

# Analisi Matematica 2

## Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

12 gennaio 2010

1. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3 + y^5}{x^4 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione nel punto  $(0, 0)$ .

*Soluzione.* Ricordando la disuguaglianza

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

(che si ottiene da  $0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ ) osserviamo che si ha

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2 y^2 \leq x^4 + y^4 + x^4 + y^4 = 2(x^4 + y^4)$$

Utilizzando anche le disuguaglianze

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

otteniamo

$$|f(x, y)| \leq \frac{2(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{(x^2 + y^2)^2}{2}} = 4\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \quad \text{per } (x, y) \rightarrow 0.$$

Dunque la funzione è continua nel punto  $(0, 0)$ .

Per quanto riguarda le derivate parziali notiamo che  $f(x, 0) = 0$  e dunque  $f_x(0, 0) = 0$ . Invece

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1.$$

Dunque la funzione è derivabile in  $(0, 0)$ .

Per la differenziabilità dobbiamo verificare che la seguente funzione abbia limite nullo per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ :

$$g(x, y) = \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f_x(0, 0) - y f_y(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{x^2 y^3 + y^5}{x^4 + y^4} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Valutiamo la funzione  $g$  sulle rette  $y = mx$ :

$$g(x, mx) = \frac{\frac{m^3 x^5 + m^5 x^5}{x^4 + m^4 x^4} - mx}{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}} = \frac{\frac{m^3 + m^5}{1 + m^4} - m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

che è diverso da zero se, ad esempio, scegliamo  $m = 2$ .

Dunque la funzione è continua, derivabile ma non differenziabile nel punto  $(0, 0)$ .

*Soluzione alternativa.* Per quanto riguarda la continuità della funzione  $f$ , si poteva procedere anche nel seguente modo. Si osserva che

$$|x| \leq \sqrt[4]{x^4 + y^4}, \quad |y| \leq \sqrt[4]{x^4 + y^4}$$

da cui si ricava

$$|f(x, y)| \leq \frac{2(x^4 + y^4)^{\frac{5}{4}}}{x^4 + y^4} = \sqrt[4]{x^4 + y^4} \rightarrow 0.$$

2. Trovare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^6 - 2x^3y^3 + y^4 - y^6$$

e dire se sono massimi o minimi.

*Soluzione.* Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x^5 - 6x^2y^3 = 6x^2(x^3 - y^3) \\ f_y &= -6x^3y^2 + 4y^3 - 6y^5 \end{aligned}$$

I punti critici sono i punti in cui si annullano contemporaneamente  $f_x$  e  $f_y$ . Perché si annulli  $f_x$  deve essere  $x = 0$  oppure  $x = y$ . Se  $x = 0$  si trova  $f_y = 4y^3 - 6y^5 = 2y^3(2 - 3y^2)$  che si annulla per  $y = 0$  oppure  $y = \pm\sqrt{2/3}$ . Dunque troviamo i tre punti critici

$$p_1 = (0, 0), \quad p_2 = (0, \sqrt{2/3}), \quad p_3 = (0, -\sqrt{2/3}).$$

Se  $x = y$  si trova  $f_y = -6x^5 + 4x^3 - 6x^5 = 4x^3(1 - 3x^2)$  che si annulla per  $x = 0$  oppure  $x = \pm 1/\sqrt{3}$ . Oltre alla soluzione  $(0, 0)$  che abbiamo già trovato, abbiamo dunque altri due punti critici:

$$p_4 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \quad p_5 = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}).$$

Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 30x^4 - 12xy^3 \\ f_{xy} &= -18x^2y^2 \\ f_{yy} &= -12x^3y + 12y^2 - 30y^4. \end{aligned}$$

Se  $x = 0$  si ha  $f_{xx} = 0$ ,  $f_{xy} = 0$  e dunque i punti  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  hanno determinante hessiano nullo. Se  $x = y$  si ha  $f_{xx} = 18x^4$ ,  $f_{xy} = -18x^4$ ,  $f_{yy} = -42x^4 + 12x^2$  e dunque il determinante hessiano risulta

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -42 \cdot 18x^8 + 18 \cdot 12x^6 - 18^2x^8 = 18x^6(12 - 60x^2)$$

che per  $x^2 = 1/3$  risulta essere una quantità negativa. Dunque i punti  $p_4$  e  $p_5$  sono punti a sella.

