Analisi Matematica II (Prof. Paolo Marcellini)

Università degli Studi di Firenze

Corso di laurea in Matematica

Esercitazione del 25/02/2014

Michela Eleuteri [1]

eleuteri@math.unifi.it

web.math.unifi.it/users/eleuteri

Nel seguito indichiamo con [MS] il testo: P. Marcellini, C. Sbordone : "Esercitazioni di Matematica", 2 volume, parte seconda, Liguori Editore, 1995.

1 Curve

✍ **Esercizio 1.1.**

Data la curva γ parametrizzata da $(e^t \cos t, e^t \sin t)$ con $-2\pi \le t \le 2\pi$, dire se è semplice e/o chiusa e determinate la lunghezza di γ; determinate poi la retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 0$.

La curva data è semplice e non è chiusa. Se $\varphi(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$ allora $\varphi'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, quindi

$$|\varphi'(t)| = e^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2 \sin t \cos t} = e^t \sqrt{2}.$$

Allora

$$\ell(\gamma) = \int_{-2\pi}^{2\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^t \sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

Poi per $t = 0$ si ha $\varphi(0) = (1, 0)$ e $\varphi'(0) = (1, 1)$, e la tangente cercata ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \end{cases}$$

o cartesiana $y = x - 1$.

✍ **Esercizio 1.2.**

Determinare una parametrizzazione della curva chiusa γ che si ottiene percorrendo prima da sinistra verso destra il grafico di $f(x) = (1/3)(2x-1)^{3/2}$ per $1/2 \leq x \leq 1$ e poi da destra a sinistra il segmento congiungente gli estremi del grafico di f stessa. Disegnare quindi il sostegno di γ e calcolarne la lunghezza. Dire se la curva è chiusa o no; dire se è semplice o no.

Chiamiamo γ_1 il tratto di curva che si ottiene percorrendo il grafico di f da sinistra a destra e γ_2 il segmento che si ottiene congiungendo gli estremi di f (e percorrendolo da destra a sinistra). Dobbiamo scrivere una parametrizzazione di entrambi. Per γ_1 semplicemente poniamo $x = t$ e $y = f(t)$, con $t \in [1/2, 1]$ da cui si ha

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}(2t-1)^{3/2} & \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

Per γ_2 abbiamo diverse possibilità. Ne proponiamo due, ma altre scelte sono possibili.

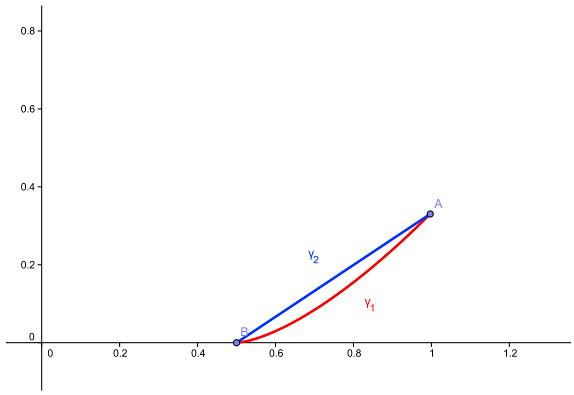

Figura 1: Esercizio 1.2: le curve γ_1 e γ_2

PRIMO MODO: una possibile scelta consiste nel pensare t come legge oraria che quindi varia con continuità nel percorrere le due curve in sequenza; quindi si può farlo variare a partire dall'istante di arrivo nel caso precedente (che è $t = 1$) fino a un istante successivo $t_0 > 1$ (per esempio si può scegliere per comodità $t_0 = 2$). In tal caso, una possibile parametrizzazione di x consiste nello scrivere il segmento che passa per i punti $t = 1, x = 1$ e $t = 2$, $x = 1/2$ che è $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t$. A questo punto per ottenere l'espressione di y in funzione di t si scrive prima il segmento passante per i punti $x = 1/2$, $y = 0$ e $x = 1$, $y = 1/3$, che risulta essere $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ e poi si sostituisce l'espressione precedente di x dentro questa appena ricavata per y, da cui

$$y = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}t\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}[2 - t],$$

cioè riassumendo

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{3}(2 - t) \qquad 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

