Analisi Matematica I modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

16 novembre 2006

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva: ***A********

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

   (a) Nel caso $\alpha = -2006$ calcolare (se esiste) il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$.

   (b) Calcolare il limite della successione nel caso $\alpha = \frac{2006}{1004}$.

   (c) *Facoltativo.* Dimostrare che l'insieme A dei valori di α per i quali la successione non è ben definita (in quanto si annulla il denominatore) è $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione. Posto $f(x) = \frac{1}{2-x}$ osserviamo che l'equazione $f(x) = x$ diventa, per $x \neq 2$, $(x-1)^2 = 0$ che ha l'unica soluzione $x = 1$. La disuguaglianza $f(x) \geq x$ é valida per $x < 2$ mentre $f(x) < x$ per $x > 2$. Notiamo anche che la funzione f è crescente per $x < 2$ (e anche per $x > 2$, dunque se $x < 1$ si ha $f(x) < f(1) = 1$. Possiamo quindi dedurre che se $a_n < 1$ allora anche $a_{n+1} < 1$.

Nel caso $a_1 = \alpha = -2006 < 1$ possiamo quindi dedurre (utilizzando l'induzione) che l'intera successione a_n è limitata dall'alto $a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre se $a_n < 1$ sappiamo anche che $a_{n+1} > a_n$ (in quanto per $x < 1$ si ha $f(x) > x$) e dunque la successione è strettamente crescente. Quindi la successione ammette limite finito $a_n \to a \leq 1$. Passando al limite nell'uguaglianza $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ troviamo $a = \frac{1}{2-a}$ ovvero $f(a) = a$ che ha l'unica soluzione $a = 1$. Abbiamo quindi trovato che nel caso $\alpha = -2006$ si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Se invece $\alpha = \frac{2006}{1004}$ osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha = \frac{2006}{1004} \\ a_2 &= \frac{1}{1-2a_1} = 502 \\ a_3 &= \frac{1}{1-2a_2} = -\frac{1}{500} \end{aligned}$$

ed essendo $a_3 < 1$, per $n \geq 3$ ci riconduciamo al caso precedente, ovvero la successione risulta essere limitata dall'altro dal valore 1 e risulta essere strettamente crescente. Dunque di nuovo si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Veniamo ora al terzo quesito. Dobbiamo determinare l'insieme A dei valori di α per i quali la successione assume per un certo indice n il valore $a_n = 2$. In tal caso, infatti, essendoci un denominatore che si annulla, il termine successivo a_{n+1} non è ben definito. Chiaramente $2 \in A$ in quanto se $a_1 = \alpha = 2$ già il secondo termine a_2 non è ben definito. Poniamo dunque $\alpha_1 = 2$. Vediamo ora per quale valore α_2 di α si ha $a_2 = 2$. Essendo $a_2 = f(a_1) = f(\alpha)$ si tratta di risolvere l'equazione $f(\alpha) = 2$ ovvero

$$\frac{1}{2-\alpha} = 2$$

che ha come unica soluzione $\alpha_2 = 3/2$. In generale l'equazione $f(x) = y$ ha come soluzione $x = 2 - 1/y$. In effetti la funzione $g(y) = 2 - 1/y$ non è altro che la funzione inversa di $y = f(x)$ (per $x \neq 2$). Dunque il valore α_{n+1} di α per il quale si ha $a_{n+1} = 2$ si ottiene risolvendo l'equazione $f(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ cioè $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$. In pratica otteniamo che l'insieme A cercato non è altro che l'insieme $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ dei valori assunti dalla successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{n+1} = g(\alpha_n). \end{cases}$$

Il testo ci suggerisce che dovrebbe valere $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$, sarà dunque sufficiente dimostrare per induzione questa uguaglianza. Per $n = 1$ si ha proprio $\alpha_1 = 2$. Supponiamo ora di sapere che $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$ per un certo n. Allora osserviamo che si ha

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n) = 2 - \frac{1}{\alpha_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

che è proprio quello che dovevamo dimostrare.

I compiti `B`, `C` e `D` si risolvevano in maniera analoga. In particolare nel compito `B` si ha $\lim a_n = 1$ mentre in `C` e `D` si ha $\lim a_n = -1$. *B****** *C******

2. Calcolare i seguenti limiti: *D******

   (a) ***A****

   $$\frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

   Soluzione. Applichiamo il criterio del rapporto. Il rapporto tra due termini successivi della successione è infatti:

   $$\begin{aligned} \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3}\frac{(n!)^3}{(3n)!} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3 \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+2)}{1}\frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{27n^3 + (\text{polinomio di grado 2})}{n^3 + (\text{polinomio di grado 2})} \\ &= \frac{27 + (\text{qualcosa che tende a zero})}{1 + (\text{qualcosa che tende a zero})} \to 27 \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

   Siccome il rapporto tra due termini consecutivi tende a $27 > 1$ possiamo concludere che il limite della successione è $+\infty$.

   Il compito `B` si risolve in maniera analoga, solo che in tal caso il limite del rapporto tende a $1/27$ e quindi la successione data tende a 0. ***B****

   Nel compito `C` il limite da calcolare è invece ***C****

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}.$$

   Anche in questo caso si applica il criterio del rapporto. Il rapporto tra due termini consecutivi è infatti

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{(2(n+1))!}}{(n+1)!}\frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} &= \sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!}}\frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \sqrt{(2n+2)(2n+1)}\frac{1}{n+1} \\ &= \sqrt{\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}} = \sqrt{\frac{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}} \\ &\to \sqrt{4} = 2 \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

Dunque essendo il limite del rapporto $2 > 1$ concludiamo che la successione tende a $+\infty$.

Il compito `D` si risolve in maniera analoga, solo che in tal caso il limite del rapporto tende a $1/2$ e quindi la successione data tende a 0. `***D****`

`****A***`

(b)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^4+n)^n}{(n^2-n)^{2n}}$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{(n^4+n)^n}{(n^2-n)^{2n}} &= \left(\frac{n^4+n}{(n^2-n)^2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{n^4+n-(n^4-2n^3+n^2)}{n^4-2n^3+n^2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{2n^3-n^2+n}{n^4-2n^3+n^2}\right)^n\end{aligned}$$

osserviamo ora che la quantità

$$b_n = \frac{2n^3-n^2+n}{n^4-2n^3+n^2} = \frac{\frac{2}{n}-1n^2+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

tende a zero per $n\to\infty$. Dunque cerchiamo di ricondurci al limite notevole $(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}$. La successione data è infatti uguale a

$$\left[(1+b_n)^{\frac{1}{b_n}}\right]^{nb_n}$$

e si ha

$$nb_n = \frac{2n^4-n^3+n^2}{n^4-2n^3+n^2} \to 2.$$

Dunque il limite cercato è e^2.

Il limite dei testi `B`, `C` e `D` si risolvono in maniera analoga i risultati sono rispettivamente e^2, e^{-3} e e^{-3}. `****B***`

`****C***`

(c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\log\frac{1}{n})}{n}$$

`****D***`

Soluzione. Si tratta semplicemente di una successione limitata $\sin(\dots)$ per una infinitesima $1/n$. Il limite è quindi 0. `*****A**`

Il testo `B` è analogo, il risultato è sempre 0. `*****B**`

Nel testi `C` e `D` il limite da calcolare è invece il seguente: `*****C**`

$$\left(1 - \frac{n+1}{n}\right)^n.$$ `*****D**`

In questo caso si ossrva che la base della potenza tende a 0 mentre l'esponente tende a $+\infty$. Questa non è una forma indeterminata, il risultato del limite è 0.

`*******A`

3. Dimostrare che la seguente disequazione ha infinite soluzioni $n \in \mathbb{N}$: `*******B`

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2006} \geq \frac{2006}{2007}$$

Soluzione. Osserviamo che la quantità al lato sinistro della disequazione tende a 1 per $n \to \infty$ mentre la quantità al lato destro è strettamente minore di 1. Dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon = 1 - 2006/2007 > 0$, sappiamo esistere un indice ν tale che per ogni $n > \nu$ si ha

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2006} > 1 - \varepsilon = \frac{2006}{2007}.$$

Questo significa, in particolare, che la disequazione data ha infinite soluzioni.

Le versioni `C` e `D` sono analoghe alla precedente. `*******C`

`*******D`