

Analisi Matematica 2

Prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

8 aprile 2010

1. Risolvere l'equazione differenziale

$$y'(1 + \tan^2 y) = 1$$

con la condizione $y(0) = \pi$.

2. Risolvere l'equazione differenziale

$$2y' = \frac{\log x}{xy} - \frac{y}{x \log x}$$

con la condizione

$$y(1/e) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = k \sin\left(x + \frac{1}{k}\right) - k \sin x.$$

(a) Studiare la convergenza puntuale; (b) studiare la convergenza uniforme.

4. Data la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2},$$

(a) studiarne la convergenza totale (in quali intervalli?)

(b) calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2} dx;$$

(c) (*facoltativo*) provare che la seguente funzione

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} (x+k)^{-2}$$

è di classe C^∞ nell'intervallo $(7, +\infty)$.