Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Determinare (senza fare uso del calcolo differenziale) l'estremo superiore ed inferiore della successione
$$\{\frac{4-n}{n^2-9n+22} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Dire se si tratta anche di valore massimo e minimo.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 - a_n, & n \in \mathbb{N}, \\ a_1 = \alpha & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Svolgere almeno 2 dei seguenti punti
   a) Dimostrare che se $\sqrt{2} < \alpha$ allora la successione è strettamente crescente e trarne le opportune conseguenze;
   b) Dimostrare che è possibile dedurre il comportamento della successione con dato iniziale $\alpha < 0$ dal comportamento della successione con dato iniziale $-\alpha$. Dedurne che è sufficiente studiare la successione per $0 \leq \alpha$;
   c) Mostrare che per $\alpha \in (0,1)$ si origina una successione con termini di segno alterno e tale che $|a_{n+1}| < |a_n|$ e trarne le opportune conseguenze;
   d) Studiare separatamente i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha \in (1, \sqrt{2})$.

3. Stabilire se la seguente funzione $f(x)$ ammette massimo
$$f(x) = \tan^3 x - \tan x + \frac{e^{4x}-1}{3x}$$
al variare di x nell'insieme di numeri reali $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$.

4. Determinare se le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili per $x = 0$:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = |x| \frac{x+1}{x+2}.$$
Nel caso in cui siano derivabili per $x = 0$ stabilire anche se la derivata è continua in tale punto.

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Determinare (senza fare uso del calcolo differenziale) l'estremo superiore ed inferiore della successione
$$\{\frac{5-n}{n^2-7n+12} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Dire se si tratta anche di valore massimo e minimo.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^5 - a_n, & n \in \mathbb{N}, \\ a_1 = \alpha & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Svolgere almeno 2 dei seguenti punti
   a) Dimostrare che se $\sqrt[4]{2} < \alpha$ allora la successione è strettamente crescente e trarne le opportune conseguenze;
   b) Dimostrare che è possibile dedurre il comportamento della successione con dato iniziale $\alpha < 0$ dal comportamento della successione con dato iniziale $-\alpha$. Dedurne che è sufficiente studiare la successione per $0 \leq \alpha$;
   c) Mostrare che per $\alpha \in (0,1)$ si origina una successione con termini di segno alterno e tale che $|a_{n+1}| < |a_n|$ e trarne le opportune conseguenze;
   d) Studiare separatamente i casi $\alpha = 1$ ed $\alpha \in (1, \sqrt[4]{2})$.

3. Stabilire se la seguente funzione $f(x)$ ammette massimo
$$f(x) = \tan^3 x - \tan x \; - \; 2\frac{e^{-4x} - 1}{x}$$
al variare di x nell'insieme di numeri reali $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$.

4. Determinare se le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili per $x = 0$:
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = |x| \frac{x}{x+1}.$$
Nel caso in cui siano derivabili per $x = 0$ stabilire anche se la derivata è continua in tale punto.

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Determinare (senza fare uso del calcolo differenziale) l'estremo superiore ed inferiore della successione
$$\{\frac{6-n}{n^2-7n+12} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Dire se si tratta anche di valore massimo e minimo.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n^3 - a_n, & n \in \mathbb{N}, \\ a_1 = \alpha & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Si svolgano almeno 2 dei seguenti punti
   a) Dimostrare che se $1 < \alpha$ allora la successione è strettamente crescente e trarne le opportune conseguenze;
   b) Dimostrare che è possibile dedurre il comportamento della successione con dato iniziale $\alpha < 0$ dal comportamento della successione con dato iniziale $-\alpha$. Dedurne che è sufficiente studiare la successione per $0 \leq \alpha$;
   c) Mostrare che per $\alpha \in (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ si origina una successione con termini di segno alterno e tale che $|a_{n+1}| < |a_n|$ e trarne le opportune conseguenze;
   d) Studiare separatamente i casi $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ed $\alpha \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$.

3. Stabilire se la seguente funzione $f(x)$ ammette massimo
$$f(x) = \tan^3 x - \tan x + \frac{e^{4x}-1}{5x}$$
al variare di x nell'insieme di numeri reali $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$.

4. Determinare se le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili per $x = 0$:
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = |x| \sin x\,.$$
Nel caso in cui siano derivabili per $x = 0$ stabilire anche se la derivata è continua in tale punto.

Analisi Matematica I (A.A. 2016/17)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Determinare (senza fare uso del calcolo differenziale) l'estremo superiore ed inferiore della successione
$$\{\frac{5-n}{n^2-9n+22} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
Dire se si tratta anche di valore massimo e minimo.

2. Si consideri la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n^5 - a_n, & n \in \mathbb{N}, \\ a_1 = \alpha & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$
Svolgere almeno 2 dei seguenti punti
   a) Dimostrare che se $1 < \alpha$ allora la successione è strettamente crescente e trarne le opportune conseguenze;
   b) Dimostrare che è possibile dedurre il comportamento della successione con dato iniziale $\alpha < 0$ dal comportamento della successione con dato iniziale $-\alpha$. Dedurne che è sufficiente studiare la successione per $0 \leq \alpha$;
   c) Mostrare che per $\alpha \in (0, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ si origina una successione con termini di segno alterno e tale che $|a_{n+1}| < |a_n|$ e trarne le opportune conseguenze;
   d) Studiare separatamente i casi $\alpha = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ed $\alpha \in (\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 1)$.

3. Stabilire se la seguente funzione $f(x)$ ammette massimo
$$f(x) = \tan^3 x - \tan x \; - \; 6\frac{e^{-4x}-1}{x}$$
al variare di x nell'insieme di numeri reali $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \setminus \{0\}$.

4. Determinare se le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili per $x = 0$:
$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cos \frac{1}{x^3} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}, \qquad g(x) = |x| \cos x\,.$$
Nel caso in cui siano derivabili per $x = 0$ stabilire anche se la derivata è continua in tale punto.