Analisi Matematica II (Prof. Paolo Marcellini)

Università degli Studi di Firenze

Corso di laurea in Matematica

Esercitazione del 21/03/2014

Michela Eleuteri [1]
eleuteri@math.unifi.it
web.math.unifi.it/users/eleuteri

Nel seguito indichiamo con [MS] il testo: P. Marcellini, C. Sbordone : "Esercitazioni di Matematica", 2 volume, parte seconda, Liguori Editore, 1995.

1 Formule di Gauss-Green

PREMESSA: (vedi [MS], pag. 374 e segg.) Per ogni A dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, e $f = f(x,y)$ funzione di classe $\mathcal{C}^1(A)$, valgono le seguenti relazioni, dette FORMULE DI GAUSS-GREEN

$$\int\int_A \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial A^+} f\, dy \tag{1}$$

$$\int\int_A \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial A^+} f\, dx \tag{2}$$

dove ∂A^+ è la frontiera di A orientata positivamente.
Mettendo insieme le due formule, si ha che data una forma differenziale con coefficienti di classe $\mathcal{C}^1$ del tipo $\omega = (P, Q)$, allora

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\gamma^+} P\, dx + Q\, dy = \int\int_A (Q_x - P_y)\, dx\, dy, \tag{3}$$

dove γ è il bordo di A orientato positivamente.
Dall'ESERCIZIO 6.30 si possono ricavare le formule per esprimere l'area di ogni dominio regolare, in questo modo

$$\text{area}(A) = \int\int_A 1\, dx\, dy = \int_{\gamma^+} x\, dy \tag{4}$$

e anche

[1] È vietata la diffusione e la riproduzione di questo materiale o parte di esso (particolarmente a fini commerciali) senza il consenso della sottoscritta. Queste note, che riprendono in parte gli esercizi svolti durante le ore di esercitazioni frontali, costituiscono parte integrante *(ma non esclusiva!)* del corso di Analisi II e pertanto, ai fini dell'esame, devono essere adeguatamente integrate con il materiale indicato dal docente titolare del corso.

$$\text{area}(A) = \iint_A 1\,dx\,dy = \int_{\gamma^+} (-y)\,dx \tag{5}$$

o anche mettendo insieme (4) e (5) (oppure direttamente dalla (2), ponendo $Q = x$ e $P = -y$, da cui $Q_x = 1$ e $P_y = -1$)

$$\text{area}(A) = \iint_A 1\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} \omega \tag{6}$$

dove $\omega(x, y) = (-y, x)$ (si noti si tratta di una forma NON esatta, altrimenti tutti gli integrali fatti lungo curve chiuse sarebbero stati nulli).
Osserviamo pertanto che le formule di Gauss-Green possono essere usate in due direzioni possibili:
➜ usando integrali doppi per calcolare integrali curvilinei (di forme differenziali);
➜ usando integrali curvilinei (di forme differenziali) per calcolare integrali doppi (ad esempio: area di domini piani, magari racchiusi da curve)
In particolare noi vedremo esercizi che vanno in entrambe queste direzioni.

✍ **Esercizio 1.1.**

Usare le formule di Gauss-Green per valutare l'integrale:

$$\int_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy)$$

dove:
(i) γ è il bordo del quadrato di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$;
(ii) γ è l'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

(i) Usiamo la formula (3); nel nostro primo caso il dominio A è dato dal quadrato e γ è il perimetro del quadrato. Inoltre $P = y^2$ e $Q = x$ da cui $Q_x = 1$ e $P_y = 2y$.
Pertanto si ha

$$\int_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy) = \iint_A (1 - 2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2y)\,dx\,dy = 1 - \int_0^1 [y^2]_0^1\,dx = 0.$$

(ii) Le premesse sono le stesse che nel punto precedente, solo che in questo caso A è l'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ in forma canonica che possiamo parametrizzare nel seguente modo:

$$x = a\rho\cos\theta \qquad y = b\rho\sin\theta \qquad |J| = a\,b\,\rho \tag{7}$$

essendo $|J|$ il modulo del determinante della matrice Jacobiana corrispondente alla trasformazione. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma^+} (y^2 dx + x dy) &= \iint_D (1 - 2y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 a\,b\,\rho\,(1 - 2b\rho\sin\theta)\,d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 a\,b\,\rho - \int_0^{2\pi} \int_0^1 2a\,b^2\,\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi\, a\, b - 2\, a\, b^2 \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\theta \right) \\
&= \pi\, a\, b + 0 = \pi\, a\, b.
\end{aligned}
$$

