Analisi Matematica II (Prof. Paolo Marcellini)

Università degli Studi di Firenze

Corso di laurea in Matematica

Esercitazioni del 04/03/2014 e 06/03/2014

Michela Eleuteri [1]

eleuteri@math.unifi.it

web.math.unifi.it/users/eleuteri

Nel seguito indichiamo con [MS] il testo: P. Marcellini, C. Sbordone : "Esercitazioni di Matematica", 2 volume, parte seconda, Liguori Editore, 1995.

1 Forme differenziali

PREMESSA: Useremo qui di seguito i seguenti risultati (tratti dal testo [MS] e dal relativo libro di testo)
Sia

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i$$

una FORMA DIFFERENZIALE LINEARE definita su $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, continua (a_i continui). Si dice che ω è esatta in A se esiste una PRIMITIVA f tale che $df(x) = \omega(x)$; se ω ha coefficienti di classe $\mathcal{C}^1$ su A connesso, si dice CHIUSA se

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) \qquad \forall x \in A, \quad i, j = 1, \dots n.$$

Se ω è esatta allora è chiusa ma in generale non vale il viceversa; il viceversa vale se A è stellato rispetto a un suo punto (in particolare se A è semplicemente connesso).
Se A è un aperto connesso e ω è una forma differenziale a coefficienti continui su A, allora ω è esatta se e soltanto se per ogni coppia di punti $x, y \in A$ e per ogni coppia di curve φ, ψ regolari a tratti con sostegno in A ed estremi x, y si ha

$$\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega;$$

nelle stesse ipotesi, ω è esatta se e soltanto se per ogni curva chiusa regolare a tratti φ con sostegno in A risulta

$$\int_\varphi \omega = 0.$$

Useremo inoltre il fatto che se γ_1 e γ_2 sono curve OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI (noi diremo semplicemente EQUIVALENTI) e ω è una forma chiusa in $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto connesso, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Cosa vuol dire "omotopicamente equivalenti"? Vuol dire che esiste una trasformazione continua che porta una curva sull'altra (deformandone il sostegno con continuità). Questa nozione di equivalenza NON È uguale a quella che si trova su [MS], pag. 347-348, perché in quel caso si cambia solo la parametrizzazione della curva, ma il sostegno rimane lo stesso. Qui invece intendiamo applicare una "trasformazione continua" al sostegno della curva.

La cosa è piuttosto chiara se ω è definita su tutto $\mathbb{R}^n$. Supponiamo invece che la nostra forma differenziale abbia un numero finito di singolarità (per semplicità prendiamo il caso $n = 2$ e una forma che abbia una sola singolarità, per esempio in $(0, 0)$). Allora è chiaro che in questo contesto, ω definita su $\mathbb{R}^2$ privato di una semiretta risulta ESATTA e pertanto, dai risultati precedenti, l'integrale della forma su una qualunque curva chiusa è nullo. Siano ora γ_1 e γ_2 due curve chiuse attorno alla singolarità. Allora costruiamo la seguente curva chiusa $\eta = \gamma_1 + \gamma_2 + s_1 + s_2$ dove s_1 e s_2 rappresentano il segmento che congiunge le due curve sulla semiretta di cui sopra, percorsi una volta in un senso e l'altra nel senso opposto. È chiaro che η è una curva chiusa che vive in una regione dove ω è esatta (infatti abbiamo escluso la singolarità). Allora dai risultati precedenti

$$\int_{\eta} \omega = 0$$

ma

$$\int_{\eta} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega + \int_{s_1} \omega - \int_{s_2} \omega$$

visto che le due curve γ_1 e γ_2 sono percorse in senso opposto; gli integrali sui segmenti poi si elidono perché sono percorsi nel verso opposto, da cui il risultato enunciato. Si può vedere ancora meglio questo risultato lavorando su ogni singolo quadrante e sommando gli integrali sui segmenti, che si elidono a due a due.

Quindi quando negli esercizi parleremo di CURVE EQUIVALENTI le intenderemo sempre in questo senso; pertanto quello che conta è *"quanti giri fa una curva attorno a una singolarità"*, al fine di cercare *circuiti omotopi* e pertanto equivalenti.

