

# Analisi Matematica I modulo

## Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

16 novembre 2006

\*A\*AAA\*A

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Nel caso  $\alpha = -2006$  calcolare (se esiste) il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (b) Calcolare il limite della successione nel caso  $\alpha = \frac{2006}{1004}$ .
- (c) *Facoltativo.* Dimostrare che l'insieme  $A$  dei valori di  $\alpha$  per i quali la successione non è ben definita (in quanto si annulla il denominatore) è  $A = \left\{ \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

2. Calcolare i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + n)^n}{(n^2 - n)^{2n}}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\log \frac{1}{n})}{n}$$

3. Dimostrare che la seguente disequazione ha infinite soluzioni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{2006} \geq \frac{2006}{2007}.$$

---

**N.B.** Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome sul compito consegnato. Inoltre se si vuole tenere questo foglio è necessario trascrivere il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto.

# Analisi Matematica I modulo

## Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

16 novembre 2006

\*B\*BBB\*B

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Nel caso  $\alpha = 2006$  calcolare (se esiste) il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (b) Calcolare il limite della successione nel caso  $\alpha = \frac{1}{2006}$ .
- (c) *Facoltativo.* Dimostrare che l'insieme  $A$  dei valori di  $\alpha$  per i quali la successione non è ben definita (in quanto si annulla il denominatore) è  $A = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

2. Calcolare i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + n)^{2n}}{(n^4 - n)^n}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2^n}{n}}{1 + \log n}$$

3. Dimostrare che la seguente disequazione ha infinite soluzioni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{2006} \geq \frac{2006}{2007}.$$

---

**N.B.** Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome sul compito consegnato. Inoltre se si vuole tenere questo foglio è necessario trascrivere il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto.

# Analisi Matematica I modulo

## Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

16 novembre 2006

\*C\*CCC\*C

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{a_n} - 2 \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Nel caso  $\alpha = -2006$  calcolare (se esiste) il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (b) Calcolare il limite della successione nel caso  $\alpha = -\frac{1}{2006}$ .
- (c) *Facoltativo.* Dimostrare che l'insieme  $A$  dei valori di  $\alpha$  per i quali la successione non è ben definita (in quanto si annulla il denominatore) è  $A = \{\frac{1-n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ .

2. Calcolare i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 1)^n}{(n + 1)^{3n}}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n$$

3. Dimostrare che la seguente disequazione ha infinite soluzioni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2006} \leq \frac{2007}{2006}.$$

---

**N.B.** Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome sul compito consegnato. Inoltre se si vuole tenere questo foglio è necessario trascrivere il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto.

# Analisi Matematica I modulo

## Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

16 novembre 2006

\*D\*DDD\*D

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{a_n+2} \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Nel caso  $\alpha = 2006$  calcolare (se esiste) il limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- (b) Calcolare il limite della successione nel caso  $\alpha = -\frac{2006}{1004}$ .
- (c) *Facoltativo.* Dimostrare che l'insieme  $A$  dei valori di  $\alpha$  per i quali la successione non è ben definita (in quanto si annulla il denominatore) è  $A = \{-\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ .

2. Calcolare i seguenti limiti:

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}}$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^{3n}}{(n^3+1)^n}$$

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)^n$$

3. Dimostrare che la seguente disequazione ha infinite soluzioni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2006} \leq \frac{2007}{2006}.$$

---

**N.B.** Ricordarsi di scrivere il proprio nome e cognome sul compito consegnato. Inoltre se si vuole tenere questo foglio è necessario trascrivere il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto.