Analisi Matematica II (Prof. Paolo Marcellini)

Università degli Studi di Firenze

Corso di laurea in Matematica

Esercitazione del 18/11/2015

Michela Eleuteri [1]

eleuteri@math.unifi.it

web.math.unifi.it/users/eleuteri

1 Vero o falso?

Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false. Nel caso siano false, esibire un adeguato controesempio.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in (x_0, y_0)

Vero. DIMOSTRAZIONE. La differenziabilità implica la validità della formula di Taylor al primo ordine per funzioni di due variabili

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

da cui, sfruttando di nuovo il fatto che f è differenziabile, si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\sqrt{h^2 + k^2})\right] = 0$$

e quindi la funzione f è anche continua in (x_0, y_0).

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ differenziabile in (x_0, y_0)

Falso. CONTROESEMPIO. $f(x, y) = |x|$ è continua ma non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Infatti

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

che non esiste. Dunque f non può essere differenziabile in $(0, 0)$.

[1] È vietata la diffusione e la riproduzione di questo materiale o parte di esso (particolarmente a fini commerciali) senza il consenso della sottoscritta. Queste note, che riprendono in parte gli esercizi svolti durante le ore di esercitazioni frontali, costituiscono parte integrante *(ma non esclusiva!)* del corso di Analisi II e pertanto, ai fini dell'esame, devono essere adeguatamente integrate con il materiale indicato dal docente titolare del corso.

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(x_0,y_0)\Rightarrow$ esistono tutte le derivate parziali in quel punto e sono continue.

Falso. CONTROESEMPIO. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita mediante

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Se $(x,y)\neq(0,0)$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=0$$

dove l'ultimo limite si può vedere grazie al teorema del confronto. D'altra parte, se $(x,y)\neq(0,0)$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\cos\frac{1}{x^2+y^2}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}}{h}=0.$$

Dunque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,$$

dato che

$$0\leq\sqrt{h^2+k^2}\left|\sin\frac{1}{h^2+k^2}\right|\leq\sqrt{h^2+k^2}\to0.$$

Dunque f è differenziabile in $(0,0)$. D'altra parte

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

non esiste e quindi in particolare non è zero (per vederlo basta prendere la curva $y=x$). Quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\neq\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

e dunque la funzione $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ non è continua nell'origine (la condizione sufficiente per la differenziabilità non si può invertire). Ragionamento analogo si applica alla funzione $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

Se $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ è tale che esistono tutte le derivate parziali e sono continue in un punto $(x_0,y_0)\Rightarrow$ f è differenziabile in quel punto.

Vero. DIMOSTRAZIONE. Condizione sufficiente per la differenziabilità.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow$ esistono le derivate parziali in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO. Di nuovo $f(x,y) = |x|$.

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è tale che esistono le derivate parziali in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ continua in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO.

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq 0, \; y \neq 0 \\ 1 & x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$$

Siccome f è costante lungo gli assi cartesiani si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0.$$

D'altra parte f non è continua nell'origine, perché, ad esempio

$$f(x,0) = 1 \to 1 \neq 0 = \lim_{x \to 0} f(x,x).$$

Altri controesempi che vanno nella medesima direzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Di nuovo

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

non esiste (e in particolare non tende a zero che è il valore della funzione nell'origine). Per vederlo basta considerare le curve $y = 0$ e $y = x$ D'altra parte la funzione costantemente uguale a zero sugli assi e dunque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Analogo discorso per la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} y \arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Infatti la funzione non è continua nell'origine. Per vederlo basta considerare la curva $x = y^{3/2}$. Infatti

$$f(y^{3/2}, y) = \frac{y \arctan(y^3 + y^2)}{y^3} = \frac{\arctan(y^3 + y^2)}{y^3 + y^2} \cdot \frac{y^3 + y^2}{y^2} = \frac{\arctan(y^3 + y^2)}{y^3 + y^2} \cdot (1 + y) \to 1$$

e dunque non tende a zero che è il valore della funzione nell'origine. D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua e derivabile in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ differenziabile in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO.
Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Allora f è continua nell'origine perché

$$0 \le \lim_{(x,y) \to (0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y) \to (0,0)} |x| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \le \lim_{(x,y) \to (0,0)} |x| = 0$$

dove abbiamo usato il fatto che $y^2 \le x^2 + y^2$. Quindi dal teorema dei carabinieri e dal fatto che $f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$ si conclude che

