Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2011-2012

Analisi Matematica Due

secondo appello – 12 giugno 2012

1. Stabilire se la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+(nx)^2}$$

converge totalmente negli intervalli: (a) $(-\infty,+\infty)$; (b) $\left[\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

2. Determinare su $\mathbb{R}^2$ i punti critici ed i punti di massimo e di minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = y^4 - 2y^2 + (y - \arctan x)^2 \sin \frac{y^2}{1+y^2}$$

3. Studiare e disegnare approssimativamente il grafico della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log(x-y) \\ y(1) = 0 \end{cases}.$$

In particolare studiare la monotonia e convessità della soluzione e stabilire se essa sia definita per ogni x a destra e/o a sinistra di $x_0 = 1$. Determinare inoltre eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della soluzione.

4. Per mezzo della formula di Gauss-Green

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{+\partial D} f\, dx$$

calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{1}{y^2}\, dx\, dy$$

esteso alla regione $D \subset \mathbb{R}^2$ del piano (x,y) delimitato al di sopra dalla retta di equazione $y = 1/2$ e al di sotto dell'arco di cicloide

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$