Studiamo con maggiore dettaglio i punti con hessiano nullo. Dal segno della derivata parziale  $f_x$  osserviamo che fissato  $\bar{y}$  la funzione  $x \mapsto f(x, \bar{y})$  ha derivata positiva per  $x > \bar{y}$  e negativa per  $x < \bar{y}$  e  $x \neq 0$ . Dunque la funzione  $f(x, \bar{y})$ , al variare di  $x$ , assume valore minimo per  $x = \bar{y}$ . Questo significa che  $f(x, y) \geq f(y, y)$  per ogni  $x$  e  $y$ .

Studiamo ora cosa succede sulla curva  $y = x$ . Posto  $g(x) = f(x, x) = x^6 - 2x^6 + x^4 - x^6 = x^4 - 2x^6 = x^4(1 - 2x^2)$  abbiamo che  $g(x) \geq 0$  se  $|x| \leq 1/\sqrt{2}$  e di conseguenza  $g(x) \geq g(0) = 0$  per tali valori di  $x$ .

Vogliamo ora mostrare che il punto  $(0, 0)$  è un minimo locale. Preso infatti un qualunque punto  $(x, y)$  con  $x, y \in [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$  abbiamo dimostrato che si ha  $f(x, y) \geq f(y, y) = g(y) \geq g(0) = f(0, 0)$ .

Vediamo cosa succede nei punti  $p_2 = (0, \sqrt{2/3})$  e  $p_3 = -p_2$ . Dal segno di  $f_x$  possiamo affermare che sulla retta  $y = \sqrt{2/3}$  la funzione  $f$  è strettamente decrescente in un intorno di  $x = 0$ . Questo significa che il punto  $p_2$  non può essere né massimo né minimo. Discorso analogo si può fare nel punto  $p_3$ .

In conclusione: il punto  $p_1$  è un minimo relativo, i punti  $p_2$  e  $p_3$  sono punti di sella e i punti  $p_4$  e  $p_5$  non sono né massimi né minimi.

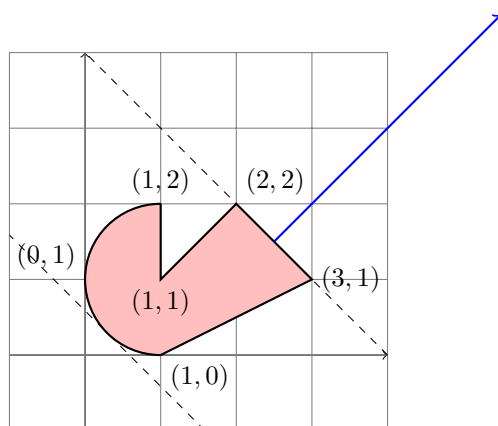


Figura 1: La figura relativa all'esercizio 3. La lunga freccia rappresenta il vettore gradiente. Le linee tratteggiate sono le rette perpendicolari al gradiente (curve di livello di  $f$ ) dove vengono assunti il massimo e il minimo

3. Determinare il valore massimo e minimo assunti dalla funzione

$$f(x, y) = 3x + 3y + 2$$

sulla regione chiusa delimitata da 4 segmenti e una semicirconfenza rappresentata in figura.

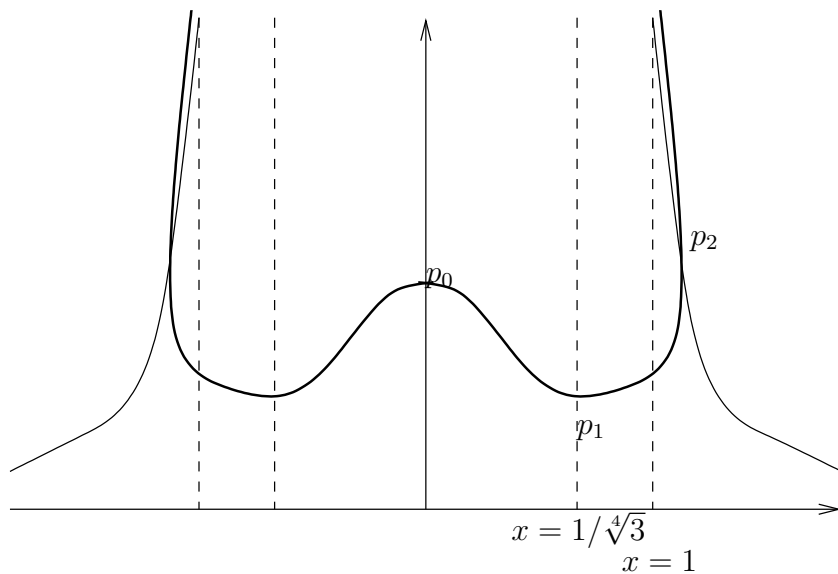
*Soluzione.* La funzione da minimizzare è lineare con gradiente  $(3, 3)$ . Gli insiemi di livello saranno dunque le rette perpendicolari al gradiente, ovvero le rette con coefficiente angolare  $-1$ . L'intero insieme è compreso tra la retta  $x + y = 4$ , passante dai punti  $(2, 2)$  e  $(3, 1)$  dove la funzione  $f$  ha valore costante 14 e la retta  $x + y = 2 - \sqrt{2}$ , tangente alla semicirconfenza, dove la funzione ha valore  $8 - 3\sqrt{2}$ . Nella striscia compresa tra le due rette la funzione assume i valori intermedi, e dunque questi valori sono il massimo e il minimo valore assunto da  $f$  sull'insieme dato.

4. Disegnare approssimativamente l'insieme di livello  $\{f(x, y) = 0\}$  della funzione

$$f(x, y) = x^6 y - x^2 y - \log y.$$

In particolare

- (a) determinare i punti in cui l'insieme di livello non si può rappresentare localmente come il grafico di una funzione (rispetto a  $x$  o rispetto a  $y$ );



- (b) dimostrare che il livello è simmetrico rispetto all'asse delle  $y$ ;
- (c) trovare gli asintoti verticali del livello.
- (d) verificare che il livello è connesso;

*Soluzione.* Notiamo innanzitutto che la funzione  $f$  è definita solo nel semipiano  $y > 0$ . Calcoliamo le derivate parziali

$$f_x = 6x^5y - 2xy = 2xy(3x^4 - 1)$$

$$f_y = x^6 - x^2 - \frac{1}{y}$$

e studiamone il segno. La derivata  $f_x$  si annulla sulle rette  $x = 0$  e  $x = \pm 1/\sqrt[4]{3}$ , è positiva per  $x \rightarrow \infty$  e cambia segno ogni volta che si attraversa una di queste rette. La derivata  $f_y$  è positiva quando

$$\frac{1}{y} \leq x^6 - x^2$$

ovvero quando

$$y \geq \frac{1}{x^6 - x^2} = \frac{1}{x^2(x^4 - 1)}.$$

Con un rapido studio di funzione si vede che la curva in cui si annulla  $f_y$  (con  $y > 0$ ) è formata da due rami asintotici a  $y = 0$  e alle rette  $x = \pm 1$ .

Osserviamo ora che non ci sono punti in cui si annullano contemporaneamente entrambe le derivate parziali. Dunque in tutti i punti del semipiano  $y > 0$  sono soddisfatte le ipotesi del teorema del Dini e quindi gli insiemi di livello si possono rappresentare in ogni punto come grafico di funzione rispetto alla variabile  $x$  o alla variabile  $y$ .

Visto che la funzione  $f$  è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$ , in quanto  $f(x, y) = f(-x, y)$ , anche gli insiemi di livello hanno la stessa simmetria.

Prendiamo ora il punto  $p_0 = (0, 1)$  sull'asse delle  $y$  dove  $f(p_0) = 0$  e ricostruiamo l'insieme di livello passante per questo punto. Per la simmetria appena

evidenziata sarà sufficiente determinare il comportamento per  $x \geq 0$ . Nel punto  $p_0$  si annulla  $f_x$  dunque in tale punto l'insieme di livello ha tangente orizzontale. Spostandosi verso destra la curva di livello è decrescente in quanto  $f_x < 0$ ,  $f_y < 0$  da cui  $dy/dx = -f_x/f_y < 0$ .

Osserviamo ora che nessuna curva di livello può raggiungere l'asse delle  $x$ . Infatti se  $y \rightarrow 0^+$  e  $x$  è limitato, la funzione  $f$  tende a  $+\infty$ . Dunque la nostra curva di livello dovrà necessariamente incontrare la retta  $x = 1/\sqrt[4]{3}$  in un punto  $p_1$ . Tale punto risulta essere un minimo, in base al segno di  $f_x$ . La curva di livello dunque diventa crescente, passato  $p_1$ .

Notiamo ora che non è possibile che ci si presenti un asintoto verticale  $x = \bar{x}$  a meno che non sia  $\bar{x} = 1$ . Infatti notiamo che

$$f(x, y) = (x^6 - x^2 - \frac{\log y}{y})y$$

e se  $x \rightarrow \bar{x}$  e  $y \rightarrow +\infty$  il fattore  $(x^6 - x^2 - \frac{\log y}{y})$  tende a  $\bar{x}^6 - \bar{x}^2$  e quindi se  $\bar{x}^6 - \bar{x}^2 \neq 0$  la funzione tende a  $\pm\infty$ . Questo significa che se  $\bar{x} \neq 0$  e  $\bar{x} \neq \pm 1$  l'insieme di livello non può avere l'asintoto verticale  $x = \bar{x}$ .

Di conseguenza la nostra curva di livello prosegue crescendo almeno fino a superare la retta  $x = 1$ . A questo punto necessariamente deve incontrare la curva decrescente in cui  $f_y = 0$  in un punto  $p_2$ . In tale punto la curva di livello ha tangente verticale e quindi ritorna indietro: la coordinata  $x$  cala mentre la  $y$  cresce. Visto che non è possibile che la curva di livello incontri nuovamente la curva  $f_y = 0$  (che può essere attraversata solo in un verso) dovrà necessariamente avere una asintoto verticale. E l'unica possibilità, per quanto visto in precedenza è che l'asintoto sia la retta  $x = 1$ .

Questo conclude l'andamento della curva di livello uscente dal punto  $p_0$ . Non ci possono essere altri rami della curva di livello 0, in quanto per  $x$  compreso tra 0 e 1, il segno della derivata  $f_y$  ci dice che la funzione è strettamente crescente sulle rette verticali e quindi assume ogni valore una unica volta. Per  $x > 1$ , invece, la funzione, sulle rette verticali, ha un andamento prima decrescente e poi crescente. Dunque potrà avere al massimo due intersezioni con le rette verticali. Questo infatti è quello che avviene fino all'ascissa del punto  $p_2$ . Da quel punto in poi la funzione risulta essere sempre positiva, come si può dedurre utilizzando la monotonia di  $f$  sulla curva  $f_y = 0$  e sulle rette orizzontali.

Possiamo quindi concludere che l'insieme di livello non ha altri rami, ed è quindi connesso.