SECONDO MODO: alternativamente si può far variare t in un "intervallo comodo" indipendentemente da un eventuale significato fisico del parametro, per esempio si può scegliere $t \in [0, 1]$. In tal caso allora scriviamo il segmento per i punti $t = 0$, $x = 1$ e $t = 1$, $x = 1/2$ ottenendo $x = -\frac{1}{2}t+1$ (stiamo dunque percorrendo il segmento da A a B come richiesto esplicitamente nell'esercizio). Notiamo che, indipendentemente dalla richiesta dell'esercizio, se avessimo percorso il segmento nella direzione opposta, la lunghezza di γ non sarebbe cambiata. Questo perché gli integrali di linea di prima specie sono invarianti per cambiamenti di parametrizzazione e il verso con cui si percorre una curva non cambia il risultato dell'integrale; non sarà così ovviamente nel caso degli integrali di linea di seconda specie.
A questo punto allora abbiamo ricavato prima l'espressione del segmento per i punti $x = 1$, $y = 1/3$ e $x = 1/2$, $y = 0$ che era $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$ quindi l'espressione di γ_2 ottenuta in questo secondo modo è

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{3}(1 - t) \qquad 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Naturalmente questa espressione si poteva ottenere da quella precedente con un opportuno cambio di variabile (cambio di parametrizzazione).
In ogni caso comunque si ha

$$\gamma_1'(t) = (1, \sqrt{2t-1}) \qquad \gamma_2'(t) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right).$$

Da cui

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \ell(\gamma_1) + \ell(\gamma_2) = \int_{1/2}^{1} |\gamma_1'(t)|\,dt + \int_{1}^{2} |\gamma_2'(t)|\,dt \\ &= \int_{1/2}^{1} \sqrt{1 + (2t-1)}\,dt + \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \int_{1/2}^{1} \sqrt{2t}\,dt + \frac{\sqrt{13}}{6} \\ &= \left[\sqrt{2}\,\frac{2}{3}\,t^{3/2}\right]_{1/2}^{1} + \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}. \end{aligned}$$

La curva data è chiusa e semplice.

✍ **Esercizio 1.3.**

([MS], Esercizio 5.19, pag. 297)
Calcolare la lunghezza dell'arco di cardioide descritta dalle equazioni in coordinate polari

$$\rho = 2r(1+\cos\theta) \qquad \theta \in [-\pi, \pi], \;\; r > 0.$$

Vogliamo applicare la formula relativa alla lunghezza di una curva in coordinate polari, cioè

$$\ell(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}\, d\theta.$$

Nel nostro caso si ha

$$\rho(\theta) = 2r(1+\cos\theta) \qquad \rho'(\theta) = -2r\sin\theta$$

da cui

$$\ell(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4r^2(1+\cos\theta)^2 + 4r^2\sin^2\theta}\, d\theta = 2\sqrt{2}r \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\, d\theta.$$

Effettuiamo un cambio di variabile $\theta = 2x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Si ha

$$\ell(\gamma) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\sqrt{2}r\sqrt{1+\cos(2x)}\, dx$$

ma dalle formule di duplicazione, osservando che

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1+\cos(2x) = 2\cos^2 x$$

si deduce allora (avendo preliminarmente osservato che $\cos x \geq 0$ se $x \in [-\pi/2, \pi/2]$)

$$\ell(\gamma) = 8r\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx = 16r.$$

2 Integrali di linea di prima specie

✍ **Esercizio 2.1.**

Calcolare l'integrale (curvilineo) di

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ il cui sostegno è il bordo ∂E di

$$E = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\right\}$$

e determinare la retta tangente a γ nel punto $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$.

