiamo che esista un punto $z_1 \notin \Omega$ tale che tutto il segmento che unisce z_0 a z_1 stia fuori di Ω . Allora z_0 è regolare per il problema di Dirichlet in Ω .*

Dim. A meno di un cambiamento di coordinate, possiamo supporre che z_0 coincida con l'origine degli assi cartesiani e che z_1 giaccia sul semiasse reale negativo. Posto $\rho = |z_1 - z_0|$, la funzione

$$\psi(z) = -\operatorname{Re} \frac{1}{\log z/\rho}$$

dove $\arg z$ è l'argomento principale di $z = x + iy$, risulta una barriera in $\Omega_\rho(z_0)$. \square

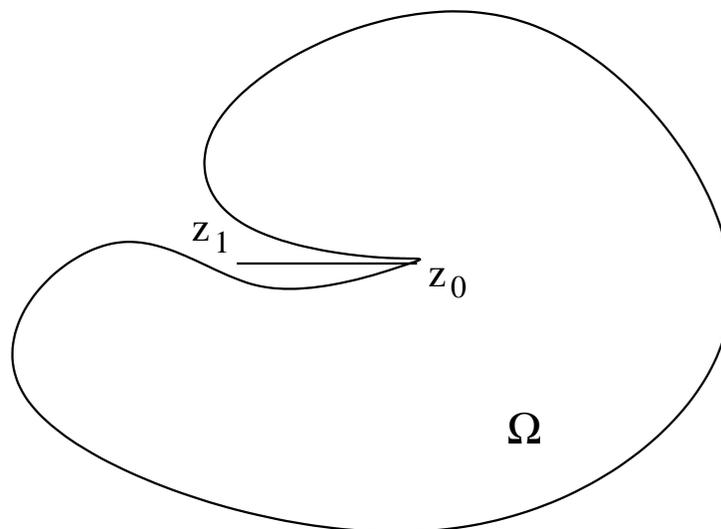


Figura 2. La proprietà del segmento.

Osservazione 7.5.8. Esistono aperti limitati in \mathbb{R}^3 e con frontiera di area finita che contengono punti eccezionali per il problema di Dirichlet.

Per esempio, sia

$$u(x) = \int_0^1 \frac{t \, dt}{\sqrt{(x_1 - t)^2 + x_2^2 + x_3^2}}$$

e sia $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1, u(x) < 1 + c\}$ dove $c > 0$.

La funzione u è armonica in Ω_c e continua su $\partial\Omega$; tuttavia non esiste una funzione di classe $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, armonica in Ω e che assume i valori di u su $\partial\Omega$.

Per dettagli su questo esempio e per ulteriori risultati sui punti regolari si vedano [Ga] e [MZ].

Concludiamo questo paragrafo con un risultato di esistenza per la funzione di Green.

Teorema 7.5.9 (Esistenza della funzione di Green). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato tale che ogni punto di $\partial\Omega$ sia regolare per il problema di Dirichlet.*

Allora Ω ammette la funzione di Green.

Dim. L'esistenza del correttore Φ^x , $x \in \Omega$, è garantita dai Teoremi 7.5.4 e 7.5.5, dato che $\Phi(\cdot - x)$ è continua su $\partial\Omega$. \square

7.6. Il principio di Dirichlet

Lo scopo di questo paragrafo e del successivo è quello di presentare a grandi linee due tecniche, alternative al metodo di Perron, che ci permettono di ottenere un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet relativo all'equazione di Poisson. Esse sono basate rispettivamente sui Teorema di Lax-Milgram e su quello della Proiezione.

Quella presentata in questo paragrafo ha il pregio di fornire un teorema di esistenza per una classe molto più ampia di operatori, come specificheremo tra breve.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto. Lo spazio $H^1(\Omega)$ è definito come lo spazio delle funzioni $f \in L^2(\Omega)$, a valori reali, aventi gradiente distribuzionale $\nabla f \in L^2(\Omega)^N = L^2(\Omega) \times \cdots \times L^2(\Omega)$.

Lo spazio $H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert su \mathbb{R} con il prodotto scalare definito da:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f g \, dx + \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx, \quad f, g \in H^1(\Omega).$$

Osservazione 7.6.1. Lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è denso in $H^1(\Omega)$ e, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, $C_0^\infty(\Omega)$ è denso in $H^1(\Omega)$.

In generale, $C_0^\infty(\Omega)$ non è denso in $H^1(\Omega)$. Lo chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ nella norma dello spazio $H^1(\Omega)$ si indica con $H_0^1(\Omega)$.

Osservazione 7.6.2. Storicamente, lo spazio $H^1(\Omega)$ è stato definito come la chiusura di $C^\infty(\Omega)$ nella norma indotta dal prodotto scalare sopra definito. Lo spazio che qui chiamiamo $H^1(\Omega)$ è lo spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega)$. L'osservazione precedente equivale ad asserire che $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$. Questo risultato è dovuto a Meyers e Serrin ed una dimostrazione completa si può trovare in [Ad].

Mostreremo ora un'applicazione alle equazioni ellittiche del Teorema di Lax-Milgram 2.5.3.

L'operatore differenziale \mathcal{L} definito (formalmente) da

$$(7.20) \quad \mathcal{L}u = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u$$

si dice (*uniformemente*) *ellittico* se esiste una costante $\lambda > 0$ tale che

$$(7.21) \quad \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2,$$

per $x \in \Omega$ quasi ovunque e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Supponiamo inoltre che le funzioni misurabili a_{ij}, b_i e c — i *coefficienti* dell'operatore \mathcal{L} — appartengano allo spazio $L^\infty(\Omega)$ e che $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, N$.

Sia $f \in L^2(\Omega)$. Una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$ si dice *soluzione debole* del problema di Dirichlet:

$$\mathcal{L}u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ su } \partial\Omega,$$

se per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si verifica che

$$(7.22) \quad \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} v + c(x) u v \right\} dx = \int_{\Omega} f(x) v dx.$$

Si noti che se a_{ij}, b_i, c, f, u e v sono abbastanza regolari ed u e v sono nulle su $\partial\Omega$, allora (7.22) si ottiene moltiplicando per v l'equazione $\mathcal{L}u = f$ ed integrando per parti.

Definiamo la forma bilineare $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la formula:

$$(7.23) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) u_{x_i} v + c(x) u v \right\} dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Lemma 7.6.3. *La forma bilineare (7.23) è continua se $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$, per $i, j = 1, \dots, N$.*

Se inoltre \mathcal{L} è ellittico, allora esistono due costanti, $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, tali che

$$(7.24) \quad \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq a(u, u) + \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

per ogni $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Dim. Sia A la matrice $N \times N$ $(a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$ e sia b il vettore di componenti $b_i(x)$, $i = 1, \dots, N$. Dalla (7.23) risulta:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ (A \nabla u) \cdot \nabla v + (b \cdot \nabla u) v + c uv \right\} dx,$$

e quindi

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \int_{\Omega} \left\{ |A| |\nabla u| |\nabla v| + |b| |\nabla u| |v| + |c| |u| |v| \right\} dx \leq \\ &\leq C_A \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx + C_B \int_{\Omega} |\nabla u| |v| dx + \|c\|_{\infty} \int_{\Omega} |u| |v| dx, \end{aligned}$$

dove $C_A = \left(\sum_{i,j=1}^N \|a_{ij}\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ e $C_B = \left(\sum_{i=1}^N \|b_i\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}$; da ciò segue che

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

dove C è una costante che dipende da $\sum_{i,j=1}^N \|a_{ij}\|_\infty^2$, $\sum_{i=1}^N \|b_i\|_\infty^2$ e da $\|c\|_\infty$. Questa disuguaglianza implica che a è continua.

Dato che \mathcal{L} è ellittico, risulta:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &\leq \int_{\Omega} (A \nabla u) \cdot \nabla u dx = \\ &a(u, u) - \int_{\Omega} \{(b \cdot \nabla u) u + c u^2\} dx \leq \\ &\leq a(u, u) + \left(\sum_{i=1}^N \|b_i\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} |\nabla u| |u| dx + \|c\|_\infty \int_{\Omega} u^2 dx \leq \\ &\leq a(u, u) + \left(\sum_{i=1}^N \|b_i\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2 dx \right\} + \|c\|_\infty \int_{\Omega} u^2 dx. \end{aligned}$$

Scegliamo $\varepsilon > 0$ tale che $2\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N \|b_i\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \lambda$ ed otteniamo:

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq a(u, u) + C \int_{\Omega} u^2 dx,$$

dove $C = \max \left[\frac{1}{\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^N \|b_i\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \|c\|_\infty \right]$.

A questa disuguaglianza applichiamo ora la disuguaglianza di Poincaré (7.39) e otteniamo (7.24) con $\alpha = \frac{\lambda \lambda_1}{2(\lambda_1 + 1)}$ e $\beta = \frac{C}{1 + \lambda_1}$. \square

Teorema 7.6.4. *Esiste un numero $\gamma \geq 0$ tale che, per ogni $\mu \geq \gamma$ ed ogni $f \in L^2(\Omega)$, esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema di Dirichlet:*

$$\mathcal{L}u + \mu u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega,$$

Dim. Prendiamo $\gamma = \beta$, dove β è la costante del Lemma 7.6.3, e definiamo la forma bilineare

$$a_\mu(u, v) = a(u, v) + \mu \int_{\Omega} u v dx, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

La forma a_μ verifica le ipotesi del Teorema 2.5.3, infatti

$$a_\mu(u, u) = a(u, u) + \mu \int_{\Omega} u^2 dx \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 (\mu - \beta) \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2,$$

cioè a_μ è coeciva. È inoltre chiaro che a_μ è continua.

Per $f \in L^2(\Omega)$, definiamo un funzionale lineare su $L^2(\Omega)$ mediante la formula $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v dx$; questo è limitato su $L^2(\Omega)$ e quindi su $H_0^1(\Omega)$ per la disuguaglianza di Poincaré (7.39).