✍ **Esercizio 1.1.**

Determinare tra le seguenti forme differenziali quelle chiuse e quelle esatte

a) $-y\,dx + \sin x\,dy$

b) $xy\,dx + \dfrac{x^2}{2}\,dy$

c) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right)(y\,dx - x\,dy)$

a) Si ha

$$a_1(x,y) = -y \qquad a_2(x,y) = \sin x \qquad \frac{\partial a_1}{\partial y} = -1 \neq \cos x = \frac{\partial a_2}{\partial x}$$

La forma proposta non è chiusa pertanto non è esatta.

b) Si ha

$$a_1(x,y) = xy \qquad a_2(x,y) = \frac{x^2}{2} \qquad \frac{\partial a_1}{\partial y} = x = \frac{\partial a_2}{\partial x}$$

La forma differenziale è chiusa ed è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ che è un dominio semplicemente connesso, pertanto la forma è anche esatta. La famiglia di tutte le primitive è

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2}y + C \qquad C \in \mathbb{R}.$$

c) Si ha

$$a_1(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) y = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} \qquad a_2(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)(-x) = -\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}$$

quindi, essendo

$$\frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$$

si ha che la forma data è chiusa, ma il dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0 \vee y = 0\}$ non è semplicemente connesso, pertanto non possiamo dedurre a priori se la forma è anche esatta oppure no. D'altra parte, se esistesse una primitiva f si avrebbe $\nabla f(x,y) = (a_1, a_2)(x,y)$ da cui

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= a_1 \qquad \Rightarrow \qquad f(x,y) = \int a_1(x,y)\,dx + C(y) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + C(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= a_2 \qquad \Rightarrow \qquad f(x,y) = \int a_2(x,y)\,dy + C(x) = -\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + C(x)
\end{aligned}$$

quindi siccome la f deve essere la stessa nei due casi, l'unica possibilità è che sia $C(y) = C(x) = C \in \mathbb{R}$ e

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + C;$$

pertanto la forma data è anche esatta.

✍ **Esercizio 1.2.**

Sia γ_r la circonferenza di raggio r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x(t) = r\cos t \\ y(t) = r \sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Posto

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

determinare per ogni $r > 0$

$$\int_{\gamma_r} \omega.$$

Dopo aver verificato che ω è chiusa, determinare

$$\int_\eta \omega$$

quando η è la curva chiusa di equazione

$$\begin{cases} x(t) = (2 + 6\cos t)\sin t \\ y(t) = 12 + 9\sin t \qquad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Usiamo la definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale. Si ha

$$\gamma_r(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad \gamma_r'(t) = (-r\sin t, r\cos t)$$

da cui

$$\int_{\gamma_r} \omega = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}(-\sin t, \cos t) \cdot (-r\sin t, r\cos t)\, dt = 2\pi$$

INDIPENDENTEMENTE dal valore di $r > 0$.
Questo ci permette di dire che ω non è esatta, perché se fosse esatta, dalla caratterizzazione richiamata nella premessa si avrebbe che l'integrale lungo una qualunque linea chiusa sarebbe nullo.
Verifichiamo che ω è chiusa come richiede l'esercizio. Si ha

$$a_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad a_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \frac{\partial a_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial a_2}{\partial x}$$

Per altro il dominio di ω che è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso, quindi da questo non si sarebbe potuto dedurre a priori ω esatta (infatti è vero il contrario come dimostrato sopra).
Ora, è facile vedere che η è una curva chiusa (per $t = 0$ e per $t = 2\pi$ ci si trova sempre nel punto $(0, 12)$), per calcolare l'integrale di ω su η osserviamo che $y(t) > 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, pertanto la curva η non abbraccia la singolarità nell'origine, anzi vive in una regione (connessa) dove ω è esatta, pertanto possiamo concludere che l'integrale cercato su η è nullo.

✍ Esercizio 1.3.

