Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2011-2012

Analisi Matematica Due
primo appello – 22 maggio 2012

1. Stabilire se è continua nell'origine la funzione $f(x,y)$ di due variabili reali definita da
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \qquad\qquad f(0,0)=0.$$
Stabilire inoltre se nell'origine la funzione è derivabile in ogni direzione $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ e se vale la formula di rappresentazione della derivata direzionale:
$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = f_x(0,0)\,\lambda_1 + f_y(0,0)\,\lambda_2$$

2. Risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' = 2\,(y')^2 - e^y\,(y')^3 \\ y(1) = 0, \quad y'(1) = 3 \end{cases}$$

3. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale
$$\omega = \frac{y+x}{x^2+y^2}\,dx \;+\; \frac{y-x}{x^2+y^2}\,dy$$
esteso all'arco di spirale γ di equazione
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases}, \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$$
nel verso delle t crescenti. Calcolare inoltre, nello stesso verso di percorrenza, l'integrale di ω esteso all'arco di spirale γ e al segmento congiungente i due punti estremi di γ.

4. Scrivere in coordinate polari (utilizzare le usuali coordinate polari, con centro nell'origine degli assi) l'equazione della circonferenza che passa per l'origine degli assi e che ha centro in un punto generico a distanza $r > 0$ dall'origine.
Calcolare poi, in coordinate polari, l'integrale doppio della funzione costante, uguale ad 1, sul cerchio C delimitato da tale circonferenza e verificare analiticamente il risultato:
$$\iint\limits_C 1\; dx\, dy \;=\; \pi r^2$$