Per il Teorema 2.5.3, esiste un'unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che $a_\mu(u, v) = \langle f, v \rangle$, per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$. \square

Corollario 7.6.5. *Siano $b_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \dots, N$, $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, N$ e $c(x) \geq 0$.*

Allora per ogni $f \in L^2(\Omega)$, esiste un'unica soluzione debole $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema di Dirichlet:

$$\Delta u - c(x) u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Dim. Scegliendo

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} c(x) u v dx,$$

per la (7.39) risulta:

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = [\sigma + (1 - \sigma)] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq \\ &\geq \sigma \lambda_1^{-1} \int_{\Omega} u^2 dx + (1 - \sigma) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \\ &= \frac{1}{1 + \lambda_1} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

avendo scelto $\sigma = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}$. Si conclude come per il Teorema 7.6.4. \square

Utilizzeremo ora il teorema della proiezione in spazi di Hilbert per ottenere un teorema di esistenza per il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

Teorema 7.6.6. *Sia $\varphi \in H^1(\Omega)$ e sia $c(x) \geq 0$ in Ω .*

Allora esiste unica $u \in H^1(\Omega)$ soluzione debole dell'equazione

$$\Delta u - c(x) u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

tale che $u - \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Dim. Si definisca in $H^1(\Omega)$ il prodotto scalare

$$(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \nabla u \cdot \nabla v + c(x) u v \right\} dx,$$

che induce la seminorma

$$(7.25) \quad \|u\| = \sqrt{\int_{\Omega} \left\{ |\nabla u|^2 + c(x) u^2 \right\} dx}.$$

Si osservi che, in generale, (7.25) è solo una seminorma, dato che potrebbe essere $c \equiv 0$; vale però comunque l'identità del parallelogramma:

$$\left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2}.$$

L'insieme $M = \varphi + H_0^1(\Omega)$ è un sottoinsieme chiuso e convesso di $H^1(\Omega)$. Usando l'identità del parallelogramma, ripercorrendo la dimostrazione del Teorema della Proiezione in spazi di Hilbert, possiamo dimostrare che se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ è una successione tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \min_{v \in M} \|v\|,$$

allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che $\|u_n - u_m\| < \varepsilon$ per ogni $n, m > \nu$. In generale, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy, perché (7.25) in un caso è solo una seminorma in $H^1(\Omega)$. D'altra parte però $\{u_n - \varphi\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $H_0^1(\Omega)$; infatti (7.25) definisce una norma in $H_0^1(\Omega)$, per la disuguaglianza di Poincaré (7.39).

Pertanto esiste $U \in H_0^1(\Omega)$ tale che $u_n - \varphi \rightarrow U$ in $H_0^1(\Omega)$ e quindi $u = \varphi + U \in M$ e risulta che

$$\|u\| = \min_{v \in M} \|v\|.$$

L'unicità di u segue semplicemente ancora dall'identità del parallelogramma.

Poiché $u = \varphi + U$ con $U \in H_0^1(\Omega)$, per ogni $V \in H_0^1(\Omega)$ ed ogni $t \in \mathbb{R}$ anche $\varphi + U + tV \in M$ e quindi

$$\|\varphi + U\|^2 \leq \|\varphi + U + tV\|^2 = \|\varphi + U\|^2 + 2t(\varphi + U, V) + t^2\|V\|^2.$$

Pertanto $(u, V) = 0$ per ogni $V \in H_0^1(\Omega)$ e cioè u è una soluzione debole. \square

Se $c \equiv 0$, il Teorema 7.6.6 implica l'esistenza di una soluzione debole del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace.

Il lemma seguente implica che ogni soluzione debole dell'equazione di Laplace è effettivamente armonica.

Lemma 7.6.7 (Lemma di Weyl). *Sia $u \in H^1(\Omega)$. Se per ogni $\phi \in H_0^1(\Omega)$ risulta*

$$\int_{\Omega} \nabla u(y) \cdot \nabla \phi(y) dy = 0,$$

allora u è quasi ovunque uguale ad una funzione armonica in Ω .

Dim. Sia $\overline{B(x, r)} \subset \Omega$ e scegliamo $\phi(y) = \eta(|y - x|)$ dove

$$\eta(\rho) = \begin{cases} r - \varepsilon, & 0 \leq \rho \leq \varepsilon, \\ r - \rho, & \varepsilon < \rho \leq r, \\ 0, & \rho > r. \end{cases}$$

Allora $\nabla \phi(y) = -(y - x)/|y - x|$ e quindi $|\nabla \phi| \leq 1$ q.o. in Ω e $\phi = 0$ su $\partial\Omega$.

Perciò, posto $A_{\varepsilon, r} = B(x, r) \setminus \overline{B(x, \varepsilon)}$, si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \nabla u(y) \cdot \nabla \phi(y) dy = - \int_{A_{\varepsilon, r}} \nabla u(y) \cdot \frac{y - x}{|y - x|} dy = \\ &= - \int_{A_{\varepsilon, r}} \operatorname{div} \left\{ u(y) \frac{y - x}{|y - x|} \right\} dy + (N - 1) \int_{A_{\varepsilon, r}} \frac{u(y)}{|y - x|} dy = \\ &= - \int_{\partial B(x, r)} u(y) dS_y + \int_{\partial B(x, \varepsilon)} u(y) dS_y + (N - 1) \int_{\varepsilon}^r \left(\int_{\partial B(x, \rho)} u(y) dS_y \right) \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Poniamo allora

$$\psi(\rho) = \int_{\partial B(x, \rho)} u(y) dS_y;$$

si ha che

$$\psi(r) - \psi(\varepsilon) = (N - 1) \int_{\varepsilon}^r \frac{\psi(\rho)}{\rho} d\rho$$

per ogni $0 < \varepsilon < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Dunque

$$\psi'(r) = \frac{N - 1}{r} \psi(r), \quad \varepsilon < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega),$$

e quindi $\psi(r) = c r^{N-1}$ per qualche costante c (per ogni $0 < r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, per l'arbitrarietà di ε). Dato che $\psi(r)/r \rightarrow \omega_n u(x)$ per $r \rightarrow 0$, risulta che $c = \omega_N u(x)$, cioè u soddisfa la proprietà della media in Ω e quindi è armonica in Ω . \square

7.7. Riduzione ad un'equazione integrale di Fredholm

La tecnica presentata in questo paragrafo si rivela utile soprattutto da un punto di vista numerico. Infatti, i problemi di Dirichlet e Neumann per l'equazione di Laplace in un dominio di \mathbb{R}^N sono convertiti in due equazioni integrali per funzioni definite sulla sua frontiera, che è una varietà

$(N - 1)$ -dimensionale, ottenendo quindi il guadagno di una dimensione. Ci proponiamo di risolvere tali problemi cercando la soluzione in una forma particolare, suggeritaci dalla teoria del potenziale.

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ una regione limitata da una superficie regolare $\partial\Omega$ topologicamente equivalente ad una sfera. Indichiamo come al solito con Φ la soluzione fondamentale (7.1). Possiamo associare a $\partial\Omega$ due funzioni: il *potenziale di strato semplice*

$$(7.26) \quad V(x) = \int_{\partial\Omega} \Phi(x - y) \rho(y) dS_y$$

ed il *potenziale di doppio strato*

$$(7.27) \quad W(x) = \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(x - y) dS_y = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{|x - y|^N} dS_y,$$

dove si è indicato con $\nu(y)$ il versore della normale *esterna* a Ω nel punto $y \in \partial\Omega$.

Quando $N = 3$, alla funzione V si può dare il significato di potenziale, gravitazionale o elettrico, di una distribuzione, di massa o di carica, con densità ρ concentrata sulla superficie $\partial\Omega$. La funzione W invece può prendere il significato di potenziale di una superficie, $\partial\Omega$, che si suppone magnetizzata; in questo caso μ rappresenta la *densità di magnetizzazione* o di *momento magnetico* (per i dettagli si veda [Ke]).

Osservazione 7.7.1. Sia $F(x, y) = \Phi(x - y)\rho(y)$ con $x \in \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ ed $y \in \partial\Omega$. È chiaro che esistono costanti C_1 e C_2 tali che

$$|\nabla_x F(x, y)| \leq C_1 \rho(y), \quad |\nabla_x^2 F(x, y)| \leq C_2 \rho(y),$$

per $x \in \overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ ed $y \in \partial\Omega$.

Quindi, se $\rho \in L^1(\partial\Omega, dS_y)$, possiamo applicare il teorema di derivazione sotto il segno d'integrale ed ottenere che

$$\Delta V(x_0) = \int_{\partial\Omega} \Delta \Phi(x_0 - y) \rho(y) dS_y = 0$$

in ogni $x_0 \in \Omega$ e, ragionando in modo simile, in ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$. In modo completamente analogo, otteniamo che $\Delta W = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$.

Lemma 7.7.2. Sia $\partial\Omega$ di classe C^2 e siano $\rho, \mu \in L^\infty(\partial\Omega)$. Allora le funzioni V e W in (7.26) e (7.27) sono ben definite per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Dim. L'asserto del lemma è evidente se $x \notin \partial\Omega$. Se $x \in \partial\Omega$, inoltre, è la singolarità sotto il segno di integrale in V è integrabile, essendo $\partial\Omega$ una varietà di dimensione $N - 1$.

Infatti, possiamo parametrizzare un intorno abbastanza piccolo $\mathcal{U}(x) \subset \partial\Omega$ di $x \in \partial\Omega$ come il grafico di una funzione f di classe C^2 : $\mathcal{U}(x) = \{y_N = f(y') : y' = (y_1, \dots, y_{N-1}), |y'| < \varepsilon\}$ con $f(0') = 0$ e $\nabla f(0') = 0'$ (si può sempre supporre che x coincida con l'origine degli assi). In questa parametrizzazione abbiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}(x)} \Phi(x-y) \rho(y) dS_y &= \\ C_N \int_{|y'| < \varepsilon} \{|y'|^2 + f(y')^2\}^{(2-N)/2} \rho(y', f(y')) \sqrt{1 + |\nabla f(y')|^2} dy' &= \\ C_N \int_{|y'| < \varepsilon} \frac{|y'|^{2-N} \rho(y', f(y'))}{\{1 + [f(y')/|y'|]^2\}^{(N-2)/2}} \sqrt{1 + |\nabla f(y')|^2} dy' &\leq \\ C \int_{|y'| < \varepsilon} |y'|^{2-N} dy', & \end{aligned}$$

dove C è una costante che dipende da N e dalle norme infinito di ρ e del gradiente di f . È chiaro allora che l'integrale su $\mathcal{U}(x)$ converge; quello su $\partial\Omega \setminus \mathcal{U}(x)$ converge senz'altro perché le funzioni integrande rimangono limitate.