Determinare $\int_\gamma \omega$ quando

$$\gamma(t) = (1+t^2)(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \qquad t \in [-1, 1]$$

e

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

Dall'esercizio 1.2 sappiamo che ω è chiusa ma non esatta e che l'integrale curvilineo su ogni circonferenza di raggio $r > 0$ è 2π indipendentemente dal valore di r.
Con facili calcoli si può osservare che la curva data è chiusa, nell'intervallo considerato è simmetrica rispetto all'asse x e si può esprimere in forma polare (attraverso un semplice cambio di

variabile) come

$$\rho = 1 + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 \qquad \theta \in [-2\pi, 2\pi].$$

Inoltre si avvolge per ben due volte (nell'intervallo considerato) attorno all'origine. Pertanto possiamo considerare come curva equivalente (nel senso espresso dalla premessa) una circonferenza centrata nell'origine e di raggio $r > 0$ qualunque percorsa due volte; allora dall'esercizio 1.2 possiamo concludere immediatamente che l'integrale cercato vale 4π.

✍ **Esercizio 1.4.**

Dato $r > 0$, $r \neq 1$, poniamo

$$\gamma(t) = (1 + r\cos t, r\sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

e

$$\omega = \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}.$$

Verificare che ω è chiusa ma non esatta. Determinare poi al variare di r il valore di $\int_\gamma \omega$

Si vede immediatamente che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ con

$$\omega_1(x,y) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} \qquad \omega_2(x,y) = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}.$$

Si vede subito che ω_1 è esatta (e quindi chiusa) con primitiva (ad esempio) $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$; ω_2 invece è solo chiusa ma non esatta (dall'esercizio 1.2); quindi il fatto che ω sia chiusa si deduce immediatamente dalla linearità della derivata, e inoltre si deduce che allo stesso modo di ω_2, anche ω non può essere esatta (perché invece ω_1 lo è).
Allora a questo punto, tenendo conto che ω ha una sola singolarità nell'origine, se $r < 1$ allora la curva γ vive in una regione dove ω è esatta e pertanto $\int_\gamma \omega = 0$.
Se invece $r > 1$ allora γ si avvolge attorno alla singolarità, quindi come curva equivalente possiamo considerare la circonferenza di centro l'origine e raggio r e dall'esercizio 1.2 si ha di nuovo che $\int_\gamma \omega = 2\pi$.

✍ **Esercizio 1.5.**

Mostrare che la forma

$$\omega = \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2+y^2} - \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$$

è chiusa. Determinare poi $\int_\gamma \omega$ per ognuna delle curve seguenti parametrizzate al variare di $t \in [0, 2\pi]$
a) $(\sin t - \cos t, 1 + (t-\pi)^2)$
b) $(\cos t - 1, \sin t)$
c) $(3 + 5\cos t, \sin t)$
d) $\left(\cos\frac{t}{2}, t^2 - 2\pi t + 2\right)$

Ripetere lo stesso esercizio con ω sostituita da

$$\tilde{\omega} = \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

Per mostrare che ω è chiusa si può procedere con un calcolo diretto oppure osservando che, attraverso opportuni cambi di variabile (es. $x+1 \mapsto z$) ω è la somma (pesata con segni opportuni) di due forme del tipo di quella considerata nell'esercizio 1.2 che come visto è chiusa ma non esatta. Dalla linearità della derivata si ottiene allora che anche ω (e poi $\tilde{\omega}$) è chiusa.

Inoltre si vede facilmente che ω (e lo stesso $\tilde{\omega}$) ha due singolarità, nei punti $(\pm 1, 0)$.

a) La curva è tale che $y(t) > 0$ per ogni $t \in [0, 2\pi]$, pertanto la curva vive in una regione dove ω è esatta e $\int_\gamma \omega = 0$. Stesso ragionamento per $\tilde{\omega}$.

