Analisi Matematica II (Prof. Paolo Marcellini)

Università degli Studi di Firenze

Corso di laurea in Matematica

Esercitazione del 28/03/2014

Michela Eleuteri [1]
eleuteri@math.unifi.it
web.math.unifi.it/users/eleuteri

Nel seguito indichiamo con [MS] il testo: P. Marcellini, C. Sbordone : "Esercitazioni di Matematica", 2 volume, parte seconda, Liguori Editore, 1995.

1 Esercizi tratti da temi d'esame di anni precedenti

✍ **Esercizio 1.1.**

TEMA D'ESAME DEL 24 MAGGIO 2002
Sia D il dominio delimitato dalla curva (cardioide) di equazione

$$\begin{array}{l} x(t) = (1+\cos t)\cos t \\ y(t) = (1+\cos t)\sin t \end{array} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2001/index.html

✍ **Esercizio 1.2.**

TEMA D'ESAME DEL 24 MAGGIO 2002
Si consideri la regione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 4x^2(1-x^2)\}.$$

Dopo aver verificato che la curva

$$\gamma(t) = (\sin t, \sin(2t))$$

ha come immagine ∂D, calcolare l'area di D.

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2001/index.html

[1] È vietata la diffusione e la riproduzione di questo materiale o parte di esso (particolarmente a fini commerciali) senza il consenso della sottoscritta. Queste note, che riprendono in parte gli esercizi svolti durante le ore di esercitazioni frontali, costituiscono parte integrante *(ma non esclusiva!)* del corso di Analisi II e pertanto, ai fini dell'esame, devono essere adeguatamente integrate con il materiale indicato dal docente titolare del corso.

✍ **Esercizio 1.3.**

TEMA D'ESAME DEL 11 LUGLIO 2002
Calcolare l'area del sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalla parabola di equazioni $x = y^2$, $x = 3y^2$ e dalle iperboli di equazioni $xy = 1$, $xy = 4$.

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2001/index.html

✍ **Esercizio 1.4.**

TEMA D'ESAME DEL 12 LUGLIO 2004
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{1}{x \log y}\, dx\, dy$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2],\ x \le y \le 2\}.$$

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2003-analisi/index.html

✍ **Esercizio 1.5.**

TEMA D'ESAME DEL 20 SETTEMBRE 2004
Calcolare l'area della regione D formata dai punti (x, y) del piano che soddisfano le seguenti condizioni

$$\begin{cases} \tan \dfrac{\pi\sqrt{x^2+y^2}}{2} \ge \left|\dfrac{y}{x}\right| \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$$

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2003-analisi/index.html

✍ **Esercizio 1.6.**

TEMA D'ESAME DEL 07 GIUGNO 2006
Si consideri il semicerchio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ \ x \le 0\}.$$

(a) Calcolare il baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$ di D:

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\, dx\, dy}{m(D)} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_D y\, dx\, dy}{m(D)}$$

$m(D)$ indica la misura del dominio D.
(b) Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la mappa $T(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$. Calcolare la misura dell'insieme $T(D)$.

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2005-analisi/index.html

✍ **Esercizio 1.7.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 22 MAGGIO 2006</u>
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D y\,dx\,dy$$

esteso al dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2005-analisi/index.html

✍ **Esercizio 1.8.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 01 GIUGNO 2006</u>
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{-3/2}\,dx\,dy$$

esteso al dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1,\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

<u>Hint:</u> Passando a coordinate polari, si descrive il dominio D nel seguente modo:

$$D = \left\{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ \ \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \leq \rho \leq 1\right\}$$

da cui

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 + y^2)^{-3/2}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} \frac{1}{\rho^3}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{\rho}\right]_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}(\sin\theta + \cos\theta - 1)\,d\theta = 2 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.9.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 05 GIUGNO 2008</u>
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D x\,dx\,dy$$

esteso al dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0\}$$

<u>Hint:</u> Passando a coordinate polari, si descrive il dominio D nel seguente modo:

$$D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2,\ \ 1 \leq \rho \leq 2\}$$

da cui

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 [\sin\theta]_0^{\pi/2} = \frac{5}{3}.$$