Nel caso di W bisogna osservare che $(x-y) \cdot \nu(y) = O(|x-y|^2)$ se $|x-y| \rightarrow 0$ per $x, y \in \partial\Omega$, dato che $x-y$ tende ad essere ortogonale a $\nu(y)$. Infatti, dato che $\partial\Omega$ è di classe C^2 , la funzione d definita da

$$d(y) = \begin{cases} \text{dist}(y, \partial\Omega), & y \notin \Omega, \\ -\text{dist}(y, \partial\Omega), & y \in \Omega, \end{cases}$$

è di classe C^2 in un intorno di $\partial\Omega$ e, dato che $\nu(y) = \nabla d(y)$ per $y \in \partial\Omega$, applicando la formula di Taylor a due punti x e y in $\partial\Omega$, otteniamo che

$$0 = d(x) - d(y) = \nabla d(y) \cdot (x-y) + O(|x-y|^2) = \nu(y) \cdot (x-y) + O(|x-y|^2),$$

e quindi $\nu(y) \cdot (x-y) = O(|x-y|^2)$ se $|x-y| \rightarrow 0$ per $x, y \in \partial\Omega$. Perciò

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(x-y) = O(|x-y|^{2-N})$$

— una singolarità che si dimostra integrabile su $\partial\Omega$ utilizzando gli stessi ragionamenti adottati all'inizio della dimostrazione. \square

Studieremo ora il comportamento di $V(x)$ e $W(x)$ quando x si avvicina (dalla parte di Ω o del suo complementare) ad un punto $x_0 \in \partial\Omega$. Utilizzeremo la seguente notazione: se U è una funzione definita in \mathbb{R}^N e $x_0 \in \partial\Omega$,

poniamo:

$$U^-(x_0) = \lim_{\Omega \ni x \rightarrow x_0} U(x) \quad \text{e} \quad U^+(x_0) = \lim_{\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} \ni x \rightarrow x_0} U(x).$$

Teorema 7.7.3. *Sia $\partial\Omega$ di classe C^2 e siano ρ e $\mu \in C^0(\partial\Omega)$. Allora le funzioni V e W definite in (7.26) e (7.27) sono armoniche in $\mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$.*

Inoltre se $x_0 \in \partial\Omega$ valgono le seguenti formule per V :

$$(7.28) \quad V^+(x_0) = V^-(x_0),$$

$$(7.29) \quad \frac{\partial V^\pm}{\partial \nu}(x_0) = \pm \frac{1}{2} \rho(x_0) + \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\partial\Omega} \rho(y) \Phi(x_0 - y) dS_y,$$

$$(7.30) \quad \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \rho(x_0);$$

e per W :

$$(7.31) \quad \frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0),$$

$$(7.32) \quad W^\pm(x_0) = \mp \frac{1}{2} \mu(x_0) + \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x_0 - y) dS_y,$$

$$(7.33) \quad W^+(x_0) - W^-(x_0) = -\mu(x_0).$$

Dim. Che V e W siano armoniche fuori di $\partial\Omega$ segue dall'osservazione precedente. È chiaro inoltre che (7.30) e (7.33) seguono rispettivamente da (7.29) e (7.32).

Ci limiteremo a dimostrare la (7.32). Siano $x_0 \in \partial\Omega$ ed $x \notin \partial\Omega$; possiamo sempre scrivere l'integrale in (7.27) come la somma di due integrali: uno esteso ad un intorno $\mathcal{U}(x_0) \subset \partial\Omega$ abbastanza piccolo di x_0 , l'altro esteso a $\partial\Omega \setminus \mathcal{U}(x_0)$.

Poniamo $x = x_0 + t\ell$ dove $\ell \cdot \nu(x_0) > 0$; i limiti in (7.32) saranno ottenuti facendo tendere t a zero da destra e da sinistra.

Dato che $|y - x_0|$ è limitato dal basso su $\partial\Omega \setminus \mathcal{U}(x_0)$ da una costante positiva, lo stesso accade anche per $|x_0 + t\ell - y|$ se t è abbastanza piccolo. Perciò l'integrale

$$\int_{\partial\Omega \setminus \mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{|x - y|^N} dS_y$$

tende a

$$\int_{\partial\Omega \setminus \mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x_0 - y) \cdot \nu(y)}{|x_0 - y|^N} dS_y$$

quando $x = x_0 + t\ell$ tende a x_0 .

Consideriamo ora l'integrale su $\mathcal{U}(x_0)$; si ha:

$$\int_{\mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{|x-y|^N} dS_y = \int_{\mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x_0 + t\ell - y) \cdot \nu(y)}{|x_0 + t\ell - y|^N} dS_y.$$

Introducendo la stessa parametrizzazione utilizzata nel Lemma 7.7.2 (questa volta si suppone $x_0 = 0$) e ponendo $\ell = (\ell', \ell_N)$, otteniamo che

$$\nu(y) dS_y = \frac{(-\nabla f(y'), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla f(y')|^2}} \sqrt{1 + |\nabla f(y')|^2} dy'$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{|x-y|^N} dS_y = \\ & \int_{|y'| < \varepsilon} \frac{-\nabla f(y') \cdot (t\ell - y') + t\ell_N - f(y')}{\{|t\ell' - y'|^2 + [t\ell_N - f(y')]^2\}^{N/2}} \mu(y', f(y')) dy' = \\ \text{sgn } t & \int_{|y'| < \varepsilon/|t|} \frac{-\nabla f(|t|z') \cdot (\ell - z') + \ell_N - f(|t|z')/|t|}{\{|\ell' - z'|^2 + [\ell_N - f(|t|z')/|t|]^2\}^{N/2}} \mu(|t|z', f(|t|z')) dz', \end{aligned}$$

dopo il cambio di variabile $y' = |t|z'$. In sintesi allora

$$\int_{\mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{|x-y|^N} dS_y = \text{sgn } t \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g_t(z') dz'$$

dove

$$g_t(z') \rightarrow \mu(x_0) \frac{\ell_N}{\{|\ell' - z'|^2 + \ell_N^2\}^{N/2}} \text{ se } |t| \rightarrow 0 \text{ e}$$

$$|g_t(z')| \leq \|\mu\|_\infty \frac{C}{\{|\ell' - z'|^2 + \ell_N^2\}^{N/2}}$$

per qualche costante C .

Possiamo allora applicare il Teorema della Convergenza Dominata ed ottenere:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} \int_{\mathcal{U}(x_0)} \mu(y) \frac{(x-y) \cdot \nu(y)}{|x-y|^N} dS_y = \pm \mu(x_0) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\ell_N}{\{|\ell' - z'|^2 + \ell_N^2\}^{N/2}} dz'.$$

Con un po' di calcoli si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\ell_N}{\{|\ell' - z'|^2 + \ell_N^2\}^{N/2}} dz' &= \omega_{N-1} \int_0^\infty \frac{\ell_N r^{N-2}}{\{r^2 + \ell_N^2\}^{N/2}} dr = \\ &= \omega_{N-1} \int_0^\infty \frac{s^{N-2}}{\{1 + s^2\}^{N/2}} ds = \frac{1}{2} \omega_N, \end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione. \square

Osservazione 7.7.4. Sia K l'operatore lineare definito da

$$(K\mu)(x) = \int_{\partial\Omega} k(x, y) \mu(y) dS_y, \quad x \in \partial\Omega,$$

dove

$$k(x, y) = 2 \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_y}(x - y) = \frac{2}{\omega_N} \frac{\nu(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^N}.$$

Dato che $k(x, y) = O(|x - y|^{2-N})$ se $|x - y| \rightarrow 0$ per $x, y \in \partial\Omega$, $k(x, y)$ ha una singolarità debole nel senso specificato nell'Esempio 2.6.8 (infatti $N - 2 < \dim(\partial\Omega) = N - 1$). Da quello stesso esempio concludiamo che K è compatto da $L^2(\partial\Omega)$ in sé. Il suo aggiunto è l'operatore K^* il cui nucleo è:

$$k^*(x, y) = k(y, x) = 2 \frac{\partial\Phi}{\partial\nu_x}(y - x) = \frac{2}{\omega_N} \frac{\nu(x) \cdot (y - x)}{|y - x|^N}.$$

Osservazione 7.7.5. Mediante le funzioni V e W , possiamo ora ridurre i problemi di Dirichlet e di Neumann per l'equazione di Laplace a due equazioni integrali.

Infatti, W è armonica in Ω (ed in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$); essa assumerà su $\partial\Omega$ i valori di una funzione φ data se e solo se $W^-(x) = \varphi(x)$ (rispettivamente se $W^+(x) = \varphi(x)$) per ogni $x \in \partial\Omega$ e cioè se

$$(7.34) \quad \int_{\partial\Omega} \mu(y) \frac{\partial}{\partial\nu_y} \Phi(x - y) dS_y \mp \frac{1}{2} \mu(x) = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

dove il segno $-$ corrisponde al problema interno e quello $+$ al problema esterno.

In modo analogo, la derivata normale della funzione V , armonica in Ω (rispettivamente in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$) assumerà su $\partial\Omega$ i valori di una funzione ψ data se e solo se $\frac{\partial V^-}{\partial\nu}(x) = \psi(x)$ (rispettivamente se $\frac{\partial V^+}{\partial\nu}(x) = \psi(x)$) per ogni $x \in \partial\Omega$ e cioè se

$$(7.35) \quad \frac{\partial}{\partial\nu_x} \int_{\partial\Omega} \rho(y) \Phi(x - y) dS_y \pm \frac{1}{2} \rho(x) = \psi(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Osservazione 7.7.6. Alla luce dell'Osservazione 7.7.4, le equazioni integrali (7.34) e (7.35) si possono allora scrivere così:

$$K\mu \pm \mu = 2\varphi \quad \text{e} \quad K^*\rho \mp \rho = 2\psi.$$

Dato che sia K che K^* sono compatti, per il Teorema 2.7.2 dell'Alternativa di Fredholm esse avranno soluzione per ogni scelta di φ e ψ ortogonali rispettivamente ad ogni soluzione non banale delle equazioni $K^*\rho \pm \rho = 0$ e $K\mu \mp \mu = 0$.