b) La curva data è una circonferenza di raggio 1 centrata nel punto $(-1, 0)$, pertanto posto $\omega = \omega_1 - \omega_2$ e $\tilde{\omega} = \omega_1 + \omega_2$, dove

$$\omega_1(x,y) = \frac{y\,dx - (x+1)\,dy}{(x+1)^2 + y^2} \qquad \omega_2(x,y) = \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2 + y^2}$$

si ha che la curva data avvolge la singolarità di ω_1 mentre la stessa curva vive in una regione dove ω_2 è esatta; quindi (usando un opportuno cambio di variabile per ricondurci all'esercizio 1.2 e tenendo conto del segno differente della forma differenziale), si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 - \int_\gamma \omega_2 = -2\pi - 0 = -2\pi$$
$$\int_\gamma \tilde{\omega} = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = -2\pi - 0 = -2\pi$$

c) La curva rappresenta un'ellisse di semiassi rispettivamente 5 e 1 e che pertanto contiene entrambe le singolarità di ω e $\tilde{\omega}$. In questo caso, ragionando come al punto precedente, l'unica cosa che cambia è che stavolta anche per ω_2 la curva data avvolge la sua singolarità $(1,0)$, quindi (usando un opportuno cambio di variabile per ricondurci all'esercizio 1.2 e tenendo conto del segno differente della forma differenziale), si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \omega_1 - \int_\gamma \omega_2 = -2\pi - (-2\pi) = 0$$
$$\int_\gamma \tilde{\omega} = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2 = -2\pi - 2\pi = -4\pi$$

d) Osserviamo che in questo caso non si tratta di una curva chiusa, ma di una curva che connette i punti $(1,2)$ e $(-1,2)$ (nell'ordine). Inoltre essendo $-1 < \cos(t/2) < 1$ strettamente per $t \in (0, 2\pi)$, allora di sicuro la curva data non andrà mai a passare per le due singolarità di ω e $\tilde{\omega}$, venendo a trovarsi in una regione dove entrambe queste forme sono esatte. Pertanto è possibile calcolare gli integrali richiesti semplicemente considerando una qualunque altra curva regolare che connetta gli stessi punti, per esempio il segmento.

Prendendo la parametrizzazione

$$s(t) = (t, 2) \qquad -1 \leq t \leq 1 \qquad s'(t) = (1, 0)$$

si vede che si sta percorrendo il segmento nel verso opposto a quello considerato prendendo la curva γ, pertanto andrà considerato un segno meno nell'integrale finale. Si ha pertanto

$$\int_\gamma \omega = -\int_s \omega = -\int_{-1}^{1} \frac{2}{(t+1)^2+4}\, dt + \int_{-1}^{1} \frac{2}{(t-1)^2+4}\, dt = -\left[\arctan\left(\frac{t+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1}$$
$$+\left[\arctan\left(\frac{t-1}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

e analogamente

$$\int_\gamma \tilde{\omega} = -\frac{\pi}{2}.$$

2 Esercizi proposti dal testo [MS]

Gli esercizi del testo [MS] sono <u>tutti</u> fortemente consigliati; in particolare si raccomanda di svolgere tutti gli esercizi dei paragrafi 6A e 6B, del Capitolo 6 (pag. 347 e segg.)

3 Esercizi tratti da temi d'esame di anni precedenti

✍ **Esercizio 3.1.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 24 MAGGIO 2002</u>
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{-y}{x^2+4y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+4y^2}\, dy$$

(a) Dire se ω è chiusa nell'insieme di definizione
(b) Dire inoltre se è esatta in tale insieme
(c) Calcolare

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{-2\cos(\pi t) - 2\pi t \sin(\pi t)}{4t^2 + 4\cos^2(\pi t)}\, dt$$

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2001/index.html

✍ **Esercizio 3.2.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 30 MAGGIO 2002</u>
Posto

$$\omega = \frac{2x+y}{x^2+y^2}\, dx + \frac{2y-x}{x^2+y^2}\, dy, \qquad \gamma(t) = (t(25t^2-16), 9-18t^2), \qquad t \in [-1, 1]$$

calcolare $\int_\gamma \omega$.

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2001/index.html

✍ **Esercizio 3.3.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 26 MAGGIO 2004</u>
Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma e^x \sin y \, dx + (e^x \cos y + \arctan x)\, dy$$

dove γ è l'arco di parabola di equazione $y = 1 - x^2$ con primo estremo nel punto $(-1, 0)$ e secondo estremo nel punto $(1, 0)$.