Dalla linearità dell'integrale di linea si ha

$$\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_{\gamma_1} f(x,y)\, ds + \int_{\gamma_2} f(x,y)\, ds + \int_{\gamma_3} f(x,y)\, ds$$

dove

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0,\ \ 1 \le x \le 2\} \\
\gamma_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{1-x^2},\ \ 0 \le x \le 1\} \\
\gamma_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x^2/4,\ \ 0 \le x \le 2\}.
\end{aligned}$$

Scegliamo una parametrizzazione dei vari tratti di curva. Si ha ad esempio

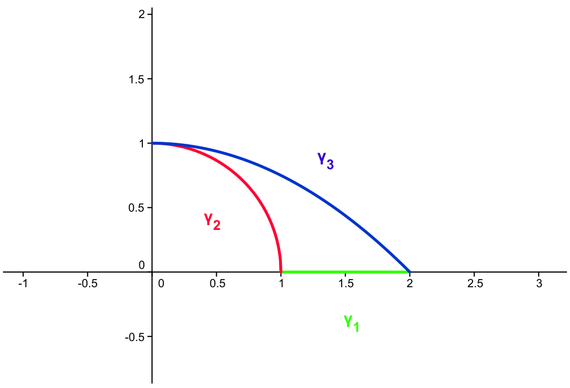

Figura 2: Esercizio 2.1: la curva γ

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \qquad 1 \le t \le 2, \end{cases}$$

da cui si deduce immediatamente

$$\int_{\gamma_1} f(x,y)\, ds = 0.$$

Inoltre

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

da cui

$$\int_{\gamma_2} f(x,y)\, ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma_2(t))\, |\gamma_2'(t)|\, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{4+\cos^2 t}}\, dt = [-\sqrt{4+\cos^2 t}]_0^{\pi/2} = \sqrt{5} - 2.$$

Infine

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1 - \dfrac{t^2}{4} & 0 \le t \le 2; \end{cases}$$

da cui

$$|\gamma_3'(t)| = \sqrt{1 + \left(-\frac{t}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+t^2}}{2}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} f(x,y)\, ds &= \int_0^2 f(\gamma_3(t))|\gamma_3'(t)|\, dt = \int_0^2 \frac{t(1-\frac{t^2}{4})}{\sqrt{4+t^2}} \cdot \frac{\sqrt{4+t^2}}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(t - \frac{t^3}{4}\right) dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{16}\right]_0^2 = \frac{1}{2}[2-1] = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Riassumendo dunque

$$\int_\gamma f(x,y)\, ds = \sqrt{5} - \frac{3}{2}.$$

Nel punto $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ c'è il tratto di parabola γ_3 da cui

$$\gamma_3'(t) = \left(1, -\frac{t}{2}\right)$$

e il punto $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ corrisponde al valore $t = 1$.
La forma parametrica della retta tangente è dunque

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}t & t \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

che in forma cartesiana diventa

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

✍ **Esercizio 2.2.**

> Si calcoli l'area della superficie S parallela all'asse delle z, compresa tra il piano $z = 0$ ed il grafico della funzione $f(x,y) = x\,y$ che interseca il piano $z = 0$ lungo la parte dell'ellisse
>
> $$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$
>
> contenuta nel primo quadrante.

Una parametrizzazione della curva γ che descrive la parte di ellisse contenuta nel primo quadrante data dal problema è

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x = 3\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

da cui

$$\gamma'(\theta) = \begin{cases} x = -3\,\sin\theta \\ y = 2\,\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta} = \sqrt{5\sin^2\theta + 4}.$$

Quindi, tenendo conto dell'interpretazione geometrica dell'integrale curvilineo rispetto alla lunghezza d'arco, l'area della superficie cilindrica S è data da

