

# Analisi Matematica 2

## Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

7 giugno 2010

1. Considerata la funzione  $f: \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = (x - \log y)^2 + (y - 2)^6 - 6(y - 2)^4$$

- (a) determinare i punti di massimo o di minimo relativo per  $f$  su  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ ;
- (b) calcolare la derivata direzionale di  $f$  nel punto  $(0, 1)$  nella direzione della retta  $x - y + 1 = 0$  nel verso delle  $y$  crescenti.
2. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = x \operatorname{arctg}(kx).$$

- (a) Determinare il limite puntuale;
- (b) studiare la convergenza uniforme su tutto  $\mathbb{R}$ .
3. Disegnare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{x \log y}{y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

al variare di  $y_0 \in (0, +\infty)$ . In particolare

- (a) dimostrare che le soluzioni massimali sono funzioni pari;
- (b) dire per quali valori di  $y_0$  la soluzione ha esistenza globale.
4. Calcolare, per  $Q = [0, 1]^2$ ,

$$\iint_Q (x - y) \sin(xy) \, dx \, dy.$$