Per esempio, dire che $K^*\rho + \rho = 0$ equivale a dire che $\frac{\partial V^+}{\partial \nu} \equiv 0$ su $\partial\Omega$, cioè V è soluzione del problema di Neumann omogeneo in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ e quindi costante in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$. Dato che $V \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow \infty$, allora $V \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ e quindi $V^- \equiv 0$ su $\partial\Omega$ per la (7.28). Dunque $V \equiv 0$ anche in Ω e perciò $\frac{\partial V^-}{\partial \nu} \equiv 0$ su $\partial\Omega$. La (7.30) ci fa allora concludere che $\rho \equiv 0$ e dunque l'equazione $K\mu + \mu = \varphi$ (e quindi il problema di Dirichlet interno) ammette una sola soluzione per ogni $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$.

Il problema di Neumann interno per l'equazione di Laplace si presenta un po' più difficile, perché un'eventuale soluzione non è unica e perché il dato al contorno ψ deve soddisfare una condizione di compatibilità. Nondimeno, esso evidenzia tutta la forza del Teorema 2.7.2.

Dobbiamo infatti considerare l'equazione $K^*\rho - \rho = \psi$; essa si può risolvere se e solo se ψ è ortogonale ad ogni soluzione non banale dell'equazione omogenea aggiunta $K^*\mu - \mu = 0$; ciò equivale a richiedere che $W^+ \equiv 0$ su $\partial\Omega$ e quindi che $W \equiv 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ dato che W è armonica in $\mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$. Ma allora $\frac{\partial W^+}{\partial \nu} \equiv 0$ su $\partial\Omega$ e, per la (7.31), $\frac{\partial W^-}{\partial \nu} \equiv 0$ su $\partial\Omega$. Ne segue che W è costante in Ω e dunque μ deve essere costante, per la (7.33).

Perciò $K^*\rho - \rho = \psi$ (e quindi il problema di Neumann interno) è risolubile per ogni ψ ortogonale ad ogni costante, ossia se

$$\int_{\partial\Omega} \psi(y) \, dS_y = 0,$$

come deve essere. Ogni altra soluzione si trova aggiungendo una costante.

7.8. Risoluzione di equazioni per decomposizione spettrale

In molti dei passaggi in questo paragrafo, per brevità, procederemo formalmente, rimandando il lettore a [Ga] per i dettagli.

Consideriamo il problema agli autovalori:

$$(7.36) \quad \Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega;$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ sarà un *autovalore* del problema (7.36) se esso ammette una soluzione u non identicamente nulla; in questo caso u è un'*autofunzione* di (7.36).

Abbiamo già dimostrato che, sotto opportune ipotesi di regolarità per $\partial\Omega$, esiste la funzione di Green $G(x, y) = \Phi(x - y) - \phi^x(y)$.

Consideriamo l'operatore $K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ definito da

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Dato che G è simmetrica, avremo che K è simmetrico. Si osservi inoltre che

$$0 \leq G(x, y) \leq \Phi(y - x);$$

con l'Esempio 2.6.8 possiamo dunque concludere che K è compatto (essendo $G(x, y)$ un nucleo debolmente singolare dato che $N - 2 < N = \dim(\Omega)$). Si osservi anche che $N(K) = \{0\}$, dato che $Kf = 0$ implica che la soluzione del problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson (con f al secondo membro) è identicamente nulla e quindi anche $f = -\Delta u \equiv 0$.

Infine, abbiamo che, se $x_0 \in \Omega$ è un punto di massimo (positivo) per u in Ω , allora $\Delta u(x_0) \leq 0$ e quindi $\lambda > 0$ dalla (7.36), dato anche che $\lambda = 0$ non può essere un autovalore.

Osserviamo che u è un'*autofunzione* di (7.36) se e solo se

$$u(x) = \lambda \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy = \lambda Ku(x),$$

e cioè se e solo se λ^{-1} ed u sono rispettivamente un autovalore ed un'auto-vettore di K .

Possiamo concludere, con il Teorema 2.9.1, che il problema (7.36) ha un'infinità numerabile di autofunzioni corrispondenti ai valori λ_n tali che λ_n^{-1} è un autovalore di K e $0 < \lambda_n^{-1} \leq \|K\|$, $n = 1, 2, \dots$.

Possiamo ordinare la successione $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in modo crescente:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots;$$

in questa successione, ogni autovalore si ripete (con indice diverso) un numero di volte pari alla sua molteplicità. Sappiamo che ogni autovalore distinto (di K e quindi di u) si può ripetere solo un numero finito di volte.

Dato che gli autovalori di K si accumulano solo in 0, possiamo concludere che

$$\lambda_n \rightarrow +\infty \quad \text{se} \quad n \rightarrow +\infty.$$

Inoltre, poiché $\|K\| = \sup\{(Kf, f) : \|f\| = 1\}$ è un elemento dello spettro di K , abbiamo che $\lambda_1 = \|K\|^{-1}$.

Il Teorema 2.9.3 inoltre asserisce che le autofunzioni u_n di (7.36), opportunamente normalizzate, formano un sistema ortonormale completo in $L^2(\Omega)$ e quindi ogni funzione $f \in L^2(\Omega)$ si potrà identificare (in $L^2(\Omega)$!) con la serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}(n) u_n(x),$$

dove

$$\hat{f}(n) = \int_{\Omega} f(y) u_n(y) dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Consideriamo ora il problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega.$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione per u_n ed integrando su Ω , risulta:

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= - \int_{\Omega} (\Delta u) u_n dy = \int_{\Omega} \operatorname{div} \{u \nabla u_n - u_n \nabla u\} dy - \int_{\Omega} (\Delta u_n) u dy = \\ &= \int_{\partial\Omega} \operatorname{div} \left\{ u \frac{\partial u_n}{\partial \nu} - u_n \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} dS_y + \lambda_n \int_{\Omega} u u_n dy = \lambda_n \hat{u}(n), \end{aligned}$$

dato che sia u che u_n sono nulle su $\partial\Omega$ ed u_n soddisfa (7.36). Dunque otteniamo la seguente formula:

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-1} \hat{f}(n) u_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Ricordandosi la definizione di \hat{f}_n , possiamo scrivere la seguente decomposizione spettrale per la funzione di Green:

$$G(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-1} u_n(x) u_n(y), \quad x, y \in \Omega, \quad x \neq y.$$

Abbiamo osservato (Teorema 7.4.2) che, una volta nota G , la soluzione del problema

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = \varphi \quad \text{su } \partial\Omega,$$

si può scrivere con la formula (7.11). Perciò potremo scrivere anche una decomposizione spettrale per il nucleo di Poisson in Ω :

$$P(x, y) = - \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) = - \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{-1} u_n(x) \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(y), \quad x \in \Omega, \quad y \in \partial\Omega.$$

Con gli stessi ragionamenti, possiamo risolvere il seguente problema per l'equazione del calore:

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), \quad u = \varphi \quad \text{su } \Omega \times \{0\}, \quad u = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Infatti, si ha:

$$\widehat{u}_t(n, t) = \int_{\Omega} u_t(y, t) u_n(y) dy = \int_{\Omega} \Delta u(y, t) u_n(y) dy = \lambda_n \widehat{u}(n, t),$$

e quindi

$$\widehat{u}(n, t) = \widehat{u}(n, 0) e^{-\lambda_n t}, \quad t > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

D'altra parte

$$\widehat{\phi}(n) = \int_{\Omega} u(y, 0) u_n(y) dy = \widehat{u}(n, 0)$$

e dunque

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\phi}(n) u_n(x) e^{-\lambda_n t}, \quad x \in \Omega \times (0, \infty).$$

Analogamente possiamo risolvere il seguente problema per l'equazione delle onde:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta u \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty), & u &= 0 \quad \text{su } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u &= \varphi \quad \text{su } \Omega \times \{0\}, & u_t &= \psi \quad \text{su } \Omega \times \{0\}. \end{aligned}$$

Risulta infatti che

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\widehat{\phi}(n) \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + \frac{\widehat{\psi}(n)}{\sqrt{\lambda_n}} \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right] u_n(x)$$

per $(x, t) \in \Omega \times (0, \infty)$.

7.9. Il principio di Rayleigh

In questo paragrafo, ogni dominio considerato è un *dominio normale*, ossia un aperto connesso con chiusura compatta e frontiera di classe C^2 a tratti.

Siano $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ gli autovalori di (7.36), ordinati in modo crescente; si intende che ogni autovalore viene ripetuto secondo la sua molteplicità.