✍ **Esercizio 1.10.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 23 MAGGIO 2008</u>
Calcolare l'area della regione di piano

$$C = \{(x,y) : y \leq 2 - x^2,\ \ y \geq x\} \cup \{(x,y) : x \leq 2 - y^2,\ \ y \leq x\}.$$

Calcolare inoltre l'integrale

$$\iint_C \frac{y-x}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Per la soluzione vedi la pagina http://lernejo.eu/paolini/didattica/2007/analisi/index.html

✍ **Esercizio 1.11.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 10 LUGLIO 2008</u>
Calcolare gli integrali

$$\iint_D x\,dx\,dy \qquad \iint_D y\,dx\,dy$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 \leq 1,\ \ x \geq 0\}.$$

<u>Hint:</u> Osserviamo che $y^4 \leq x^2 + y^2 \leq 1$, quindi la condizione $x^2 + y^4 \leq 1$ è equivalente a $\sqrt{1-y^4} \leq x \leq \sqrt{1-y^4}$, e questo, unito alla condizione $x \geq 0$ permette di riscrivere D come

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^4}\}.$$

A questo punto

$$\iint_C x\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^4}} x\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-y^4}} = \int_{-1}^1 \frac{1-y^4}{2}\,dy = \frac{4}{5}.$$

D'altra parte

$$\iint_C y\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-y^4}} y\,dx\,dy = \int_{-1}^1 y\sqrt{1-y^4}\,dy = 0$$

perché è l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico.

✍ **Esercizio 1.12.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 23 SETTEMBRE 2008</u>
Calcolare l'area della regione piana

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ \ x^2 + y^2 \leq \arctan\frac{y}{x}\right\}$$

Hint: L'idea è quella di passare in coordinate polari. Osserviamo innanzitutto che la condizione $x > 0$ si traduce in $\rho\cos\theta > 0$ e cioè $0 < \theta < \pi/2$ unito a $3/2\pi < \theta < 2\pi$. Nel primo intervallo si ha ovviamente $\arctan(y/x) = \theta$ mentre nel secondo intervallo $\arctan(y/x) = \theta - 2\pi$ perché per convenzione, la funzione arcotangente è invertibile solo nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. Stando cosí le cose, la regione R si riscrive come $R = R_1 \cup R_2$ dove

$$R_1 = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) : 0 \leq \theta \leq \pi/2, \;\; 0 \leq \rho \leq \sqrt{\theta}\}$$
$$R_2 = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) : 3/2\pi \leq \theta \leq 2\pi, \;\; \rho^2 \leq \theta - 2\pi\}$$

ma la regione R_2 è descritta da una condizione "vuota" perché $\rho \geq 0$ mentre $\theta - 2\pi \leq 0$ nel secondo intervallo, da cui

$$\text{Area}(A) = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\theta}} \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{2} \, d\theta = \frac{\pi^2}{16}.$$

✍ **Esercizio 1.13.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 04 FEBBRAIO 2009</u>
Dimostrare che l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + xy \leq 1\}$$

è limitato. Calcolare poi l'integrale doppio

$$\iint_D x^2 - y^2 \, dx \, dy.$$

Hint: È facile vedere che è limitato, infatti non è restrittivo supporre che $xy \geq 0$, altrimenti si cambia segno a una delle due variabili; a quel punto ci si riduce a dimostrare che $x^4 + y^4 \leq 1$ è limitato, che è vero, perché da questo si deduce $|x| \leq 1, |y| \leq 1$.

