

Analisi Matematica III modulo

Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

27 novembre 2007

1. Stabilire se la seguente successione di funzioni converge uniformemente nell'intervallo indicato

$$f_n(x) = \frac{x}{(1-x)^n}, \quad x \in [-1, 0]$$

****A****

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1-x)^n}, \quad x \in [-1, 0]$$

****B****

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n, \quad x \in [1, +\infty)$$

****C****

$$f_n(x) = \frac{n}{x} \left(\frac{x}{x+1} \right)^n, \quad x \in [1, +\infty)$$

****D****

Soluzione. È facile verificare che tutte le successioni proposte convergono puntualmente a zero nell'intervallo indicato.

Nella versione A la funzione f_n risulta essere negativa e ha un minimo per $x = -\frac{1}{n-1}$. Dunque

$$\sup_{x \in [-1, 0]} |f_n(x)| = -f_n\left(-\frac{1}{n-1}\right) = \frac{\frac{1}{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \rightarrow 0$$

che significa che la successione data converge uniformemente a zero. Nella versione B la funzione ha lo stesso segno e minimo nello stesso punto. Si ha però:

$$\sup |f_n(x)| = -f_n\left(-\frac{1}{n-1}\right) = \frac{\frac{n}{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} \rightarrow 1/e.$$

Dunque nel caso B la convergenza non è uniforme.

Nel caso C, la funzione f_n positiva e ammette massimo per $x = n - 1$. Dunque si ha

$$\sup |f_n| = f_n(n - 1) = \frac{1}{n - 1} \left(\frac{n - 1}{n} \right)^n \rightarrow 0$$

cioè la successione converge uniformemente a zero. Nel caso D la funzione ha massimo nello stesso punto ma si ha

$$\sup |f_n| = f_n(n - 1) = \frac{n}{n - 1} \left(\frac{n - 1}{n} \right)^n \rightarrow 1/e$$

e quindi la convergenza non è uniforme.

2. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k}{2^k}.$$

*****A**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k}{3^k}.$$

*****B**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - k}{2^k}.$$

*****C**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - k}{3^k}.$$

*****D**

Soluzione. Sappiamo che la serie geometrica è una serie di potenze con raggio di convergenza 1, e per $x \in (-1, 1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.$$

La serie delle derivate ha lo stesso raggio di convergenza e converge alla derivata della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

derivando ancora si ottiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)x^{k-2} = \frac{2}{(1 - x)^3}.$$

Moltiplicando per x^2 ambo i membri si ottiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)x^k = \frac{2x^2}{(1 - x)^3}$$

che con la sostituzione $x = 1/2$ o $x = 1/3$ risolve la versione C o D con i valori 4 e 3/4. Spostando gli indici $k \mapsto k + 1$ si ottiene invece

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

e moltiplicando per x

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)kx^k = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

che ci permette di risolvere i casi A e B con i valori 8 e 9/4.

3. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sqrt{|y|}}{(x^2 + y^2) \cos x}.$$

*****A*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2 \sqrt{|x|}}{(x^2 + y^2) e^x}.$$

*****B*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|xy^3|}}{(1 + \sqrt{|x|})(x^2 + y^2)}.$$

*****C*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|x^3y|}}{(1 + \sqrt{|x|})(x^2 + y^2)}.$$

*****D*

Soluzione. Nei casi A e B osserviamo che i termini $\cos x$ e e^x tendono a 1 per $x \rightarrow 0$ e dunque non influenzano l'eventuale esistenza del limite. La parte rimanente (nel caso A) si stima così:

$$\frac{x^2 \sqrt{|y|}}{(x^2 + y^2)} \leq \frac{\rho^2 \sqrt{\rho}}{\rho^2} = \sqrt{\rho} \rightarrow 0.$$

Dunque nei casi A e B il limite esiste ed è zero.

Nei casi C e D è sufficiente restringersi a $y = x$ per trovare (as esempio nel caso C)

$$\frac{x^2}{(1 + \sqrt{|x|})2x^2} = \frac{1}{1 + \sqrt{|x|}} \rightarrow 1$$

mentre si ha chiaramente che per $y = 0$ il limite risulta essere 0. Dunque nei casi C e D il limite non esiste.