

# Analisi Matematica III modulo

## Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

18 gennaio 2008

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = \frac{x - \log x}{kx}.$$

- (a) Studiarne la convergenza uniforme negli intervalli  $(1, +\infty)$  e  $(0, +\infty)$ .
- (b) Studiare la convergenza uniforme in  $(1, +\infty)$  della successione  $f'_k$  delle derivate.

*Soluzione.* La funzione è del tipo  $f_k(x) = g(x)/k$  dove

$$g(x) = \frac{x - \log x}{x}$$

dunque chiaramente la successione tende puntualmente a zero sul suo insieme di definizione  $(0, +\infty)$ .

Siccome  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ , le funzioni  $f_k$  sono tutte non limitate su  $(0, +\infty)$  cioè  $\sup_{(0, +\infty)} |f_k| = +\infty$  e quindi non c'è convergenza uniforme su  $(0, +\infty)$ .

Invece sull'intervallo  $(1, +\infty)$  c'è convergenza uniforme. Infatti la funzione  $g$  è limitata su tale intervallo (in quanto all'infinito  $g$  tende a zero) e dunque  $\sup_{(1, +\infty)} |f_k| = \frac{1}{k} \sup_{(1, +\infty)} g \rightarrow 0$ .

Stesso ragionamento vale per  $f'_k = g'/k$  infatti anche  $g'$  risulta essere limitata su  $(1, +\infty)$ .

Facendo uno studio più approfondito delle funzioni  $f_k$  e  $f'_k$  si sarebbe trovato:

$$\sup_{(1, +\infty)} |f_k| = \frac{1}{k} \tag{1}$$

$$\sup_{(1, +\infty)} |f'_k| = \frac{1}{k}. \tag{2}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Dire se la funzione è differenziabile in  $(0, 0)$ . Dire se la funzione è derivabile due volte in  $(0, 0)$ .

*Soluzione.* Visto che  $f(x, 0) = 0$  e  $f(0, y) = 0$  possiamo immediatamente dire che  $f_x(0, 0) = 0$ ,  $f_y(0, 0) = 0$ ,  $f_{xx}(0, 0) = 0$  e  $f_{yy}(0, 0) = 0$ .

Dimostriamo ora che  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ . Si ha infatti

$$\left| \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f_x(0, 0) - y f_y(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy \log(x^2 + y^2)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} |\log(x^2 + y^2)| \rightarrow 0$$

per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Per  $(x, y) \neq (0, 0)$  si ha

$$f_x(x, y) = y \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}$$

e dunque

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \log h^2}{h} = -\infty.$$

Questo significa che la funzione non è derivabile due volte, in quanto una delle derivate seconde non è finita.

3. Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = 3x^4 + y^6 - 4x^3 y^2.$$

*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= 12x^2(x - y^2) \\ f_y &= 6y^5 - 8x^3 y. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema  $f_x = 0$ ,  $f_y = 0$  si trovano tre soluzioni:  $(0, 0)$ ,  $(3/4, \pm\sqrt{3}/2)$  e dunque tre punti critici. Osserviamo che sulle rette orizzontali  $y = y_0$ , la funzione assume minimo assoluto per  $x = y^2$ , dove si annulla  $f_x$ . Studiamo poi la funzione sulla parabola  $x = y^2$ . Posto  $g(y) = f(y^2, y)$  si ha

$$g(y) = y^6 - y^8, \quad g'(y) = 6y^5 - 8y^7 = 2y^5(3 - 4y^2).$$

Dunque la funzione  $g(y)$  ha un minimo relativo per  $y = 0$  (in corrispondenza del punto  $(0, 0)$ ) e un massimo relativo per  $y = \pm\sqrt{3}/2$ . Visto che su ogni retta orizzontale la funzione ha minimo per  $x = y^2$  e che su tale curva c'è un minimo relativo in  $(0, 0)$  concludiamo che  $(0, 0)$  è un punto di minimo relativo. Invece gli altri due punti critici devono essere punti di sella in quanto lungo le rette orizzontali presentano un comportamento di minimo mentre lungo la curva  $x = y^2$  presentano un massimo relativo.