Per calcolare l'integrale, osserviamo che

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 + xy = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 + xy \leq 1\}$$

a questo punto poniamo

$$t := x^2 - y^2 \qquad s := \sqrt{2}xy;$$

siccome è difficile calcolare x e y in funzione di t, s semplicemente calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della relazione che esprime le nuove coordinate in funzione delle vecchie (noi dovremmo fare il contrario) e questo viene $2(x^2 - y^2) = 2t$ da cui prendendo il modulo e considerando la formula per il determinante della funzione inversa si ha

$$\iint_D x^2 - y^2 \, dx \, dy = \iint_D t \, \frac{1}{2\sqrt{2}|t|} \, dx \, dy.$$

L'insieme D nelle nuove coordinate viene

$$D = \left\{(t, s) : t^2 + s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} \leq 1\right\}$$

cioè una circonferenza. Per cui tenendo conto del valore assoluto, si ha $D = D_1 \cup D_2$ dove

$$D_1 = \left\{(t,s) : t^2 + s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} \leq 1,\ \ t \geq 0\right\} \qquad D_2 = \left\{(t,s) : t^2 + s^2 + \frac{s}{\sqrt{2}} \leq 1,\ \ t \leq 0\right\}$$

e per simmetria pertanto, visto che l'area di D_1 è uguale all'area di D_2, l'integrale cercato fa 0.

✍ **Esercizio 1.14.**

TEMA D'ESAME DEL 10 MAGGIO 2010
Si consideri l'insieme D di $\mathbb{R}^2$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 2x \leq y + x^2 \leq 1 + x^2\}.$$

(a) Verificare che $D \neq \emptyset$
(b) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{4}{(y+3)^2}\, dx\, dy.$$

Hint: (a) L'origine sta in D

(b) Dalla definizione di D si ricavano immediatamente le limitazioni su x e y, cioè:

$$0 \leq x \leq 1, \qquad 2x - x^2 \leq y \leq 1$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{4}{(y+3)^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{2x-x^2}^1 \frac{4}{(y+3)^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \left[-\frac{4}{y+3}\right]_{2x-x^2}^1 \\
= \ & -1 + \int_0^1 \frac{4}{2x - x^2 + 3}\, dx = -1 - \int_0^1 \frac{4}{(x+1)(x-3)}\, dx = -1 + \int_0^1 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3-x}\, dx \\
= \ & -1 + \left[\log\left|\frac{x+1}{x-3}\right|\right]_0^1 = -1 + \log 3.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.15.**

TEMA D'ESAME DEL 07 GIUGNO 2010
Calcolare per $Q = [0,1]^2$

$$\iint_Q (x-y)\sin(xy)\, dx\, dy.$$

Hint: Con considerazioni di simmetria si vede immediatamente (separando gli integrali e scambiando le variabili) che tale integrale fa 0. Con calcoli espliciti

$$\begin{aligned}
&\iint_Q (x-y)\sin(xy)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^1 x\sin(xy)\, dx\, dy - \int_0^1 \int_0^1 y\sin(xy)\, dx\, dy \\
= \ & \int_0^1 [-\cos(xy)]_0^1\, dx - \int_0^1 [-\cos(xy)]_0^1\, dy = \int_0^1 (1-\cos(x))\, dx - \int_0^1 (1-\cos(y))\, dy \\
= \ & [-\sin x]_0^1 + [\sin y]_0^1 = 0.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.16.**

TEMA D'ESAME DEL 10 LUGLIO 2012
Sia r un numero reale positivo. Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

esteso al cerchio C del piano (x,y) di centro $(0,0)$ e raggio r.

Hint: Come dice il testo dell'esercizio

http://web.math.unifi.it/users/marcellini/didattica/An2_2011-12/
scritti/Analisi_2_appello_3_2012_07_10.pdf

si tratta di un integrale improprio ma il metodo di calcolo non ne risente. Passando dunque a coordinate polari si ha

$$C = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) : 0 \le \rho \le r,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

da cui

$$\iint_C \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 2\pi r.$$

✍ **Esercizio 1.17.**

TEMA D'ESAME DEL 05 SETTEMBRE 2012
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$$

dove T è il triangolo (x,y) di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Hint: PRIMO MODO: usando le formule di riduzione per domini normali. Osserviamo che vedendo

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ \ x \le y \le 1\}$$

si ottiene un integrale non facilmente riconducibile a integrali elementari

$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \log(1+x^2)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \log(2x^2)\,dx$$

quindi conviene interpretare T come

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ \ 0 \le x \le y\}$$

in questo modo si ottiene

$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \int_0^1 y\,dy \int_0^y \frac{1}{x^2+y^2}\,dx = \int_0^1 [\arctan(x/y)]_0^y\,dy$$
$$= \int_0^1 \arctan 1 - \arctan 0\,dy = \frac{\pi}{4}.$$