Alternativamente si poteva osservare, prima di passare in coordinate polari, che la seconda parte della funzione integranda $-2y$ è ovviamente una funzione dispari nella variabile y mentre il dominio (l'ellisse) è ad esempio simmetrico rispetto all'asse y, pertanto il contributo dovuto a quella parte di integrale risulta nullo; rimane pertanto l'integrale di 1 sull'ellisse cioè l'area dell'ellisse che vale dunque $\pi\, a\, b$. Confronteremo questo risultato con quello dell'esercizio successivo.

✍ **Esercizio 1.2.**

Usare le formule di Gauss-Green per valutare l'area dell'ellisse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Usando la formula (6), dove nel nostro caso A è l'ellisse (bordo dell'ellisse, non la parte interna!) che si può pertanto descrivere parametricamente con

$$
x = a\cos\theta \qquad y = b\sin\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi); \tag{8}
$$

si noti la differenza tra (7) e (8)! La prima rappresenta parametricamente tutta la parte interna dell'ellisse, ed è pertanto descritta da una trasformazione del piano in sé; la seconda descrive il <u>bordo</u> dell'ellisse, quindi una curva e pertanto un solo parametro varia.
Alla fine dunque si ottiene

$$
\begin{aligned}
\text{area}(A) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-b\sin\theta, a\cos\theta) \cdot (-a\sin\theta, b\cos\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\, b\, \sin^2\theta + a\, b\, \cos^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a\, b\, d\theta = \pi\, a\, b.
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.3.**

Calcolare l'area racchiusa dalla curva piana (astroide) di equazioni parametriche

$$
\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].
$$

Usiamo la formula (6). Indicata con A l'astroide si ha

$$
\begin{aligned}
\text{area}(A) &= \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} (-y\, dx + x\, dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-\sin^3\theta, \cos^3\theta) \cdot (-3\cos^2\theta\sin\theta, 3\sin^2\theta\cos\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3\cos^2\theta\sin^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^4\theta)\, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 3\cos^2\theta\sin^2\theta[\sin^2\theta + \cos^2\theta]\, d\theta \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} \right]^2 d\theta = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{3}{16} \int_0^{4\pi} \sin^2 z\, dz = \frac{3}{16} \left[\frac{z}{2} - \frac{1}{2} \sin z \cos z \right]_0^{4\pi} = \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 1.4.**

Sia γ una curva chiusa semplice e regolare di equazione polare $\rho = f(\theta)$, $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$. Se γ è la frontiera di A, dimostrare che:

$$\text{area}(A) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 \, d\theta.$$

Se la curva data è espressa in forma polare allora una curva parametrica è data da

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = f(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = f(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\gamma'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta. \end{cases}$$

A questo punto, usando la formula (6) si deduce

$$\begin{aligned} \text{area}(A) &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} (-f(\theta)\sin\theta, f(\theta)\cos\theta) \cdot (f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [-f(\theta)f'(\theta)\sin\theta\cos\theta + f(\theta)^2\sin^2\theta + f(\theta)f'(\theta)\cos\theta\sin\theta + f(\theta)^2\cos^2\theta] \, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)^2] \, d\theta. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.5.**

Calcolare l'area del dominio piano compreso tra la curva di equazioni parametriche $x = \frac{1}{2}t - t^2$, $y = t^2$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$, e l'asse y.

Il dominio piano richiesto dal testo è formato dalla parte di piano contenuto nel primo quadrante e compreso tra la curva data e l'asse y. Se $t = 0$ allora $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$ mentre se $t = 1/2$, $x(1/2) = 0$ mentre $y(1/2) = 1/4$. Quindi il bordo di tale dominio è costituito dalla curva

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2}t - t^2 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}$$

percorsa nel verso antiorario che coincide con il verso di percorrenza di t (cioè dal punto $O = (0,0)$ al punto $P = (0, 1/4)$), unita alla curva γ_2 costituita dal segmento OP percorso dal punto P al punto O; pertanto ad esempio prendendo la parametrizzazione

$$\gamma_2(t) = (0, t) \qquad 0 \le t \le 1/4$$

si dovrà considerare un segno meno nell'integrale di linea corrispondente a causa del differente verso di parametrizzazione necessario.

Riassumendo si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(A) &= \frac{1}{2}\int_{\gamma^+}(-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1}(-y\,dx + x\,dy) - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2}(-y\,dx + x\,dy) \\ = \quad &\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\left(-t^2, \frac{1}{2}t - t^2\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - 2t, 2t\right)dt - \frac{1}{2}\int_0^{1/4}(-t,0)\cdot(0,1)\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{1/2} t^2\,dt = \frac{1}{96}.\end{aligned}$$

Si provi per esercizio che lo stesso risultato si poteva ottenere semplicemente usando le formule (4) e/o (5).

✍ **Esercizio 1.6.**

Dati i punti $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, sia γ la curva chiusa data dall'unione del segmento OA, dall'arco di circonferenza di centro O e raggio 1 che congiunge A con B e dal segmento BO. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ (usando la definizione) dove γ è orientata in senso antiorario e ω è la forma differenziale

$$\omega = \frac{3x}{x^2+y^2+1}dx - \frac{3y}{x^2+y^2+1}dy.$$

Successivamente verificare il risultato ottenuto usando le formule di Gauss-Green.

Parametrizziamo la curva γ. Si ha:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

dove

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(t) = (t,0) & 0 \le t \le 1 & \gamma_1'(t) = (1,0) \\ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) & 0 \le t \le \pi/2 & \gamma_2'(t) = (-\sin t, \cos t) \\ \gamma_3(t) = (0,t) & 0 \le t \le 1 & \gamma_3'(t) = (0,1) \end{array}$$

dove però (attenzione ai segni!)

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega - \int_{\gamma_3}\omega.$$

A questo punto

$$\int_{\gamma_1}\omega = \int_0^1 \omega(\gamma_1(t))\cdot\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^1 \frac{3t}{t^2+1}\,dt = \frac{3}{2}\log(t^2+1)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}\log 2.$$

Analogamente

$$\int_{\gamma_3}\omega = \int_0^1 \omega(\gamma_3(t))\cdot\gamma_3'(t)\,dt = -\int_0^1 \frac{3t}{t^2+1}\,dt = -\frac{3}{2}\log(t^2+1)\Big|_0^1 = -\frac{3}{2}\log 2.$$

Infine

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2}\omega &= \int_0^{\pi/2}\omega(\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{3\cos t}{2}(-\sin t) - \frac{3\sin t}{2}\cos t\right)dt \\ = &\int_0^{\pi/2} -3\sin t\cos t\,dt = -\frac{3}{2}[\sin^2 t]_0^{\pi/2} = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Dunque riassumendo, e tenendo conto dei segni davanti agli integrali si ha

$$\int_\gamma \omega = -\frac{3}{2} + 3\log 2.$$

Verifichiamo ora il risultato ottenuto applicando la formula di Gauss-Green (3). Dobbiamo calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{3y}{x^2+y^2+1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x}{x^2+y^2+1}\right) dx\,dy = \iint_D \frac{12xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy,$$

dove D è il quarto di cerchio racchiuso dalla curva γ. Abbiamo due possibilità:
PRIMO MODO: vediamo il quarto di cerchio come dominio normale rispetto a uno degli assi, per esempio:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$

da cui

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{12xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{12xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,dy = \int_0^1 6x\,dx \left[-\frac{1}{x^2+y^2+1}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \left(-3x + \frac{6x}{x^2+1}\right) dx = \left[-\frac{3}{2}x^2 + 3\log(x^2+1)\right]_0^1 = -\frac{3}{2} + 3\log 2.\end{aligned}$$

SECONDO MODO: passiamo in coordinate polari. Si ha:

$$D = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi) : 0 \le \rho \le 1,\ \ 0 \le \theta \le \pi/2\}$$

da cui

$$\iint_D \frac{12xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx\,dy = \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{12\rho^3}{(\rho^2+1)^2}\,d\rho\right).$$