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2003-analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.4.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 21 MAGGIO 2004</u>
Si consideri la forma differenziale ω definita nell'aperto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dall'espressione

$$\omega = \frac{y^3 \, dx - 3xy^2 \, dy}{x^2 + y^6}$$

(a) Dire se ω è chiusa in A
(b) Dire se ω è esatta in A
(c) Calcolare $\int_\gamma \omega$ sulla circonferenza $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2003-analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.5.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 12 LUGLIO 2004</u>
Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (e^y + y \cos x)\, dx + (x(1 + e^y) + \sin x)\, dy$$

sulla curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\ pi]$

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2003-analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.6.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 20 SETTEMBRE 2004</u>
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{x\, dy - y\, dx}{(x + y)^2 + y^2}.$$

(a) Dire se la forma è chiusa
(b) Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ sulla circonferenza unitaria $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$
(c) Dire se la forma è esatta.

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2003-analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.7.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 25 SETTEMBRE 2006</u>
Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ della forma differenziale

$$\omega = (2x^2y + 2xy^3 + 1)e^{x^2y}\,dx + (x^3 + x^2y^2 + 2y)\,e^{x^2y}\,dy$$

sulla curva

$$\gamma(t) = ((1+t)\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \qquad t \in [0,1]$$

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2005-analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.8.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 22 MAGGIO 2006</u>
Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ della forma differenziale

$$\omega = \frac{-2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy}{x^4 + y^4}$$

sulla curva

$$\gamma(t) = (t^4 - t^3, t^3 - 3t - 2) \qquad t \in [0, 2]$$

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2005-analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.9.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 05 GIUGNO 2008</u>
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{x\,dx + y\,dy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calcolare $\int_\gamma \omega$ sulla curva $\gamma(t) = (t, \sin t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

<u>Hint:</u> Si vede facilmente che la forma data è esatta (e quindi chiusa) sul suo dominio di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con primitiva (ad esempio)

$$f(x,y) = -\frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

pertanto, visto che $\gamma(\pi) = (\pi, 0)$ e $\gamma(2\pi) = (2\pi, 0)$, si ha che il valore dell'integrale è uguale a

$$f(2\pi, 0) - f(\pi, 0) = \frac{3}{8\pi^2}.$$

✍ **Esercizio 3.10.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 23 MAGGIO 2008</u>
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x+x^4+x^2y^2}{x^2+y^2}\,dy.$$

Dire se ω è chiusa e se è esatta. Dire inoltre se $\omega + x^2\,dy$ è chiusa o se è esatta. Calcolare $\int_\gamma \omega$ sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(4t), \sin(3t)) \qquad t \in [0, \pi/2].$$

Per la soluzione si veda http://lernejo.eu/paolini/didattica/2007/analisi/index.html

✍ **Esercizio 3.11.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 10 LUGLIO 2008</u>
Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy.$$

esteso alla curva γ costituita dall'arco di ellisse di equazioni parametriche

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases} \qquad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

<u>Hint:</u> Come già visto sopra, si vede facilmente che la forma data è esatta (e quindi chiusa) sul suo dominio di definizione $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, con primitiva (ad esempio) $f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$; pertanto, visto che $\gamma\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}, \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$, si ha

$$\int_\gamma \omega = f\left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) - f\left(\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) = 0$$

✍ **Esercizio 3.12.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 23 SETTEMBRE 2008</u>
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy\,dx - x^2\,dy}{x^4+y^2}$$

Dire se ω è chiusa e se è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Hint: È facile vedere che la forma data è esatta (e perciò chiusa) ad esempio su $\mathbb{R}^2 \setminus \{x = 0\}$, con primitiva (ad esempio)

$$f(x, y) = -\arctan \frac{y}{x^2},$$

ma questo non basta per concludere che ω sia esatta su tutto il suo dominio di definizione $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Però possiamo estendere F con continuità

$$\tilde{f}(x, y) := \begin{cases} -\arctan \dfrac{y}{x^2} & x \neq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

A questo punto occorre dimostrare che $\tilde{f}$ è differenziabile su Ω; quindi basta valutare la situazione nei punti $(0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$. Usando il fatto elementare che

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad x > 0 \text{ oppure } x < 0 \tag{1}$$

e gli sviluppi in serie di Taylor della funzione arcotangente, si ha

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\tilde{f}(h, y_0) - \tilde{f}(0, y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\arctan(y_0/h^2) + \pi/2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\arctan(h^2/y_0)}{h} = 0$$

e analogamente

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{\tilde{f}(0, y_0 + k) - \tilde{f}(0, y_0)}{k} = 0.$$

Allora si ottiene

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\tilde{f}(h, y_0 + k) - \tilde{f}(0, y_0) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0, y_0)h - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{-\arctan\left(\frac{y_0+k}{h^2}\right) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\arctan\left(\frac{h^2}{y_0+k}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Quindi $\tilde{f}$ è una primitiva su tutto Ω e la forma data è esatta (perciò anche chiusa).