SECONDO MODO: osserviamo che lo stesso risultato si ottiene passando in coordinate polari; in questo caso

$$T = \left\{ (\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sin\theta}, \ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

e dunque

$$\iint_T \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\sin\theta} \frac{\rho\sin\theta}{\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\sin\theta} \sin\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{\pi}{4}.$$

✍ **Esercizio 1.18.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 17 GENNAIO 2013</u>
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy$$

dove D è il quadrilatero del piano (x, y) di vertici $(\pm 1, 1)$, $(\pm 2, 2)$. Stabilire inoltre il segno del risultato dell'integrale doppio senza far uso di una calcolatrice.

<u>Hint:</u> Osserviamo prima di tutto che la funzione è pari (perché $\sin y$ è dispari e cosí pure y) e il dominio è simmetrico rispetto all'asse y, pertanto l'integrale cercato (chiamiamolo I) è uguale a due volte l'integrale su metà dominio (regolare rispetto all'asse y), cioè

$$I = \iint_D \frac{\sin y}{y}\, dx\, dy = 2\int_1^2 dy \int_0^y \frac{\sin y}{y}\, dx = 2\int_1^2 \sin y\, dy = 2\cos 1 - 2\cos 2.$$

Per determinare il segno dell'integrale basta osservare che $1 < \pi/2 < 2 < \pi$ e dalla monotonia del coseno (decrescenza) in questo intervallo si ha

$$\cos 1 > \cos(\pi/2) = 0 > \cos 2 \cos(\pi) = -1$$

quindi $2\cos 1 - 2\cos 2 > 0$.

✍ **Esercizio 1.19.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 14 FEBBRAIO 2013</u>
Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T \frac{x^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

dove T è il trapezio del piano (x, y) di vertici $(1, \pm 1)$, $(2, \pm 2)$.

<u>Hint:</u> Passando in coordinate polari si ha

$$T = \left\{ (\rho, \theta) : \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta}, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \ \vee \ \frac{7}{4}\pi \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

e per la periodicità delle funzioni trigonometriche questo è equivalente a considerare

$$T = \left\{ (\rho, \theta) : \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\theta}, \ -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Quindi si ottiene

$$\iint_T \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\rho\,d\rho\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta}} d\theta = \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Lo stesso risultato si ottiene usando le formule di riduzione per domini normali, per esempio

$$\iint_T \frac{x^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^2 x^2 \int_{-x}^{x} \frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_1^2 \left[x\arctan\frac{y}{x}\right]_{-x}^{x} dx = 2\frac{\pi}{4}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{4}\pi.$$

2 Esercizi proposti dal testo [MS]

Gli esercizi del testo [MS] sono tutti fortemente consigliati; in particolare si raccomanda di svolgere tutti gli esercizi dei paragrafi 3A, 3B, 3C e 3D, del Capitolo 3 (pag. 161 e segg.)

3 Altri esercizi tratti da temi d'esame di altri corsi di laurea

✍ **Esercizio 3.1.**

Si calcoli l'integrale doppio

$$\int\int_D (x^2+1)\,dx\,dy,$$

ove D è la parte dell'ellisse $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4\,y^2 \le 1\}$ contenuta nel primo quadrante.

Descriviamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \dfrac{1}{2}\,\rho\,\sin\theta \end{cases}$$

con le seguenti limitazioni per le variabili ρ e θ

$$0 \le \rho \le 1 \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Si ha

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}\,\sin\theta & \dfrac{1}{2}\,\rho\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui, portando a primo membro

$$\det J = \frac{1}{2}\,\rho\,\cos^2\theta + \frac{1}{2}\,\rho\,\sin^2\theta = \frac{1}{2}\,\rho.$$

Quindi

$$\int\int_D (x^2+1)\,dx\,dy = \int_0^1 d\,\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\, \frac{1}{2}\,\rho\,(\rho^2\,\cos^2\theta+1) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\,\theta\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^1 \left(\frac{1}{2}\,\theta+\frac{1}{2}\,\sin\theta\cos\theta\right)\bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^1 \theta\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{8} = \frac{5}{32}\,\pi.$$

Come appendice ricordiamo due modi di calcolare la primitiva di $\cos^2\theta$.