Occupiamoci prima di tutto dell'integrale nella variabile ρ. Osserviamo che

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2+1)^2 = 4\rho + 4\rho^3 \qquad \text{e} \qquad \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{(\rho^2+1)}\right) = -\frac{2\rho}{(\rho^2+1)^2}$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{12\rho^3}{(\rho^2+1)^2}\,d\rho &= 3\int_0^1 \frac{4\rho+4\rho^3}{(\rho^2+1)^2}\,d\rho - 6\int_0^1 \frac{2\rho}{(\rho^2+1)^2}\,d\rho \\ &= 3\left[\log[(\rho^2+1)^2]\right]_0^1 + 6\left[\frac{1}{1+\rho^2}\right]_0^1 = 3\log 4 - 3 + 6 = 6\log 2 - 3.\end{aligned}$$

quindi riassumendo

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{12xy}{(x^2+y^2+1)^2}\,dx &= \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^1 \frac{12\rho^3}{(\rho^2+1)^2}\,d\rho\right) \\ &= \frac{1}{4}[-\cos(2\theta)]_0^{\pi/2}\,[6\log 2 - 3] = -\frac{3}{2} + 3\log 2.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 1.7.**

Si calcoli l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = (\sin(y + x)dx + \cos(x - y)dy)$$

lungo la curva data dai lati del triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0)$ e $(0, 1)$, percorsi in senso antiorario.

Questo esercizio può essere risolto in due modi.
PRIMO MODO. Siano

$$\gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x \ \wedge \ 0 \le x \le 1\}$$
$$\gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \ \wedge \ 0 \le y \le 1\}$$
$$\gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \ \wedge \ 0 \le x \le 1\}$$

Troviamo una parametrizzazione di questi tre segmenti. Si ha

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \gamma_1'(t) = (-1, 1).$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2 \qquad \gamma_2'(t) = (0, -1).$$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad 2 \le t \le 3 \qquad \gamma_3'(t) = (1, 0).$$

A questo punto

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega = \int_0^1 \{\sin[(1 - t) + t]\,(-1) + \cos[(1 - t) - t]\,1\}\,dt$$

$$+ \int_1^2 \{\sin[(2 - t) + 0]\,0 + \cos(t - 2 + 0)\,(-1)\}\,dt$$

$$+ \int_2^3 \{\sin[t - 2 + 0]\,1 + \cos(t - 2 - 0)\,0\}\,dt = \int_0^1 [-\sin 1 + \cos(1 - 2t)]\,dt$$

$$+ \int_1^2 -\cos(t - 2)\,dt + \int_2^3 \sin(t - 2)\,dt$$

$$= -\sin 1 - \frac{1}{2}\sin(1 - 2t)\Big|_0^1 - \sin(t - 2)\Big|_1^2 - \cos(t - 2)\Big|_2^3 = -\sin 1 - \frac{1}{2}\sin(-1) + \frac{1}{2}\sin 1$$

$$+ \sin(-1) - \cos 1 + 1 = 1 - \sin 1 - \cos 1.$$

SECONDO MODO. Usiamo la formula (3). Nel nostro caso $P = \sin(y+x)$, $Q = \cos(x-y)$, A è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Allora

$$\int_\gamma \omega = \int\int_A [-\sin(x-y) - \cos(y+x)]\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} -\sin(x-y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{1-x} -\cos(y+x)\, dy\, dx = \int_0^1 [-\cos(x-y)]\Big|_0^{1-x} dx + \int_0^1 [-\sin(y+x)]\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (-\cos(x-1+x) + \cos x)\, dx + \int_0^1 (-\sin 1 + \sin x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin(2x-1)\right]\Bigg|_0^1 + \sin x\Big|_0^1 - \sin 1 + (-\cos x)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\sin(-1) + \sin 1 - \sin 1 - \cos 1 + 1 = 1 - \cos 1 - \sin 1.$$

✍ **Esercizio 1.8.**

Si consideri la curva γ in $\mathbb{R}^2$ chiusa, regolare, semplice, parametrizzata da

$$\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \qquad t \in [0,1].$$

Calcolare l'area della regione limitata da γ.

Utilizzando ad esempio la formula (6), si ha che, detta E la regione limitata da γ

$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ E} x\, dy - y\, dx.$$

A questo punto

$$\gamma'(t) = (1 - 2t, 1 - 3t^2)$$

per cui, avendo osservato che la parametrizzazione proposta descrive la curva in senso antiorario (✎ ESERCIZIO) si ha

$$\begin{aligned}\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ E} x\, dy - y\, dx \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_0^1 [(t^3 - t)(1-2t) + (t - t^2)(1 - 3t^2)]\, dt \\ &= \quad \frac{1}{2}\int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

Il risultato conferma che l'orientazione della curva era corretta (il valore dell'area non può essere negativo).