Il *quoziente di Rayleigh*

$$(7.37) \quad R(v, \Omega) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx}{\int_{\Omega} v^2 dx}$$

si può definire per ogni funzione $v \in H^1(\Omega)$. Si noti che, se $v \in C_0^2(\Omega)$, allora

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = - \int_{\Omega} \Delta v v dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{v}(n) \int_{\Omega} \Delta v u_n dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \widehat{v}(n)^2$$

ed inoltre

$$\int_{\Omega} v^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{v}(n)^2.$$

Perciò

$$R(v, \Omega) = \frac{\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \widehat{v}(n)^2}{\sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{v}(n)^2} \geq \lambda_1.$$

D'altra parte, se $v \in H_0^1(\Omega)$ esiste $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C_0^2(\Omega)$ tale che $v_k \rightarrow v$ in $H_0^1(\Omega)$ se $k \rightarrow \infty$ e quindi

$$R(v, \Omega) \geq \lambda_1 \quad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega).$$

È chiaro inoltre che $R(u_1) = \lambda_1$ e dunque

$$(7.38) \quad \lambda_1 = \min\{R(v, \Omega) : v \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Abbiamo dimostrato la *disuguaglianza di Poincaré*:

$$(7.39) \quad \int_{\Omega} v^2 dx \leq \lambda_1^{-1} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Se poi $v \in C_0^2(\Omega)$ è tale che

$$(7.40) \quad \int_{\Omega} v u_1 dx = \int_{\Omega} v u_2 dx = \dots = \int_{\Omega} v u_{n-1} dx = 0,$$

allora

$$a_k = - \int_{\Omega} \Delta v u_k dx = - \int_{\Omega} \Delta u_k v dx = \lambda_k \int_{\Omega} v u_k dx = 0$$

per $k = 1, \dots, n-1$, e quindi

$$R(v, \Omega) = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \widehat{v}(k)^2}{\sum_{k=n}^{\infty} \widehat{v}(k)^2} \geq \lambda_n.$$

Procedendo come prima otteniamo che $R(v, \Omega) \geq \lambda_n$ per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ che soddisfa (7.40) e, poiché $R(u_n) = \lambda_n$, otteniamo il principio variazionale:

$$(7.41) \quad \lambda_n = \min\{R(v, \Omega) : v \in H_0^1(\Omega) \text{ che soddisfa (7.40)}\}.$$

Viceversa, le soluzioni di (7.36) sono caratterizzate dai problemi variazionali (7.38) e (7.41). Infatti, se u è una soluzione abbastanza regolare del problema (7.38), allora, presa $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta che $R(u + t\varphi) \geq R(u)$ e dunque

$$\frac{dR}{dt} = 0 \quad \text{se } t = 0.$$

Perciò

$$(7.42) \quad \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) \varphi dx = 0,$$

dove $\lambda = R(u)$. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dR}{dt}(u) &= \frac{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx}{\int_{\Omega} u^2 \, dx} - \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\left[\int_{\Omega} u^2 \, dx\right]^2} \int_{\Omega} u \varphi \, dx = \\ &= \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx\right)^{-1} \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda u \varphi] \, dx = \\ &= - \left(\int_{\Omega} u^2 \, dx\right)^{-1} \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

dopo un'integrazione per parti.

Perciò risulta che u soddisfa (7.36), dato che (7.42) vale per ogni $\varphi \in C_0^2(\Omega)$.

Nel caso del problema (7.41), si deve scegliere $\psi \in C_0^2(\Omega)$ in modo che soddisfi (7.40): si otterrà allora che u soddisfa (7.42) per ogni tale ψ . D'altra parte, presa una qualsiasi $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ e posto $\psi = \varphi - \sum_{k=1}^{n-1} \widehat{\varphi}(k) u_k$, si ha che $\psi \in C_0^2(\Omega)$ e soddisfa (7.40); quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) \psi \, dx = \\ &= \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) \varphi \, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \widehat{\psi}(k) \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) u_k \, dx = \\ &= \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) \varphi \, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \widehat{\psi}_k (\lambda - \lambda_k) \int_{\Omega} u u_k \, dx = \\ &= \int_{\Omega} (\Delta u + \lambda u) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

e dunque u soddisfa (7.42) per ogni $\varphi \in C_0^2(\Omega)$ e quindi anche (7.36).

Abbiamo perciò dimostrato il seguente risultato.

Teorema 7.9.1 (Principio di Rayleigh). *Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ gli autovalori del problema (7.36), con ogni autovalore ripetuto secondo la sua molteplicità.*

Allora vale la (7.38) ed il minimo è assunto se e solo se v soddisfa (7.36) con $\lambda = \lambda_1$.

Se $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una base ortonormale di $L^2(\Omega)$ tale che u_n soddisfa (7.36) con $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, allora vale la (7.41) ed il minimo è assunto se e solo se v soddisfa (7.36) con $\lambda = \lambda_n$.

Nelle applicazioni (soprattutto numeriche) è però conveniente avere una caratterizzazione dell'ennesimo autovalore λ_n che non dipenda dalle autofunzioni u_1, \dots, u_{n-1} precedenti. Ciò si può ottenere nel modo seguente.

Teorema 7.9.2 (Proprietà di min-max). *Siano $v_1, \dots, v_{n-1} \in H^1(\Omega)$ e sia*

$$\Lambda_\Omega(v_1, \dots, v_{n-1}) = \inf \left\{ R(v, \Omega) : v \in H_0^1(\Omega) \cap \text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}^\perp \right\}.$$

Allora

$$(7.43) \quad \lambda_n = \sup \{ \Lambda_\Omega(v_1, \dots, v_{n-1}) : v_1, \dots, v_{n-1} \in H^1(\Omega) \}.$$

Dim. È chiaro che, se $v_k = u_k$, $k = 1, \dots, n-1$, allora (7.41) implica che $\lambda_n = \Lambda_n(v_1, \dots, v_{n-1})$. È chiaro anche che $\lambda_n = \Lambda_n(v_1, \dots, v_{n-1})$ se $\text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, dato che

$$\begin{aligned} \Lambda_\Omega(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \inf \left\{ R(v, \Omega) : v \in H_0^1(\Omega) \cap \text{span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\}^\perp \right\} = \\ &= \inf \left\{ R(v, \Omega) : v \in H_0^1(\Omega) \cap \text{span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp \right\} = \lambda_n. \end{aligned}$$

Nel caso in cui invece v_1, \dots, v_{n-1} non generassero tutto lo spazio generato da u_1, \dots, u_{n-1} , esisterà un vettore generato da u_1, \dots, u_{n-1} che non è generato da v_1, \dots, v_{n-1} , cioè sarà possibile trovare $n-1$ costanti non tutte nulle, c_1, \dots, c_{n-1} , tali che la funzione $u = \sum_{k=1}^{n-1} c_k u_k$ soddisfi (7.40) con u_k rimpiazzata da v_k , $k = 1, \dots, n-1$. Perciò avremo che

$$R(u) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k^2}{\sum_{k=1}^{n-1} c_k^2} \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$$

e quindi $\Lambda_\Omega(v_1, \dots, v_{n-1}) \leq R(u) \leq \lambda_n$. □

7.10. Domini nodali e teorema di Courant

In questo paragrafo svilupperemo alcune conseguenze dei teoremi dimostrati nel paragrafo precedente.

Teorema 7.10.1 (Monotonia degli autovalori rispetto al dominio). *Siano $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ domini a due a due disgiunti contenuti in Ω .*

Si consideri il problema (7.36) in ogni dominio Ω_ℓ , $\ell = 1, \dots, m$, e si ordinino tutti gli autovalori trovati per i domini $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ in una successione crescente $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$, con ogni autovalore ripetuto secondo

la sua molteplicità. Siano poi $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$ gli autovalori di (7.36) in Ω .

Allora $\lambda_n \leq \mu_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Dim. Siano u_1, \dots, u_{n-1} le autofunzioni corrispondenti a $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, rispettivamente, e sia $w_j : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, definita uguale ad una autofunzione funzione corrispondente a μ_j , quando ristretta al sottodominio Ω_ℓ appropriato, e nulla altrimenti. La combinazione lineare $v = \sum_{j=1}^n c_j w_j$ appartiene a $H_0^1(\Omega)$ e possiamo scegliere le costanti c_j non tutte nulle in modo che valga (7.40) ($n - 1$ equazioni ed n incognite).

Dato che

$$\int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_k dx = - \int_{\Omega} w_j \Delta w_k dx = \mu_j \delta_{jk} \int_{\Omega} w_j w_k dx,$$

si ha che

$$R(v, \Omega) = \frac{\sum_{j,k=1}^n c_j c_k \int_{\Omega} \nabla w_j \cdot \nabla w_k dx}{\sum_{j,k=1}^n c_j c_k \int_{\Omega} w_j w_k dx} = \frac{\sum_{j=1}^n c_j^2 \mu_j \int_{\Omega} w_j^2 dx}{\sum_{j=1}^n c_j^2 \int_{\Omega} w_j^2 dx} \leq \mu_n.$$

La conclusione segue allora dal Teorema 7.9.1. \square

Corollario 7.10.2. Siano Ω e Ω' due domini tali che $\Omega' \subset \Omega$ e siano λ'_n e λ_n , $n \in \mathbb{N}$, gli autovalori del problema (7.36) in Ω' e Ω , rispettivamente, ordinati come nel Teorema 7.10.1.

Allora $\lambda_n \leq \lambda'_n$, $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $\lambda_n < \lambda'_n$, $n \in \mathbb{N}$, se $\Omega \setminus \overline{\Omega'} \neq \emptyset$.

Dim. La disuguaglianza segue scegliendo $m = 1$ ed $\Omega_1 = \Omega'$.

Se fosse $\lambda_n = \lambda'_n$, allora la funzione v costruita nella dimostrazione del Teorema 7.10.1 (corrispondente a $\mu_n = \lambda'_n$), per il Teorema 7.9.1, sarebbe soluzione del problema (7.36) in Ω , dato che $\lambda_n \leq R(v, \Omega) \leq \lambda'_n = \lambda_n$.

Se $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$ è aperto, ciò non può accadere. Infatti, presa un pallina B con intersezione non vuota con $\Omega \setminus \overline{\Omega'}$ e tale che $v \leq 0$ su B , si avrebbe $\Delta v = -\lambda_n v \geq 0$ in B e quindi, per il principio di massimo forte (Teorema 6.3.1), si avrebbe che $v < 0$ in B contro il fatto che $v \equiv 0$ in $B \cap \Omega \setminus \overline{\Omega'}$. \square

L'insieme nodale di una funzione continua u in Ω è l'insieme $\{x \in \Omega : u(x) = 0\}$; un dominio nodale di u è una qualsiasi componente connessa dell'insieme $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$.

Teorema 7.10.3 (Teorema di Courant dei domini nodali). *Siano $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ gli autovalori di (7.36) in Ω , con ogni autovalore ripetuto secondo la sua molteplicità, e sia u_n l'autofunzione corrispondente a λ_n per $n \in \mathbb{N}$.*

Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il numero di domini nodali di u_n non supera n .

Dim. Siano $\Omega_1, \dots, \Omega_n, \Omega_{n+1}, \dots$ domini nodali di u_n e sia Ω' un qualsiasi dominio contenuto in Ω e contenente $\bigcup_{j=1}^n \Omega_j$. Se indichiamo con λ'_n l' n -simo autovalore di (7.36) in Ω' , per il Corollario 7.10.2, segue che $\lambda'_n \geq \lambda_n$.