PRIMO MODO.

$$\int \cos^2\theta\,d\theta = \int \cos\theta\,\cos\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int \sin^2\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int (1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

da cui

$$2\int \cos^2\theta\,d\theta = \theta + \cos\theta\,\sin\theta.$$

SECONDO MODO.

$$\int \cos^2\theta\,d\theta = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\,d\theta = \frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{2}\int \cos(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\,\theta+\frac{1}{4}\,\sin(2\theta) = \frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{2}\,\sin\theta\,\cos\theta.$$

✍ **Esercizio 3.2.**

Si calcoli l'integrale doppio:

$$\int_E x\,y\,dx\,dy$$

dove E è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ delimitato dalle curve $y=\frac{1}{x},\ y=\frac{2}{x},\ y=\frac{1}{x^2},\ y=\frac{2}{x^2}$, cioè

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<xy<2,\ 1<x^2y<2\}.$$

Si attua il seguente cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} xy = u \\ x^2y = v \end{cases}$$

da cui si ricava che

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{u} \\ y = \dfrac{u^2}{v} \end{cases}$$

quindi la matrice Jacobiana della trasformazione è

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{v}{u^2} & \dfrac{1}{u} \\ \dfrac{2u}{v} & -\dfrac{u^2}{v^2} \end{pmatrix}$$

e pertanto il determinante della trasformazione è $-1/v$ da cui il modulo del determinante è $1/v$. A questo punto, essendo

$$E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2,\ \ 1 < v < 2\},$$

si ha

$$\int_E x\,y\,dx\,dy = \int_1^2 u\,du \int_1^2 \frac{1}{v}\,dv = \frac{u^2}{2}\bigg|_1^2 \log v\bigg|_1^2 = \frac{3}{2}\log 2.$$

✍ **Esercizio 3.3.**

Calcolare

$$\iint_A (2|x|y^2 - 3|x|)dxdy,$$

ove

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ \ |y| \le |x|,\ \ x \ge 0\}.$$

Parametrizziamo l'insieme A per mezzo delle coordinate polari.
Si ha

$$A = \{(\rho,\theta) \in [0,+\infty) \times [0,2\,\pi) :\ 1 \le \rho \le 2\ \wedge\ [0 \le \theta \le \pi/4\ \vee\ 7/4\,\pi \le \theta \le 2\,\pi]\}$$

ma data la periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possiamo senz'altro scrivere che

$$A = \{(\rho,\theta) :\ 1 \le \rho \le 2\ \wedge\ -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha (ricordando che in A si ha $x \ge 0$ dunque $|x| = x$)

$$\int\int_A (2|x|y^2 - 3|x|)\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^2 d\rho\, 2\,\rho\,\rho^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta - \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^2 3\,\rho\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,\rho$$

$$= 2\left(\int_1^2 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,\sin^2\theta\,d\theta\right) - 3\left(\int_1^2 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta d\theta\right)$$

$$= 2\,\frac{\rho^5}{5}\bigg|_1^2 \frac{\sin^3\theta}{3}\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - 3\,\frac{\rho^3}{3}\bigg|_1^2 \sin\theta\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 2\left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] - 3\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{74}{15}\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 3.4.**

Determinare il volume del solido delimitato dal grafico di

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

dal piano $z = 0$ e dalle condizioni:

$$1 \le y \le 3,\ \ y \ge x^2,\ \ y \ge -\sqrt{3}x$$

Vedi soluzione sul file corrispondente.