✍ **Esercizio 1.9.**

Sia
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16,\ (x-1)^2 + y^2 > 1,\ (x+1)^2 + y^2 > 1\}.$$
Quanto vale
$$\frac{3}{4}\int_{\partial^+ E} -y\,dx + x\,dy?$$

Utilizzando una conseguenza della formula di Gauss-Green nel piano, si ha che
$$\text{Area}(E) = \frac{1}{2}\int_{\partial^+ E} x\,dy - y\,dx$$
quindi applicandola al nostro caso
$$\frac{3}{4}\int_{\partial^+ E} x\,dy - y\,dx = \frac{3}{2}\text{Area}(E).$$
Quindi essendo E la parte esterna ai due cerchi di raggio 1 e rispettivamente di centro -1 e 1 e interna al cerchio di centro l'origine e raggio 4, avrà area $\text{Area}(E) = 16\pi - 2\pi = 14\pi$, quindi quello che si richiede è $3/2\text{Area}(E) = 21\pi$.

✍ **Esercizio 1.10.**

Sia D la regione piana delimitata dall'asse x e dall'arco di parabola $y = 4-x^2$ con $-2 \leq x \leq 2$. Calcolare le coordinate del baricentro supponendo la densità costante e trasformando gli integrali doppi in integrali di linea.

Ricordiamo le coordinate del baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$ per un dominio piano come l'insieme D
$$\bar{x} = \frac{1}{|D|}\iint_D x\,dx\,dy \qquad \bar{y} = \frac{1}{|D|}\iint_D y\,dx\,dy.$$
Parametrizziamo il bordo, dando un'orientazione positiva, ossia in senso antiorario. Per il segmento si ha
$$\gamma_1(t) = (t, 0) \qquad t \in [-2, 2]$$
da cui
$$\gamma'(t) = (1, 0).$$
D'altra parte, per la parte di curva il cui sostegno è la parabola, possiamo usare la seguente parametrizzazione e poi cambiare di segno all'integrale corrispondente:
$$\gamma_2(t) = (t, 4 - t^2) \qquad t \in [-2, 2]$$
con
$$\gamma_2'(t) = (1, -2t).$$

A questo punto allora, usando per esempio la prima formula di Gauss-Green

$$\iint_D Q_x \, dx \, dy = \int_{\partial^+ D} Q \, dy \tag{9}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} |D| &= \iint_D dx \, dy = \int_{\partial^+ D} x \, dy = \int_{\gamma_1} x \, dy - \int_{\gamma_2} x \, dy \\ &= \int_{-2}^{2} (0,t) \cdot (1,0) \, dt - \int_{-2}^{2} (0,t) \cdot (1,-2t) \, dt = 0 + \int_{-2}^{2} 2t^2 \, dt = \frac{2}{3}[t^3]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

D'altra parte, per la simmetria del problema, il valore dell'ascissa del baricentro dovrebbe essere zero. Ritroviamo questo risultato usando di nuovo la formula (9). Si ha

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{|D|} \iint_D x \, dx \, dy = \frac{3}{32} \int_{\partial^+ D} \frac{x^2}{2} \, dy = \int_{\gamma_1} \frac{x^2}{2} \, dy - \int_{\gamma_2} \frac{x^2}{2} \, dy \\ &= 0 + \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} t^3 \, dt = 0, \end{aligned}$$

perché integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico.

Infine, usando stavolta la seconda formula di Gauss-Green

$$\iint_D P_y \, dx \, dy = - \int_{\partial^+ D} P \, dx$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{|D|} \iint_D y \, dx \, dy = -\frac{3}{32} \int_{\partial^+ D} \frac{y^2}{2} \, dx = 0 + \frac{3}{32} \int_{\gamma_2} \frac{y^2}{2} \, dx = \frac{3}{32} \int_{-2}^{2} \frac{(4-t^2)^2}{2} \, dt \\ &= \frac{3}{64} \int_{-2}^{2} (16 - 8t^2 + t^4) \, dt = \frac{3}{32} \left[16t - \frac{8}{3}t^3 + \frac{t^5}{5} \right]_0^2 = 3 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

2 Esercizi proposti dal testo [MS]

Gli esercizi del testo [MS] sono tutti fortemente consigliati; in particolare si raccomanda di svolgere i seguenti:
Esercizi: 6.27 (teorema della divergenza), 6.28 (formula di integrazione per parti), 6.29 (teorema di Stokes nel piano), 6.30 (area di domini regolari), 6.32, 6.34, 6.36, 6.37, 6.38, 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.43, 6.44.