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(x,y)\,ds &= \int_0^{\pi/2} f(\gamma(\theta))\,|\gamma'(\theta)|\,ds = \int_0^{\pi/2} 6\,\sin\theta\,\cos\theta\,\sqrt{5\sin^2\theta + 4}\,d\theta \\ &= \frac{3}{5}\int_0^{\pi/2} 10\sin\theta\,\cos\theta\,\sqrt{5\sin^2\theta + 4}\,d\theta = \frac{3}{5}\left[\frac{(5\,\sin^2\theta + 4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{2}{5}\left(9^{3/2} - 4^{3/2}\right) = \frac{38}{5}. \end{aligned}$$

3 Esercizi proposti dal testo [MS]

Gli esercizi del testo [MS] sono <u>tutti</u> fortemente consigliati; in particolare si raccomanda di svolgere i seguenti:
<u>Esercizi:</u> 5.6, 5.8, 5.11, 5.12, 5.13, 5.15, 5.16, 5.17, 5.18, 5.20, 5.21, 5.22, 5.23, 5.24, 5.28, 5.29, 5.30, 5.31, 5.32, 5.33, 5.34, 5.35, 5.36, 5.37, 5.38, 5.39, 5.40, 5.41, 5.42, 5.43

4 Altri esercizi proposti

✍ **Esercizio 4.1.**

> Data la curva la cui equazione in coordinate polari è $\rho = 2\theta$, determinare un vettore tangente alla curva nel punto che corrisponde a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente nello stesso punto.

Determiniamo un'equazione parametrica della curva data in coordinate polari. Si ha

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = 2\theta\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = 2\theta\sin\theta. \end{cases}$$

A questo punto, un vettore tangente alla curva nel punto che corrisponde al generico θ dato da

$$\begin{cases} x'(\theta) = 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta \\ y'(\theta) = 2\sin\theta + 2\theta\cos\theta. \end{cases}$$

da cui un vettore tangente alla curva nel punto che corrisponde a $\theta = \frac{\pi}{2}$ dato da

$$\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$$

A questo punto, l'equazione cartesiana della retta tangente al punto corrispondente al generico θ_0

$$y'(\theta_0)(x - x(\theta_0)) = x'(\theta)(y - y(\theta_0))$$

per cui, se $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$2(x-0) = -\pi(y-\pi) \qquad\qquad 2x + \pi y = \pi^2.$$

✍ **Esercizio 4.2.**

> Data la curva γ avente equazione in coordinate polari $\rho = 2\theta^2$ con $-\pi \le \theta \le \pi$, determinate la lughezza di γ; determinate poi un versore tangente alla curva nel punto corrispondente a $\theta = \varepsilon$ e calcolate il limite per $\varepsilon \to 0^+$ di questo versore.

PRIMO MODO: Si può pensare di calcolare direttamente la lunghezza della curva con la formula che coinvolge le coordinate polari. In tal caso, posto $f(\theta) = 2\theta^2$ si avrebbe $f'(\theta) = 4\theta$ da cui

$$\ell(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\theta^4 + 16\theta^2}\, d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\theta\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta = \left[\frac{4}{3}(\theta^2+4)^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}(\pi^2+4)^{3/2} - \frac{32}{3}.$$

SECONDO MODO: alternativamente si può passare attraverso una rappresentazione parametrica della curva. In questo caso, posto

$$\varphi(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t) = (2t^2\cos t, 2t^2 \sin t)$$

con $-\pi \le t \le \pi$, si ha

$$\varphi'(t) = (4t\cos t - 2t^2\sin t, 4t\sin t + 2t^2\cos t)$$

da cui

$$|\varphi'(t)|^2 = 16t^2 + 4t^4 \qquad |\varphi'(t)| = \sqrt{4t^2(4+t^2)} = 2|t|\sqrt{4+t^2},$$