Definiamo ora le funzioni

$$w_j = \begin{cases} u_n & \text{in } \Omega_j, \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \Omega_j, \end{cases}$$

per $j = 1, \dots, n$, e si consideri la combinazione lineare $v = \sum_{j=1}^n c_j w_j$. Risulta che $v \in H_0^1(\Omega')$ e che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |\nabla v|^2 dx &= \sum_{j=1}^n c_j^2 \int_{\Omega_j} |\nabla u_n|^2 dx = \sum_{j=1}^n c_j^2 \left(- \int_{\Omega_j} u_n \Delta u_n dx \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n c_j^2 \lambda_n \int_{\Omega_j} u_n^2 dx = \lambda_n \int_{\Omega'} v^2 dx. \end{aligned}$$

D'altra parte, fissate $n-1$ funzioni $v_1, \dots, v_{n-1} \in H^1(\Omega')$, possiamo sempre scegliere le costanti c_j non tutte nulle e tali che v soddisfi (7.40).

Per il Teorema 7.9.2 avremo allora che

$$\Lambda_{\Omega'}(v_1, \dots, v_{n-1}) \leq R(v, \Omega') = \lambda_n,$$

e dunque

$$\lambda'_n = \sup\{\Lambda_{\Omega'}(v_1, \dots, v_{n-1}) : v_1, \dots, v_{n-1} \in H^1(\Omega')\} \leq \lambda_n.$$

In definitiva $\lambda_n = \lambda'_n$. Questo contraddice il Corollario 7.10.2 non appena si prenda $\Omega' \subset \Omega$ in modo che $\Omega' \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{\Omega_j}$ sia aperto. \square

Corollario 7.10.4. *Valgono le seguenti asserzioni:*

- (i) *la prima autofunzione u_1 di (7.36) ha segno costante;*
- (ii) *λ_1 è caratterizzato dall'essere l'unico autovalore con un'autofunzione di segno costante;*
- (iii) *la seconda autofunzione u_2 ha esattamente 2 domini nodali;*
- (iv) *il primo autovalore λ_1 ha molteplicità 1.*

Dim. (i) $1 \leq$ numero dei domini nodali di $u_1 \leq 1$.

(ii) Ogni autofunzione diversa da u_1 è a questa ortogonale e quindi deve cambiare di segno, essendo u_1 di segno costante.

(iii) $2 \leq$ numero dei domini nodali di $u_2 \leq 2$ (la prima disuguaglianza segue da (ii)).

(iv) Segue da (ii). □

Corollario 7.10.5. *Se Ω' è un dominio nodale di un'autofunzione corrispondente a qualche autovalore λ , allora λ è il più piccolo autovalore per (7.36) in Ω' .*

Esempio 7.10.6. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < \pi\}$. Autofunzioni (opportunamente normalizzate) ed autovalori di (7.36) in Ω sono

$$u_{n,m}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin(nx) \sin(my), \quad \lambda_{n,m} = n^2 + m^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} = 2 < \lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 5 < \lambda_{2,2} = 8 < \lambda_{1,3} = \lambda_{3,1} = 10 < \\ \lambda_{2,3} = \lambda_{3,2} = 13 < \lambda_{1,4} = \lambda_{4,1} = 17 < \lambda_{3,3} = 18 < \dots \end{aligned}$$

È facile verificare che $u_{1,1} > 0$ e che $u_{1,2}$ o $u_{2,1}$ o ogni combinazione lineare $a u_{1,2} + b u_{2,1}$ con $a^2 + b^2 = 1$ ha esattamente due domini nodali. La quarta autofunzione $u_{2,2}$ ha 4 domini nodali. Una qualsiasi combinazione lineare $a u_{1,3} + b u_{3,1}$ con $a^2 + b^2 = 1$ (cioè una quinta o sesta autofunzione) ha al massimo 4 domini nodali, in accordo con il Teorema 7.10.3.

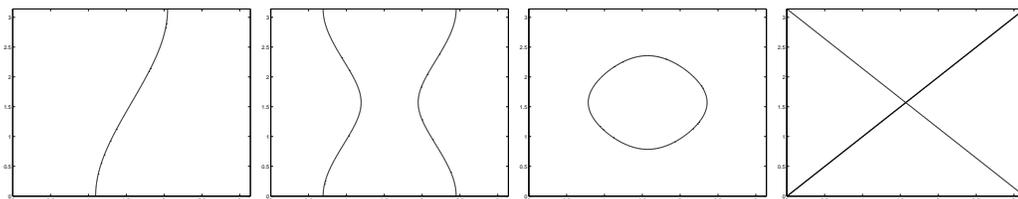


Figura 3. Nell'ordine: linee nodali di $u_{1,2}$ e di $a u_{1,3} + b u_{3,1}$ per 3 scelte di a e b .

Esercizi

1. Dimostrare che, se $N \geq 3$, la funzione u definita nel Teorema 7.1.1 tende a zero all'infinito e quindi è limitata.
2. Determinare la formula di rappresentazione per il problema di Neumann relativo all'equazione di Laplace nel semispazio \mathcal{H} .

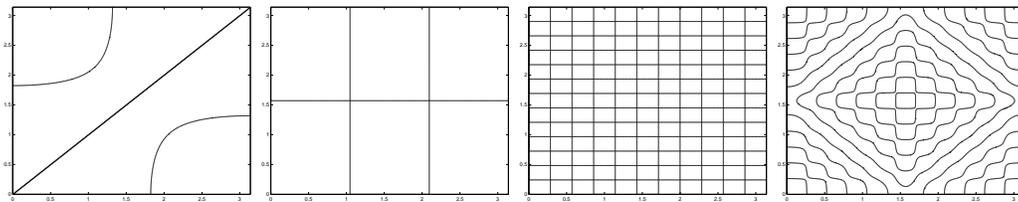


Figura 4. Nell'ordine: linee nodali di $a u_{2,3} + b u_{3,2}$ per 2 scelte di a e b , e di $a u_{11,13} + b u_{13,11}$ per 2 scelte di a e b .

3. Sia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni subarmoniche in un aperto Ω convergenti in Ω ad una funzione u . Dimostrare che u è subarmonica in Ω .
4. Sia $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e crescente; se u è subarmonica in Ω anche $\psi(u)$ è subarmonica in Ω .
5. Se u è subarmonica in Ω anche $|\nabla u|^2$ e $|\nabla u|$ lo sono.
6. (Principio di riflessione di Schwarz). Sia

$$B^+(0, R) = \{x = (x', x_N) \in B(0, R) : x_N > 0\}$$

e sia $u \in C^0(\overline{B^+(0, R)})$ armonica in $B^+(0, R)$ e tale che

$$u = 0 \quad \text{su } \{x \in \partial B^+(0, R) : x_N = 0\}.$$

Sia $v : \overline{B(0, R)} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$v(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \text{se } x_N \geq 0, \\ -u(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0. \end{cases}$$

Dimostrare che v è armonica in $B(0, R)$.

Complementi

In questo Appendice riportiamo alcuni teoremi e lemmi utilizzati in queste dispense.

A.1. Teorema di copertura di Vitali

Una famiglia \mathcal{F} di quadrati *copre nel senso di Vitali* un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ se, fissati comunque un punto $x \in E$ e un numero $\varepsilon > 0$, esiste un dominio quadrato $Q \in \mathcal{F}$ con diametro minore di ε e $x \in Q$.

Teorema A.1.1. *Sia \mathcal{F} una famiglia di domini quadrati che copre nel senso di Vitali un insieme misurabile e limitato $E \subset \mathbb{R}^N$.*

Allora esiste in \mathcal{F} un numero finito o una infinità numerabile di domini quadrati Q_1, \dots, Q_n, \dots a due a due privi di punti interni a comune e tali che

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n\right) = 0.$$

Dim. Senza alterare la generalità della dimostrazione si può supporre che i quadrati in \mathcal{F} siano contenuti in un dominio rettangolare R .

Sia $Q_1 \in \mathcal{F}$; se $m(I \setminus Q_1) = 0$, il teorema è provato.

In caso diverso indichiamo con \mathcal{F}_1 i quadrati di \mathcal{F} che non hanno punti interni in comune con Q_1 e con l_1 l'estremo superiore dei loro lati. Esiste quindi $Q_2 \in \mathcal{F}_1$ con lato maggiore di $l_1/2$. Se $m(I \setminus (Q_1 \cup Q_2)) = 0$, il teorema è provato; in caso diverso non è vuota la famiglia \mathcal{F}_2 di quadrati in \mathcal{F}_1 non aventi punti interni in comune con Q_2 e risulta definito l'estremo superiore l_2 dei lati dei quadrati in \mathcal{F}_2 . Così procedendo risultano definite le famiglie \mathcal{F}_n e i quadrati Q_{n+1} di lato maggiore ad $l_n/2$.

Se il procedimento descritto ha termine, il teorema è provato; diversamente risulta definita una successione di quadrati $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{F} , a due a due privi di punti interni in comune; indicato con λ_n il lato di Q_n risulta che $2\lambda_{n+1} > l_n$. Risulta inoltre che

$$(A.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^N = \sum_{n=1}^{\infty} m(Q_n) \leq m(R)$$

e quindi

$$(A.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Ora, posto

$$(A.3) \quad F = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

supponiamo per assurdo $m(F) > 0$.

Sia Q_n^* un quadrato con lo stesso centro di Q_n , con facce parallele a quelle corrispondenti di Q_n e con lato $(4N+1)\lambda_n$. Per la (A.1) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} m(Q_n^*)$ converge e quindi esiste un indice ν tale che

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} m(Q_n^*) < m(F) \quad \text{e quindi tale che} \quad m\left(F \setminus \bigcup_{n=\nu+1}^{\infty} Q_n^*\right) > 0.$$

Sia

$$x \in F \setminus \bigcup_{n=\nu+1}^{\infty} Q_n^*.$$

Siccome per la (A.3) x non appartiene ad alcuno dei Q_1, \dots, Q_n , esiste $Q \in \mathcal{F}_\nu$ con $x \in Q$. Se $Q \subset \mathcal{F}_n$ il lato λ di Q è minore di l_n e, per la (A.2), Q non può appartenere ad ogni \mathcal{F}_n . Esiste pertanto un $r > \nu$ con $Q \in \mathcal{F}_{r-1}$, $Q \notin \mathcal{F}_r$; quindi $\text{int}(Q) \cap \text{int}(Q_r) \neq \emptyset$.

