

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Si consideri la successione definita da

$$\begin{cases} x_{n+1} = e^{-x_n^2} \\ x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- (a) Si mostri che l'equazione $e^{-x^2} = x$ ha un'unica soluzione X in \mathbb{R} ;
- (b) si discuta la monotonia di $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;
- (c) si determini se $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente.

2. Studiare la seguente funzione (insieme di definizione, asintoti, segno della derivata prima, monotonia) e disegnarne il grafico

$$f(x) = \left(\frac{x}{x-1} \right)^x.$$

3. Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione data da

$$f(x) = x - \frac{1}{6} \sinh^3(x-1) + \frac{1}{8} \sin^4(x-1) + \int_x^1 \cos(\ln t) dt.$$

- (a) Calcolare la retta tangente al grafico nel punto $(1, 1)$;
- (b) determinare l'ordine di infinitesimo di $f(x) - 1$ per $x \rightarrow 1$;
- (c) stabilire se f risulta localmente invertibile in un intorno del punto $x = 1$.

4. Calcolare

$$\int_{-1}^1 x^2 \log x^4,$$

dopo aver preliminarmente discusso l'integrabilità della funzione ed il segno del risultato.