✍ **Esercizio 3.13.**

TEMA D'ESAME DEL 04 FEBBRAIO 2009
Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y\,dx - x\,dy}{(y - x)^2 + x^2}$$

Dire se ω è chiusa e se è esatta.

Hint: La forma ha una singolarità nell'origine, quindi dobbiamo chiederci se è chiusa e/o esatta nel suo dominio di definizione $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. È facile per esempio trovare una primitiva nella regione $x \neq 0$

$$f(x, y) = -\arctan\left(\frac{y}{x} - 1\right)$$

ma questo non basta a concludere che ω sia esatta su tutto Ω. Però possiamo estendere f con continuità

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} -\arctan\left(\dfrac{y}{x}-1\right) & x \neq 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & x = 0 \end{cases}$$

A questo punto occorre dimostrare che $\tilde{f}$ è differenziabile su Ω; quindi basta valutare la situazione nei punti $(0, y_0)$, con $y_0 \neq 0$. Usando di nuovo il fatto elementare (1) e gli sviluppi in serie di Taylor della funzione arcotangente, si ha, se $y_0 \neq 0$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\tilde{f}(h,y_0) - \tilde{f}(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\arctan\left(\frac{y_0}{h}-1\right) + \frac{\pi}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan\left(\frac{h}{(y_0-h)}\right)}{h} = \frac{1}{y_0}$$

e analogamente

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{\tilde{f}(0,y_0+k) - \tilde{f}(0,y_0)}{k} = 0.$$

Allora si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\tilde{f}(h,y_0+k) - \tilde{f}(0,y_0) - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0,y_0)h - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-\arctan\left(\frac{y_0+k}{h}-1\right) + \frac{\pi}{2} - \frac{h}{y_0}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\arctan\left(\frac{h}{y_0+k-h}\right) - \frac{h}{y_0}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Quindi $\tilde{f}$ è una primitiva su tutto Ω e la forma data è esatta (perciò anche chiusa).

✍ **Esercizio 3.14.**

TEMA D'ESAME DEL 10 MAGGIO 2010

Calcolare

$$\int_\gamma (7x^6 - 3y^2)\,dx - 6xy\,dy$$

sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(3t), \sin^2 t) \qquad t \in [0, \pi/2].$$

Hint: È facile vedere che la forma data è esatta (e quindi chiusa) su tutto $\mathbb{R}^2$, con primitiva (ad esempio) $f(x,y) = x^7 - 3xy^2$. Quindi l'integrale cercato vale $f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0)) = f(0,1) - f(1,0) = -1$.

✍ **Esercizio 3.15.**

TEMA D'ESAME DEL 10 MAGGIO 2010

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}$$

sulla curva

$$\gamma(t) = ((2+\cos t)\cos(2t), (2+\cos t)\sin(2t)) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Hint: Facendo un cambio di variabile, ponendo $\theta = 2t$ si ottiene che la curva data può essere espressa in forma polare

$$\rho = 2\cos\frac{\theta}{2} \qquad \theta \in [0, 4\pi].$$

Andando a studiare il segno di $x(\theta)$ e $y(\theta)$ assieme al comportamento della curva nei punti $\theta = k\pi$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4$, si vede facilmente che la curva si avvolge due volte attorno all'origine; pertanto tenendo conto dei risultati ottenuti negli esercizi 1.3 e 1.4, si ottiene che il risultato desiderato anche in questo caso è 4π

✍ **Esercizio 3.16.**

TEMA D'ESAME DEL 09 SETTEMBRE 2010
Si consideri la curva $\gamma : [-3, 3] \to \mathbb{R}^2$ definita dalle equazioni parametriche $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con

$$x(t) = t(9 - t^2) \qquad y(t) = (t^2 - 1)(t^2 - 4) \qquad t \in [-3, 3]$$

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Hint: Da un rapido studio del segno di $x(t)$ e $y(t)$ assieme al comportamento della curva per $t = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ si vede facilmente che la curva (chiusa) non si avvolge intorno all'origine, pertanto vivendo in una regione dove la forma data è esatta l'integrale cercato fa 0.