3 Esercizi tratti da temi d'esame di anni precedenti

✍ **Esercizio 3.1.**

TEMA D'ESAME DEL 21 MAGGIO 2004
Calcolare l'area del dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dal segmento $\overline{PQ}$ di estremi $P = (-3\pi, 0)$ e $Q = (-\pi, 0)$ e dal tratto di spirale di Archimede $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ con gli stessi estremi.

Un primo modo di risolvere l'esercizio può essere trovato alla pagina del Prof. E. Paolini (che contiene anche il disegno dell'insieme D)

http://web.math.unifi.it/users/paolini/didattica/2003-analisi/20040521b.html

Qui riportiamo un modo alternativo di risolvere l'esericizio attraverso l'uso delle formule di Gauss-Green (nello specifico faremo uso della formula (6)). Nel nostro caso, il bordo del dominio D è costituito dall'unione di due curve: il tratto di spirale di Archimede e il segmento che unisce i punti P e Q.
Per quanto riguarda la porzione di spirale, si verifica facilmente che la parametrizzazione proposta dal testo va in senso antiorario. Osserviamo che per $t = \pi$ si ha $\gamma(\pi) = (-\pi, 0) = Q$ mentre per $t = 3\pi$ si ha $\gamma(3\pi) = (-3\pi, 0) = P$, quindi la variabilità del parametro risulta $\pi \leq t \leq 3\pi$. Pertanto, essendo $\gamma'(t) = (-t\sin t + \cos t, t\cos t + \sin t)$ si ottiene

$$\frac{1}{2}\int_\gamma (-ydx+xdy) = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} (-t\sin t, t\cos t)\cdot(-t\sin t+\cos t, t\cos t+\sin t)\, dt = \frac{1}{2}\int_\pi^{3\pi} t^2\, dt = \frac{13}{3}\pi^3.$$

D'altra parte, per ricavare una parametrizzazione del segmento, possiamo ad esempio considerare la seguente

$$\tilde{\gamma}(t) = (t, 0) \qquad -3\pi \leq t \leq -\pi \qquad \tilde{\gamma}'(t) = (1, 0).$$

Osserviamo però che tale parametrizzazione unisce (nell'ordine) P con Q, mentre per percorrere il bordo del nostro dominio in senso antiorario, avremmo bisogno di considerare il verso opposto. Per tener conto di questo, basta considerare un segno meno nel corrispondente integrale curvilineo.
D'altra parte si ha

$$\int_{\tilde{\gamma}} (-ydx + xdy) = \int_{-3\pi}^{-\pi} (0, t)\cdot(1, 0)\, dt = 0$$

quindi, indipendentemente dal verso della parametrizzazione, l'area richiesta vale $\frac{13}{3}\pi^3$.

✍ **Esercizio 3.2.**

<u>TEMA D'ESAME DEL 07 SETTEMBRE 2006</u>
Calcolare l'integrale $\int_\gamma \omega$ della forma differenziale $\omega = ydx - xdy$ sulla curva $\gamma = \partial D^+$ che percorre, in senso antiorario, il bordo del settore circolare

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq |y|\}.$$

Innanzitutto osserviamo che, da un confronto con la formula (6), si ha che, detto

$$I = \int_{\partial D^+} \omega = -2\text{area}(D). \tag{10}$$

Ora descriviamo l'insieme D per esempio per mezzo delle coordinate polari

$$D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi) : 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4\ \ \vee 7/4\pi \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Per ragioni di simmetria di $\sin\theta$ e $\cos\theta$, questo è equivalente a considerare $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$.

