Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2013-2014

Analisi Matematica Due

terzo appello – 15 luglio 2014

1. Stabilire se, per $n \to +\infty$, la seguente successione di funzioni
$$f_n(x) = \arctan \frac{n}{x}$$
converge uniformemente nel sottoinsieme I di $\mathbb{R}$:
$$I = \{x \in \mathbb{R} : \; 0 \neq |x| \leq 1\} .$$

2. Data la funzione $f(x, y)$ di due variabili reali definita da
$$f(x, y) = \frac{(x^3 + x^4 + y^2)\, y}{x^4 + y^2} \text{ se } (x, y) \neq (0, 0), \qquad f(0, 0) = 0,$$
stabilire se tale funzione risulta differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^2$.

3. Si consideri la forma differenziale su $\mathbb{R}^2$
$$\omega = a(y)\, dx + b(x)\, dy,$$
dove $a(y)$ e $b(x)$ sono funzioni - di una variabile reale - di classe $C^1(\mathbb{R})$. Determinare le condizioni sulle funzioni $a(y)$ e $b(x)$ per cui la forma differenziale ω risulta esatta su $\mathbb{R}^2$; in tal caso calcolarne le primitive.

4. Sia $a > 0$ un parametro fissato. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_D x \sin y \; dx\, dy,$$
dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio contenuto nel primo quadrante al di sotto della parabola di equazione $y = a^2 - x^2$. Inoltre verificare che il risultato è positivo qualunque sia $a > 0$.