Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico
$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} + \frac{x}{e}$$
Inoltre − senza far uso di una calcolatrice − stabilire il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$ e determinare − se esiste − un intervallo $[a, b]$, con $b - a < 1$ dove si trovano tali soluzioni.

2. Calcolare il seguente integrale indefinito
$$\int \sqrt{2+3t^2} + \log\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{2}{3}}\right) dt.$$

3. Sia $f \in C^3\big((-1, 1)\big)$ tale che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \sin^2(\sqrt{x}) - e^x}{x^2(\cos(\sqrt{x}) - 1)} = 1.$$
Determinare il polinomio di Taylor di f di grado 3 nell'origine.

4. Sia $g(x) = x^2 \log x$. Dopo aver verificato che, per $x \to 0$, $g(x) = o(x)$, mostrare che, per $x \to 0$
$$\int_0^x g(t)dt = o(x^2).$$
Si consideri, più in generale, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ integrabile, limitata e tale che $f(x) = o(x)$, mostrare che:
$$\lim_{x\to 0} \int_0^x f(t)dt = 0, \quad \text{e che} \quad \int_0^x f(t)dt = o(x^2).$$

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \frac{x+3}{e^x} + e\,x$$

Inoltre − senza far uso di una calcolatrice − stabilire il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$ e determinare − se esiste − un intervallo $[a, b]$, con $b - a < 2$ dove si trovano tali soluzioni.

2. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \sqrt{3+4t^2} + \log\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{4}}\right) dt.$$

3. Sia $f \in C^3\big((-1,1)\big)$ tale che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \sin(x^2) - \cos^2(\sqrt{x})}{x\ln(1+x^2)} = 1.$$

Determinare il polinomio di Taylor di f di grado 3 nell'origine.

4. Sia $g(x) = arctgx^3$. Dopo aver verificato che, per $x \to 0$, $g(x) = o(x^2)$, mostrare che, per $x \to 0$

$$\int_0^x g(t)dt = o(x^3).$$

Si consideri, più in generale, $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ integrabile, limitata e tale che $f(x) = o(x^2)$, mostrare che:

$$\lim_{x\to 0} \int_0^x f(t)dt = 0, \quad \text{e che } \int_0^x f(t)dt = o(x^3).$$

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \frac{x-1}{e^x} + \frac{x}{e^3}$$

Inoltre – senza far uso di una calcolatrice – stabilire il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$ e determinare – se esiste – un intervallo $[a, b]$, con $b - a < 1$ dove si trovano tali soluzioni.

2. Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \sqrt{4 + 5t^2} + \log\left(t + \sqrt{t^2 + \frac{4}{5}}\right) dt.$$

3. Sia $f \in C^3\big((-1, 1)\big)$ tale che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - \sin^2(\sqrt{x}) - \cos x}{x(1 - \cos(x))} = 1.$$

Determinare il polinomio di Taylor di f di grado 3 nell'origine.

4. Sia $g(x) = arctgx^2$. Dopo aver verificato che, per $x \to 0$, $g(x) = o(x)$, mostrare che, per $x \to 0$

$$\int_0^x g(t)dt = o(x^2).$$

Si consideri, più in generale, $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ integrabile, limitata e tale che $f(x) = o(x)$, mostrare che:

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x f(t)dt = 0, \quad \text{e che} \quad \int_0^x f(t)dt = o(x^2).$$

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico
$$f(x) = \frac{1-x}{e^x} - \frac{x}{e^3}$$
Inoltre − senza far uso di una calcolatrice − stabilire il numero di soluzioni reali dell'equazione $f(x) = 0$ e determinare − se esiste − un intervallo $[a, b]$, con $b - a < 1$ dove si trovano tali soluzioni.

2. Calcolare il seguente integrale indefinito
$$\int \sqrt{3+5t^2} + \log\Big(t + \sqrt{t^2 + \frac{3}{5}}\Big) dt.$$

3. Sia $f \in C^3\big((-1,1)\big)$ tale che
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - \cos^2(\sqrt{x}) - \ln(1+x)}{x^2(e^{2x}-1)} = 1.$$
Determinare il polinomio di Taylor di f di grado 3 nell'origine.

4. Sia $g(x) = x^2 \log(1+x)$. Dopo aver verificato che, per $x \to 0$, $g(x) = o(x^2)$, mostrare che, per $x \to 0$
$$\int_0^x g(t)dt = o(x^3).$$
Si consideri, più in generale, $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ integrabile, limitata e tale che $f(x) = o(x^2)$, mostrare che:
$$\lim_{x\to 0} \int_0^x f(t)dt = 0, \quad \text{e che } \int_0^x f(t)dt = o(x^3).$$