A questo punto allora

$$\text{area}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \int_0^1 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

da cui, dalla (10)

$$I = -\frac{\pi}{2}.$$

Verifichiamo che questo risultato è corretto calcolando direttamente l'integrale I con la definizione. Chiamiamo $\gamma = \partial D^+$ il bordo del settore circolare orientato positivamente. Si ha

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

dove

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) & -\pi/4 \leq t \leq \pi/4 & \gamma_1'(t) = (-\sin t, \cos t) \\ \gamma_2(t) = (t, t) & 0 \leq t \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \gamma_2(t) = (1, 1) \\ \gamma_3(t) = (t, -t) & 0 \leq t \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \gamma_3(t) = (1, -1) \end{array}$$

e (si notino i segni dovuti all'orientazione che deve essere positiva, cioè in senso antiorario!)

$$I = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3} \omega.$$

A questo punto allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt = -\frac{\pi}{2}$$

mentre

$$\int_{\gamma_2} \omega = \int_0^{\sqrt{2}/2} (t, -t) \cdot (1, 1)\,dt = 0$$

e analogamente

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_0^{\sqrt{2}/2} (-t, -t) \cdot (1, -1)\,dt = 0$$

e si ritrova il risultato desiderato.

✍ **Esercizio 3.3.**

TEMA D'ESAME DEL 17 GENNAIO 2007

Si consideri il dominio piano $C = [1,3] \times [0,3] \setminus (2,3] \times (1,2)$. Calcolare

$$\int_{\partial C^+} (x + y^2)\,dy.$$

Possiamo usare la formula (3) dove nel nostro caso si ha $P = 0$, $Q = x + y^2$ quindi $Q_x = 1$ e

$$\int_{\partial C^+} (x + y^2)\,dy = \iint_C 1\,dx\,dy = \text{area}(C)$$

ma l'area di C si calcola con metodi elementari (si tratta dell'area di un rettangolo a cui si sottrae l'area di un quadrato) e pertanto semplicemente

$$\int_{\partial C^+} (x + y^2)\, dy = 6 - 1 = 5.$$

✍ **Esercizio 3.4.**

TEMA D'ESAME DEL 17 GENNAIO 2007
Dopo averla disegnata, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dalla curva

$$\gamma(t) = (\sin(2t), \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si veda la soluzione alla pagina web del Prof. Paolini

http://lernejo.eu/paolini/didattica/2005-analisi/20060522b.pdf

✍ **Esercizio 3.5.**

TEMA D'ESAME DEL 17 GIUGNO 2012
Per mezzo della formula di Gauss-Green

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_{\partial D^+} f\, dx$$

calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{1}{y^2}\, dx\, dy$$

esteso alla regione $D \subset \mathbb{R}^2$ del piano (x, y) delimitato al di sopra della retta di equazione $y = 1/2$ e al di sotto dell'arco di cicloide

$$\begin{array}{l} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{array} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Prima di tutto osserviamo che intersecando la retta con la cicloide otteniamo

$$y(t) = 1/2 \Leftrightarrow 1 - \cos t = 1/2 \Leftrightarrow t_1 = \frac{\pi}{3} \ \vee t_2 = \frac{5}{3}\pi$$

da cui

$$x_1 := x(t_1) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x_2 := x(t_2) = \frac{5}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi ∂D^+ è costituito da due curve: γ_1 che è il segmento della retta $y = 1/2$ compresa tra i valori x_1 e x_2 e γ_2 che rappresenta il tratto di cicloide compreso tra i valori t_1 e t_2 (ma percorso in senso opposto alla parametrizzazione suggerita dal testo). Si ha dunque (attenzione ai segni!)

$$\partial D^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \qquad \iint_D \frac{1}{y^2}\, dx\, dy = -\int_{\partial D^+} \left(-\frac{1}{y}\right) dx = \int_{\gamma_1} \left(\frac{1}{y}\, dx + 0\, dy\right) - \int_{\gamma_2} \left(\frac{1}{y}\, dx + 0\, dy\right)$$

A questo punto

$$\begin{array}{lll} \gamma_1(t) = \left(t, \dfrac{1}{2}\right) & \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \dfrac{5}{3}\pi + \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \gamma_1'(t) = (1, 0) \\ \gamma_2(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t) & \dfrac{\pi}{3} \leq t \leq \dfrac{5}{3}\pi & \gamma_2'(t) = (1 - \cos t, \sin t) \end{array}$$

Riassumendo si ha dunque

$$\int_{\partial D^+} \frac{1}{y}\, dx = \int_{\pi/3-\sqrt{3}/2}^{5/3\pi+\sqrt{3}/2} 2\, dt - \int_{\pi/3}^{5/3\pi} \left(\frac{1}{1-\cos t}\right) (1-\cos t)\, dt = \frac{8}{3}\pi + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{3}.$$