Per quanto precedentemente osservato, $x \notin Q_n^*$ e, siccome $Q \cap Q_n$ non è vuoto, occorre che il diametro di Q sia maggiore di $2N\lambda_r$, cioè $\sqrt{N}\lambda > 2N\lambda_r$. Poiché $2\lambda_r > l_{r-1}$ e $\lambda < l_{r-1}$, si ha un assurdo. \square

Teorema A.1.2. *Sia \mathcal{F} una famiglia di domini quadrati che ricopre nel senso di Vitali un insieme limitato e misurabile E .*

Allora, in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero finito di quadrati $Q_1, \dots, Q_\nu \in \mathcal{F}$, a due a due privi di punti interni a comune, tali che

$$\sum_{n=1}^{\nu} m(Q_n) - \varepsilon \leq m(E) \leq m\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\nu} Q_n\right)\right) + \varepsilon.$$

Dim. Sia A un aperto tale che

$$E \subset A, \quad m(A) < m(E) + \varepsilon,$$

e sia \mathcal{F}_1 il sottoinsieme di \mathcal{F} dei quadrati Q con $Q \subset A$. Per il teorema precedente esiste una successione $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_1$ di quadrati a due a due privi di punti interni a comune tali che

$$m\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = 0.$$

Siccome $Q_n \subset A$, si ha

$$(A.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(Q_n) \leq m(A) \leq m(E) + \varepsilon.$$

Sia ora ν tale che

$$\sum_{n=\nu+1}^{\infty} m(Q_n) < \varepsilon;$$

risulta che

$$m(E) = m\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)\right) \leq m\left(E \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\nu} Q_n\right)\right) + \varepsilon.$$

Tenuto conto anche della (A.4), il teorema è provato. \square

Notiamo infine il seguente corollario del teorema di copertura di Vitali.

Proposizione A.1.3. *Siano E_1, \dots, E_r insiemi misurabili disgiunti.*

Allora, ad ogni E_k si può associare un numero finito di domini quadrati $Q_1^{(k)}, \dots, Q_{\nu_k}^{(k)}$ tali che

$$2 m\left(\bigcup_{j=1}^{\nu_k} Q_j^{(k)} \cap E_k\right) > m(E_k)$$

e i quadrati $Q_j^{(k)}$ sono disgiunti.

A.2. La formula multinomiale

Lemma A.2.1. *Siano a_1, \dots, a_N numeri reali ed n un numero naturale.*

Allora

$$(a_1 + \dots + a_N)^n = \sum_{i_1 + \dots + i_N = n} \frac{n!}{i_1! \dots i_N!} a_1^{i_1} \dots a_N^{i_N} = \sum_{|i|=n} \frac{|i|!}{i!} a^i.$$

Nella seconda sommatoria si intende $i = (i_1, \dots, i_N)$, $|i| = i_1 + \dots + i_N$ e $i! = i_1! \dots i_N!$.

Dim. Dimostriamolo per induzione sul numero N di elementi. Se $N = 1$ la formula è banale. Supponiamo la formula vera per N elementi a_1, \dots, a_N ; risulta allora:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_N + a_{N+1})^n &= [(a_1 + \dots + a_N) + a_{N+1}]^n = \\ &= \sum_{i_{N+1}=1}^n \frac{n!}{i_{N+1}!(n-i_{N+1})!} a_{N+1}^{i_{N+1}} (a_1 + \dots + a_N)^{n-i_{N+1}} = \\ &= \sum_{i_{N+1}=1}^n \frac{n!}{i_{N+1}!(n-i_{N+1})!} a_{N+1}^{i_{N+1}} \left(\sum_{|i|=n-i_{N+1}} \frac{(n-i_{N+1})!}{i_1! \dots i_N!} a_1^{i_1} \dots a_N^{i_N} \right) = \\ &= \sum_{|i|+i_{N+1}=n} \frac{n!}{i_1! \dots i_{N+1}!} a_1^{i_1} \dots a_{N+1}^{i_{N+1}}, \end{aligned}$$

dove si è usato l'abbreviazione $|i| = i_1 + \dots + i_N$. \square

A.3. Formula di Taylor in \mathbb{R}^N

Lemma A.3.1. *Sia u una funzione di classe C^n in un intorno di $x \in \mathbb{R}^N$ e sia $h \in \mathbb{R}^N$.*

Allora esiste $\theta \in (0, 1)$ tale che

$$u(x+h) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x)}{\alpha!} h^\alpha + \sum_{|\alpha|=n} \frac{D^\alpha u(x+\theta h)}{\alpha!} h^\alpha.$$

Dim. Sia $\varphi(t) = u(x+th)$ per $t \in \mathbb{R}$ abbastanza piccolo. La formula di Taylor con il resto di Lagrange per $\varphi(1)$ in $t=0$ si scrive:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(n)}(\theta)}{n!}.$$

Si tratta ora di calcolare la derivata $\varphi^{(k)}$. Possiamo farlo elegantemente sfruttando la formula multinomiale ed osservando che, formalmente, la derivazione rispetto alla variabile x_j corrisponde, tramite la trasformata di Fourier, al prodotto per il monomio $2\pi i \xi_j$. Dato che

$$\mathcal{F}\{u(\cdot+th)\} = e^{2\pi i \xi \cdot h} \mathcal{F}\{u\},$$

si ha che

$$D_t^k \mathcal{F}\{u(\cdot+th)\} = (2\pi i \xi \cdot h)^k e^{2\pi i \xi \cdot h} \mathcal{F}\{u\} = \sum_{|\alpha|=n} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} (2\pi i \xi)^\alpha h^\alpha \mathcal{F}\{u(\cdot+th)\}$$

e quindi che

$$\frac{\varphi^{(k)}(t)}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha u(x+th)}{\alpha!} h^\alpha.$$

È quello che ci bastava per concludere. \square

A.4. Lemma di Du Bois-Reymond

Il seguente Lemma, che in un primo momento U. Dini ha attribuito a Weierstrass ed in seguito a Du Bois-Reymond, passa sotto il nome di *secondo teorema della media*.

Lemma A.4.1. (Du Bois-Reymond). *Sia $[a, b]$ un intervallo e siano ϕ continua in $[a, b]$ e ψ monotona in $[a, b]$.*

Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che

$$\int_a^b \psi(x)\phi(x) dx = \psi(b^-) \int_c^b \phi(x) dx + \psi(a^+) \int_a^c \phi(x) dx.$$

Dim. Per fissare le idee supponiamo che ψ cresca. Cambiando ψ con $\psi - \psi(a^+)$, si può supporre inoltre che ψ sia non negativa e che $\psi(a^+) = 0$. Poniamo $\Phi(x) = \int_a^x \phi(t) dt$ — una primitiva di ϕ .

Fissato $n \in \mathbb{N}$, sia $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partizione dell'intervallo $[a, b]$ e siano definiti i due numeri:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n \phi_k \psi_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \quad \text{e} \quad \Phi_n = \sum_{k=1}^n \phi_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

dove ϕ_k e ψ_k , $k = 1, \dots, n$ sono numeri. Posto $\psi_0 = 0$, risulta:

$$\begin{aligned} \Phi_n \cdot \psi_n &= \sum_{k=1}^n (\Phi_k \psi_k - \Phi_{k-1} \psi_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n [(\Phi_k - \Phi_{k-1}) \psi_k + \Phi_{k-1} (\psi_k - \psi_{k-1})] = \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_k \psi_k \cdot (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1} (\psi_k - \psi_{k-1}) = \\ &= \sigma_n + \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1} (\psi_k - \psi_{k-1}). \end{aligned}$$

Da questa formula, scegliendo $\phi_k = \max\{\phi(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, otteniamo:

$$(A.5) \quad \sigma_n = \psi_n \cdot S(\phi, P) - \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1} (\psi_k - \psi_{k-1}),$$

dove $S(\phi, P)$ indica la somma di Riemann superiore per ϕ relativa alla partizione P . Se poniamo

$$\psi_k = \begin{cases} \psi(x_k) & \text{se } \phi_k \geq 0, \\ \psi(x_{k-1}) & \text{se } \phi_k < 0, \end{cases}$$

per la definizione di σ_n , risulterà:

$$S(\phi \psi, P) \leq \sigma_n$$

e quindi, per la definizione di integrale di Riemann e per la (A.5), abbiamo:

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x) dx \leq S(\phi \psi, P) \leq \psi_n \cdot S(\phi, P) - \sum_{k=1}^n \Phi_{k-1}(\psi_k - \psi_{k-1}).$$

Osservando che $\psi_k - \psi_{k-1} \geq 0$ per ogni k , possiamo dire ancora che

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi(x)\psi(x) dx &\leq \psi_n \cdot S(\phi, P) - m \sum_{k=1}^n (\psi_k - \psi_{k-1}) = \\ &\psi_n \cdot S(\phi, P) - m(\psi_n - \psi_0) == \psi_n \cdot [S(\phi, P) - m], \end{aligned}$$

dove m è il minimo di $\Phi(x)$ in $[a, b]$. Da questa, passando all'estremo inferiore al variare di P ed osservando che comunque $\psi_n \leq \psi(b^+)$, otteniamo:

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x) dx \leq \psi(b^+) \left[\int_a^b \phi(x) dx - m \right].$$

In maniera analoga, otterremo:

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x) dx \geq \psi(b^+) \left[\int_a^b \phi(x) dx - M \right],$$

dove M è il massimo di $\Phi(x)$ in $[a, b]$.

Dalle due ultime disuguaglianze, si capisce che il numero

$$\int_a^b \phi(x) dx - \frac{1}{\psi(b^+)} \int_a^b \phi(x)\psi(x) dx$$

è un valore della funzione continua Φ ; esiste cioè un $c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x) dx = \psi(b^+) \left[\int_a^b \phi(x) dx - \Phi(c) \right]$$

e quindi facilmente si ottiene la tesi. □

A.5. Il teorema di Gauss della divergenza

In questo paragrafo supporremo che Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^N con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^1 . Con $\nu(x)$ indicheremo il versore della normale in $x \in \partial\Omega$ a $\partial\Omega$ esterna ad Ω .