✍ **Esercizio 3.5.**

Si calcoli l'integrale doppio
$$\iint_D \sqrt{9-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
dove
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-3x \leq 0,\ \ y \geq 0\}.$$

Osserviamo che la disequazione
$$x^2+y^2-3x \leq 0$$
si può scrivere come
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{9}{4} \leq 0$$
che quindi rappresenta il cerchio di centro $(3/2, 0)$ e raggio $3/2$. Il dominio D rappresenta dunque il semicerchio situato nel semipiano $y \geq 0$. Proviamo a passare in coordinate polari. Sostituendo
$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$$
nella precedente equazione si ottiene
$$\rho^2 - 3\rho\cos\theta \leq 0 \ \Rightarrow\ \rho \leq 3\cos\theta$$
quindi l'insieme di integrazione diventa
$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \rho \leq 3\cos\theta\right\}.$$
Allora
$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{9-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_T \sqrt{9-\rho^2}\rho\,d\rho, d\theta\\
=\ & \int_0^{\pi/2}\left[\int_0^{3\cos\theta} \rho\sqrt{9-\rho^2}\,d\rho\right]d\theta\\
=\ & \int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{3\cos\theta}(-2\rho)\sqrt{9-\rho^2}d\rho\right]\,d\theta\\
=\ & -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{2}{3}\left[(9-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{3\cos\theta}\,d\theta\\
=\ & -\frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\left[(9-9\cos^2\theta)^{3/2} - 9^{3/2}\right]\,d\theta\\
=\ & -9\int_0^{\pi/2}(\sin^3\theta - 1)\,d\theta = 9\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta + \frac{9}{2}\pi\\
=\ & 9\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} + \frac{9}{2}\pi = -6 + \frac{9}{2}\pi.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 3.6.**

Calcolare il volume del solido delimitato dal grafico di $f(x,y) = 2x$, dal piano $z = 0$ e dalle condizioni

$$x \geq 0,\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1.$$

La richiesta coincide con il calcolo dell'integrale doppio

$$\int\int_A 2x\, dx\, dy,$$

dove

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ \ y \geq \frac{\sqrt{3}}{2},\ \ \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Osserviamo innanzitutto che se $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ allora $x = \pm 1$. Il dominio A è, per esempio, y-semplice e può essere descritto come

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int\int_A 2x\, dx\, dy &= \int_0^1 2x\, dx \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dy = \int_0^1 2x\, dx \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= \int_0^1 2x \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx - \sqrt{3} \int_0^1 x\, dx = -4\,\frac{2}{3} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)^{3/2} \Bigg|_0^1 - \sqrt{3}\,\frac{x^2}{2} \Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{8}{3} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^{3/2} - 1 \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} + \frac{8}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Alternativamente, risolviamo l'esercizio usando le coordinate polari. Data la simmetria del problema usiamo il seguente cambio di coordinate

$$x = 2\rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Allora il dominio A si trasforma nel seguente dominio

$$T = \left\{ (\rho,\theta) : \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta} \leq \rho \leq 1 \right\}$$

dove la limitazione su ρ si è ottenuta sostituendo

$$y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ \rho\sin\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A questo punto allora, ricordando che il modulo del determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è 2ρ si ottiene che l'integrale di partenza coincide con il seguente integrale doppio

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} 4\rho\cos\theta(2\rho)\,d\rho\,d\theta \\
=\ &\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos\theta\left[\frac{8}{3}\rho^3\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2\sin\theta}}^{1} d\theta \\
=\ &\frac{8}{3}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\cos\theta\left[1-\frac{3\sqrt{3}}{8\sin^3\theta}\right] d\theta \\
=\ &\frac{8}{3}[\sin\theta]_{\pi/3}^{\pi/2}-\sqrt{3}\left[\frac{\sin^{-2}\theta}{-2}\right]_{\pi/3}^{\pi/2} \\
=\ &\frac{8}{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\frac{4}{3}\right]=\frac{8}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 3.7.**

> Calcolare
> $$\int\int_E f(x,y)dxdy,$$
> dove $f(x,y)=x+y$ e
> $$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ xy\ge 0\right\}.$$