✍ **Esercizio 3.17.**

TEMA D'ESAME DEL 22 MAGGIO 2012
Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = \frac{y + x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y - x}{x^2 + y^2}\,dy$$

esteso all'arco di spirale γ di equazione

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right]$$

nel verso delle t crescenti. Calcolare inoltre, nello stesso verso di percorrenza l'integrale di ω esteso all'arco di spirale γ e al segmento congiungente i due punti estremi di γ.

Hint: Si vede facilmente che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dove

$$\omega_1 = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2} \qquad \omega_2 = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$$

con ω_2 esatta e ω_1 chiusa ma non esatta (in tutto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$).

A questo punto, con calcoli diretti (osserviamo che il verso è quello corretto)

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{\pi/2}^{\pi/2+2\pi} \left(\frac{t\sin t}{t^2}, -\frac{t\cos t}{t^2}\right)(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = -2\pi$$

mentre per ω_2 che è esatta e di cui una primitiva è $f(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, si ha

$$\int_\gamma \omega_2 = f(0,\pi/2+2\pi) - f(0,\pi/2) = \frac{1}{2}\log\left((\pi/2+2\pi)^2/(\pi^2/4)\right) =: \kappa$$

quindi riassumendo

$$\int_\gamma \omega = \kappa - 2\pi.$$

Passando alla seconda parte dell'esercizio, osserviamo che essendo una curva chiusa quella richiesta dal testo (l'unione di γ e del segmento) si ha immediatamente $\int_\gamma \omega_2 = 0$ perché ω_2 esatta, mentre per $\int_\gamma \omega_1$ possiamo sfruttare l'esercizio 1.2 per concludere (usando il segno opportuno) che l'integrale cercato fa -2π. Quindi il valore richiesto dall'esercizio è -2π.

✍ **Esercizio 3.18.**

TEMA D'ESAME DEL 10 LUGLIO 2012

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy$$

esteso alla curva γ di $\mathbb{R}^2$ di equazioni

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 1+\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases} \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

nel verso delle t crescenti.

Hint: La forma differenziale è ben definita per $x \neq 0$ e in questo dominio si vede facilmente che è esatta (e quindi chiusa) con primitiva (ad esempio)

$$f(x,y) = \frac{y}{x}.$$

La curva γ rappresenta un quarto di circonferenza centrata in $(1,0)$ e di raggio 1, pertanto il valore dell'integrale è $f(1,1) - f(2,0) = 1$.

✍ **Esercizio 3.19.**

TEMA D'ESAME DEL 05 SETTEMBRE 2012

Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\omega = \frac{y+x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}\,dy$$

esteso all'ellisse γ di equazione

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 3\sin t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

nel verso delle t crescenti.

Hint: L'ellisse data è omotopicamente equivalente a una circonferenza centrata nell'origine, quindi mettendo insieme i risultati degli esercizi precedenti, possiamo concludere che l'integrale cercato vale -2π.

✍ **Esercizio 3.20.**

TEMA D'ESAME DEL 17 GENNAIO 2013
Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale

$$\int_\gamma \frac{2xy}{(1+x^2)^2}\,dx - \frac{1}{(1+x^2)}\,dy$$

esteso alla curva γ di equazione $x = \sin y$ con $y \in [0,\pi]$ orientato nel verso delle y crescenti.

Hint: La forma differenziale è esatta (e quindi chiusa) su tutto il piano con primitiva (ad esempio)

$$f(x,y) = -\frac{y}{(1+x^2)}.$$

Pertanto il valore dell'integrale richiesto è $f(\gamma(\pi)) - f(\gamma(0)) = f(0,\pi) - f(0,0) = -\pi$.