per cui

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi'(t)|\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 2|t|\sqrt{4+t^2}\, dt = 2\int_0^{\pi} 2t\sqrt{t^2+4}\, dt \\ &= \left[\frac{4}{3}(t^2+4)^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}(\pi^2+4)^{3/2} - \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Il versore cercato risulta

$$\frac{\varphi'(\varepsilon)}{|\varphi'(\varepsilon)|} = \frac{(4\varepsilon\cos\varepsilon - 2\varepsilon^2\sin\varepsilon, 4\varepsilon\sin\varepsilon + 2\varepsilon^2\cos\varepsilon)}{2|\varepsilon|\sqrt{4+\varepsilon^2}}$$

quindi, visto che si fa tendere $\varepsilon \to 0^+$, allora si può considerare $\varepsilon > 0$ e dunque

$$\tau(\varepsilon) = \left(\frac{2\cos\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon\sin\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}, \frac{2\sin\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon\cos\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}\right) \to (1,0)$$

✍ **Esercizio 4.3.**

Su un filo rigido di rame disposto lungo la curva $\alpha(t) = (t\,\cos t, t\,\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ è stata depositata una carica elettrica Q, che per effetto di un campo elettrico si dispone in modo che la sua densità lineare sia proporzionale alla quota; sia $\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2}$ la costante di proporzionalità. Determinare Q.
Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(-\pi, 0, \pi)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).

Osserviamo che se la curva α viene proiettata sul piano $z = 0$ si ottiene la *spirale di Archimede*. Poniamo

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = (t\,\cos t, t\,\sin t, t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

da cui

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\,\sin t, \sin t + t\,\cos t, 1)$$

e

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + t^2\,\sin^2 t - 2\,t\,\sin t\,\cos t + \sin^2 t + t^2\,\cos^2 t + 2\,t\,\sin t\,\cos t + 1} = \sqrt{t^2 + 2}.$$

Allora, per definizione di integrale curvilineo di prima specie, posto $f(x, y, z) = (3/2)^{3/2} z$ si ha

$$\begin{aligned} Q &= \int_\alpha (3/2)^{3/2} z\, ds = \int_0^{2\,\pi} f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\, |\alpha'(t)| (3/2)^{3/2}\, dt = \int_0^{2\,\pi} (3/2)^{3/2} t\, \sqrt{t^2 + 2}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\,(3/2)^{3/2} \frac{(t^2+2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\,\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,[(4\pi^2 + 2)^{3/2} - 2^{3/2}]. \end{aligned}$$

L'equazione cartesiana del piano normale alla curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ nel punto $\alpha(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ è data da

$$(x - x_0)\,\alpha_1'(t_0) + (y - y_0)\,\alpha_2'(t_0) + (z - z_0)\,\alpha_3'(t_0) = 0$$

e quindi inserendo i nostri parametri si ottiene: $x_0 = -\pi$, $y_0 = 0$, $z_0 = \pi$, $t_0 = \pi$ da cui $\alpha'(\pi) = (-1, -\pi, 1)$ e dunque

$$(x + \pi)\,\alpha_1'(\pi) + (y - 0)\,\alpha_2'(\pi) + (z - \pi)\,\alpha_3'(\pi) = 0.$$

L'equazione cercata perciò risulta

$$z - x - y\,\pi = 2\,\pi.$$

5 Esercizi tratti da temi d'esame di anni precedenti

✍ **Esercizio 5.1.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 12 SETTEMBRE 2002</u>
Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma 2y \cos x\, ds$$

sulla curva $\gamma(t) = (t, \sin t)$ per $t \in [0, \pi]$

Per la soluzione vedi la pagina http://web.math.unifi.it/users/paolini/didattica/2001/

✍ **Esercizio 5.2.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 13 GENNAIO 2003</u>
Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \sqrt[3]{x(y-1)}\, ds$$

sulla curva $\gamma(t) = 1 + x^2$ per $x \in [0, 1]$

Per la soluzione vedi la pagina http://web.math.unifi.it/users/paolini/didattica/2001/