Osserviamo che E non è semplice, però è regolare. Infatti, detti

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x,y\ge 0\right\}\\
E_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0,\ x\le 0\right\}\\
E_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x,y\le 0\right\},
\end{aligned}$$

allora possiamo scrivere $E=E_1\cup E_2\cup E_3$.
Inoltre, E_1, E_2 e E_3 si intersecano vicendevolmente solo sul bordo, perciò, grazie a una proprietà dell'integrale doppio,

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \ =\ \int\int_{E_1} f(x,y)dxdy\ +\ \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy\ +\ \int\int_{E_3} f(x,y)dxdy.$$

Notiamo subito che, per simmetria,

$$\int\int_{E_1} f(x,y)dxdy\ =\ -\int\int_{E_3} f(x,y)dxdy\ :$$

infatti, E_1 ed E_3 sono simmetrici rispetto all'origine, mentre f è dispari; ovvero:

$$\begin{aligned}
(x,y)\in E_1 &\Leftrightarrow (-x,-y)\in E_3\\
f(x,y) &= -f(-x,-y).
\end{aligned}$$

Ne consegue che i due integrali sono opposti. Perciò è sufficiente calcolare

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy.$$

Per calcolare l'integrale su E_2 scomponiamo ulteriormente questo dominio in $E_2 = E_2^{'} \cup E_2^{''}$, dove

$$E_2^{'} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; -2 \le x \le -1,\; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$
$$E_2^{''} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; -1 \le x \le 0,\; \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

A loro volta questi due insiemi sono semplici e si intersecano solo sul bordo; quindi

$$\int\int_{E_2} f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{E_2^{'}} f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_{E_2^{''}} f(x,y)dxdy.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\int\int_{E_2^{'}} f(x,y)dxdy \;&=\; \int_{-2}^{-1}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)dydx \\
&= \int_{-2}^{-1} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-2}^{-1} \left(x\sqrt{4-x^2} + \frac{4-x^2}{2}\right) dx \\
&= \left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + 2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} \\
&= \frac{5}{6} - \sqrt{3},
\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}
\int\int_{E_2^{''}} f(x,y)dxdy \;&=\; \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)dydx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{4-x^2} - x\sqrt{1-x^2} + \frac{4-x^2-1+x^2}{2}\right) dx \\
&= \left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{-1}^{0} \\
&= -\frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \sqrt{3} - \frac{3}{2} = \sqrt{3} - \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \;=\int\int_{E_2} f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy = 0.$$

Alternativamente proviamo a descrivere E_2 attraverso le coordinate polari. Si ha

$$E_2 = \left\{(\rho,\theta) : 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi\right\}.$$

Dunque (molto più brevemente!) si ha

$$\begin{aligned}
\int\int_{E_2} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 \rho^2(\cos\theta+\sin\theta)\,d\rho\,d\theta \\
&= \int_1^2 \rho^2\,d\rho \int_{\pi/2}^{\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta \\
&= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_1^2 [(\sin\theta-\cos\theta)]_{\pi/2}^{\pi} = 0.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 3.8.**

Dati gli insiemi $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^2$, definiti da

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-3)^2 \le\ 9,\ \ x\ge 0\},$$

$$B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-3)^2 \ge\ 4,\ \ y\le 3\},$$

$$C = A\cap B,$$

calcolare

$$\int\int_C x\,dx\,dy.$$

L'insieme A è la parte di cerchio di centro $(0,3)$ e raggio 3 contenuto nel primo quadrante; l'insieme B è la parte esterna al cerchio di centro $(0,3)$ e raggio 2 contenuta nel semipiano $y\le 3$; l'insieme C dunque è un quarto di corona circolare. La cosa migliore è passare a coordinate polari. Si ha

$$C = \{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\,\pi) :\ 2\le\rho\le 3\ \wedge\ \theta\in[3/2\,\pi, 2\pi]\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha

$$\int\int_C x\,dx\,dy = \int_2^3 \int_{3/2\,\pi}^{2\,\pi} \rho\,\rho\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_2^3 \rho^2\,d\rho \int_{3/2\,\pi}^{2\pi}\cos\theta\,d\theta$$

$$= \left(\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_2^3\right)\left(\sin\theta\Bigg|_{3/2\pi}^{2\pi}\right) = \frac{19}{3}.$$