Premettiamo senza dimostrazione il seguente teorema.

Teorema A.5.1. (Teorema della divergenza). *Sia $u \in C^1(\overline{\Omega})$; allora*

$$(A.6) \quad \int_{\Omega} u_{x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u \nu_j dS_x, \quad j = 1, \dots, N.$$

Applicando questo teorema alla funzione uv , si ottiene facilmente il

Teorema A.5.2. (Integrazione per parti). *Siano $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$; allora*

$$(A.7) \quad \int_{\Omega} u_{x_j} v dx = - \int_{\Omega} u v_{x_j} dx + \int_{\partial\Omega} uv \nu_j dS_x, \quad j = 1, \dots, N.$$

Teorema A.5.3. (Formula di Green). *Siano $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$; allora:*

$$(A.8) \quad \int_{\Omega} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_x;$$

$$(A.9) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = - \int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} dS_x;$$

$$(A.10) \quad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right\} dS_x.$$

Dim. La (A.8) segue dalla (A.6), sostituendo a u la funzione u_{x_j} e sommando sull'indice j .

Scegliendo $v = v_{x_j}$ in (A.7) e sommando sull'indice j , si ottiene (A.9).

Infine, (A.10) si ottiene da (A.9), scambiando i ruoli di u e v e poi sottraendo membro a membro. \square

Bibliografia

- [Ad] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).
- [Ah] L.V. Ahlfors, Complex analysis : an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [AW] J.F. Alm & J.S. Walker, Time-frequency analysis of musical instruments, SIAM Review 44 (2002), 457–476.
- [Al] A.D. Aleksandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large V, Vestnik Leningrad Univ. 13, no. 19 (1958), 5–8. (Traduzione inglese: Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, 21 (1962), 412–415).
- [Ch] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [Br] H. Brezis, Analisi Funzionale, Liguori Editore, Napoli, 1986.
- [Di] U. Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, UMI, Bologna, 1990.
- [Du] J. Duoandikoetxea, Fourier Analysis, AMS, Providence, RI (USA), 2001.
- [Ev] L.C. Evans, Partial differential equations, AMS, Providence, RI (USA), 1998.
- [Ga] P. R. Garabedian, Partial Differential Equations, Second edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (USA), 1986.
- [GM] S.S. Gelbart & S.D. Miller, Riemann zeta function and beyond, Bull. AMS 41, no. 1 (2004), 59-112.
- [GT] D. Gilbarg & N.S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Second edition, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [Ha] G. H. Hardy, Divergent Series, Second edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI (USA), 1991.
- [Ke] O.D. Kellogg, Foundations of Potential Theory, Dover, New York 1953.
- [LL] E.H. Lieb & M. Loss, Analysis, Second edition, AMS, Providence, RI (USA), 2001.
- [MZ] J. Malý & W.P. Ziemer, Fine Regularity Properties of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence R.I. (1997).
- [Ne] Z. Nehari, Conformal mapping, Dover, New York, 1975.

- [PW] M. Protter & H. Weinberger, Maximum Principles in Differential Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1967.
- [Pu] C. Pucci, Istituzioni di Analisi Superiore, dispense.
- [Ra] J. Rauch, Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Ru] W. Rudin, Analisi Reale e Complessa, Boringhieri.
- [We] H. Weyl, The method of orthogonal projections in potential theory, Duke Math. J. 7 (1940), 411-444.
- [Zy] A. Zygmund, Trigonometric Series, Second edition, Cambridge University Press, London-New York 1968.

Indice analitico

- Autofunzione, 164
- Autovalore, 43, 164
- Autovettore, 43

- Baire, 29
- Banach-Alaoglu, 26
- Banach-Steinhaus, 29
- Base
 - hilbertiana, 22
- Bessel, 21, 64, 74

- Cantor, 13
- Cesàro, 66
- Classe
 - di Schwartz, 78
- Coefficiente
 - di Fourier, 21, 59
- Convergenza
 - debole, 97
 - di distribuzioni, 94
 - di funzioni test, 94
 - secondo Cesàro, 66
- Correttore, 141
- Courant, 170
- Criterio
 - del Dini, 62
 - di compattezza, 124
 - di Jordan, 63

- Decomposizione
 - di Jordan, 2
 - spettrale di un operatore simmetrico compatto, 47
- Derivata
 - distribuzionale, 96
 - distribuzionale di una funzione, 97

- Dini, 3, 62
- Dirichlet, 60, 84, 135, 152
- Distribuzione, 94
 - temperata, 110
- Disuguaglianza
 - di Bessel, 21, 64
 - di Cauchy-Schwarz, 17
 - di Harnack, 121
 - di Poincaré, 167
 - di Young, 58
- Dominio
 - nodale, 170

- Equazione
 - di Bessel, 74
 - di Laplace, 115
 - di Poisson, 115
- Eulero, 86

- Fejér, 66, 85
- Formula
 - di addizione di Poisson, 88
 - di inversione, 83
 - di Poisson, 143, 145
 - di rappresentazione, 141
- Fourier, 21, 59, 77, 111
- Fredholm, 41
- Fubini, 6
- Funzionale
 - lineare, 25
- Funzione
 - a variazione limitata, 1
 - armonica, 115
 - assolutamente continua, 7
 - barriera, 149
 - di Bessel, 74

- di Cantor, 13
- di Green, 141, 151
- di Heaviside, 96
- di Neumann, 142
- di Robin, 141
- di Green, 144
- gamma di Eulero, 86
- lipschitziana, 1
- localmente sommabile, 94
- ovunque non derivabile, 13
- subarmonica, 117, 146
- superarmonica, 118, 146
- test, 94
- theta di Jacobi, 89
- zeta di Riemann, 89

- Gauss, 85
- Gibbs, 67
- Gram-Schmidt, 22
- Green, 140, 141, 144, 151

- Harnack, 121
- Hilbert, 18
- Hopf, 119

- Identità
 - del parallelogramma, 17
 - di Eulero, 59
 - di Green, 140
 - di Parseval, 23, 65
 - di Plancherel, 81
 - di Stokes, 140
- Insieme
 - nodale, 170
 - risolvente, 43
- Inversione
 - per raggi reciproci, 144
- Ipotesi
 - di Riemann, 90

- Jacobi, 89
- Jordan, 2, 60, 63

- Kelvin, 137

- Laplace, 115
- Lax, 97
- Lax-Milgram, 34
- Lebesgue, 5, 61
- Lemma
 - di Baire, 29
 - di Hopf, 119
 - di Riemann-Lebesgue, 61, 77
 - di Weyl, 156
- Liouville, 122

- Metodo
 - di Perron, 148
- Molteplicità
 - di un autovalore, 43
- Monotonia
 - degli autovalori, 169
- Multi-indice, 78

- Neumann, 135
- Norma
 - di un operatore, 25
- Nucleo
 - di Dirichlet, 60, 84
 - di Fejér, 66, 85
 - di Gauss-Weierstrass, 85
 - di Poisson, 67, 85
 - di sommabilità, 84
- Numeri
 - derivati del Dini, 3

- Operatore
 - aggiunto, 28
 - autoaggiunto, 29
 - compatto, 35
 - continuo, 24
 - di Laplace, 115
 - di rango finito, 35
 - di troncamento, 84
 - integrale compatto, 36
 - integrale debolmente singolare, 38
 - limitato, 24
 - lineare, 24
 - simmetrico, 29
- Ordine
 - di una distribuzione, 95
- Ortonormalizzazione
 - di Gram-Schmidt, 22

- Parseval, 23, 65
- Parte singolare
 - di una funzione a variazione limitata, 13
- Picard, 32
- Plancherel, 81
- Poincaré, 167
- Poisson, 67, 85, 88, 115, 122, 135, 143, 145
- Polinomio
 - trigonometrico, 58
- Potenziale
 - di doppio strato, 158
 - di strato semplice, 158
- Principio
 - del massimo, 118
 - di Dirichlet, 152
 - di localizzazione di Riemann, 61
 - di Rayleigh, 168
- Problema
 - di Dirichlet, 135
 - di Neumann, 135

- di Robin, 135
- Prodotto
 - di convoluzione, 58
 - interno o scalare, 17
- Proprietà
 - del segmento, 150
 - della media, 116
 - della sfera esterna, 150
 - di min-max, 169
- Punto
 - duale, 144
 - eccezionale, 150
 - regolare, 150
- Quoziente
 - di Rayleigh, 166
- Rayleigh, 166
- Riemann, 61, 89, 90
- Riesz, 25
- Robin, 135
- Schwartz, 78
- Separazione
 - delle variabili, 70
- Serie
 - di Fourier, 59
 - di Taylor, 127
- Singularità
 - removibile, 138
- Sistema
 - di Sturm-Liouville, 48
 - ortonormale, 20
 - ortonormale completo, 22
- Sobolev, 97
- Soluzione
 - fondamentale, 132
- Spazio
 - di Hilbert, 18
 - di Sobolev, 97
 - duale, 25
- Spettro
 - di un operatore, 43
 - di un operatore compatto, 45
- Spettro puntuale, 43
- Stampacchia, 32
- Stokes, 140
- Sturm-Liouville, 48
- Successione
 - convergente debolmente, 25
- Supporto
 - di una distribuzione, 103
- Taylor, 127
- Teorema
 - dell'alternativa di Fredholm, 41
 - dell'applicazione aperta, 30
 - della contrazione, 32
 - della proiezione, 18
 - di Banach-Alaoglu, 26
 - di Banach-Steinhaus, 29
 - di Courant, 170
 - di Fubini, 6
 - di Lax-Milgram, 34
 - di Lebesgue, 5
 - di Liouville, 122
 - di rappresentazione di Riesz, 25
 - di Stampacchia, 32
 - di Vitali, 5
 - fondamentale del calcolo, 106
- Toro, 57
- Trasformata
 - di Fourier, 82, 111
 - di una gaussiana, 80
- Trasformazione
 - di Kelvin, 137
- Troasformata
 - di Fourier, 77
- Valore
 - principale, 112
- Variazione
 - negativa, 2
 - positiva, 2
 - totale, 1
- Weierstrass, 85
- Weyl, 156