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e anche

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

quindi le derivate parziali esistono nell'origine e sono nulle.
Vediamo se la funzione data è differenziabile con la definizione. Si dovrebbe verificare che

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ma essendo $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ si ottiene

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{hk^2}{(h^2 + k^2)^{3/2}}$$

e questo limite non è zero: basta prendere la curva $h = k$ e si ha che tale limite vale $\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$ a seconda che $h \to 0^{\pm}$. Quindi la funzione data è continua, derivabile ma non differenziabile nell'origine.

> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow$ esistono tutte le derivate direzionali in quel punto.

Vero. DIMOSTRAZIONE. Formula del gradiente.

> Se per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esistono tutte le derivate direzionali in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ differenziabile in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO.
Sia data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Se $(x, y) \neq (0, 0)$ allora si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(x^2 + y^2) - 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

mentre nell'origine, la derivata parziale si calcola con la definizione

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

dunque riassumendo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

In modo del tutto analogo si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Calcoliamo ora le derivate direzionali nell'origine. Dato un generico versore $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ si ha

$$D_{\mathbf{v}}f(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\sin\theta) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t\cos\theta t^2 \sin^2\theta}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3 \sin^2\theta \cos\theta}{t^3} = \sin^2\theta\cos\theta.$$

La formula del gradiente NON è verificata: infatti

$$\sin^2\theta\cos\theta = D_{\mathbf{v}}f(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = 0.$$

Quindi da questo si può concludere che f NON è differenziabile nell'origine (come si può anche verificare direttamente con la definizione) e pertanto f non è nemmeno di classe $\mathcal{C}^1$ (come si verifica direttamente andando a testare la continuità delle funzioni derivate parziali).

> Se per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vale la formula del gradiente in un punto $(x_0, y_0) \Rightarrow f$ differenziabile in quel punto.

Falso. CONTROESEMPIO.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Infatti, visto che $f = 0$ sull'asse x si ha $f_x(0,0) = 0$. Si osserva poi che, per ogni versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ diverso da $(1,0)$, l'intersezione tra l'insieme $\{(x,y) : |y| > x^2\}$ e la retta per l'origine di direzione $\mathbf{v}$ un segmento centrato nell'origine. Poiché su tale segmento $f(x,y) = 1$ si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Perciò $\nabla f(0,0) = 0$ e la formula del gradiente è verificata. D'altra parte la funzione non è differenziabile in quanto non è nemmeno continua nell'origine. Infatti ad esempio:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x,0) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x, x^3) = 0.$$

2 Esercizi proposti

✍ **Esercizio 2.1.**

> Dire se la seguente funzione è differenziabile
>
> $$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2}x^2 y & y \geq 0 \\ \dfrac{e^{xy} - 1}{y} & y < 0 \end{cases}$$

Se si considerano i punti (x,y) con $y \neq 0$ allora la funzione è differenziabile perché somma e prodotto di funzioni differenziabili. Resta da studiare la differenziabilità nei punti $(x,0)$ con $x \in \mathbb{R}$. Proviamo a studiare la differenziabilità in tali punti usando la condizione sufficiente di differenziabilità. Dimostreremo che entrambe le derivate parziali sono funzioni continue.
Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = 1$$

e anche

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h}.$$

A questo punto, se $h > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2 h - x}{h} = \frac{x^2}{2}$$

mentre se $h < 0$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{xh}-1}{h} - x}{h}.$$

Usando due volte il teorema di De l'Höpital (oppure gli sviluppi in serie di Mac Laurin) si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{e^{xh}-1}{h} - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{xh} - 1 - xh}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{xe^{xh} - x}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 e^{xh}}{2} = \frac{x^2}{2}.$$

Quindi in ogni caso

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \frac{x^2}{2}.$$

D'altra parte, se $y > 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 + xy$$

che tende a 1 per $(x,y) \to (x_0,0)$ mentre se $y < 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y}(ye^{xy}) = e^{xy}$$

che pure tende a 1 per $(x,y) \to (x_0,0)$. Inoltre, sempre per $y > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{2}$$

e per $y < 0$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(xy-1)e^{xy} + 1}{y^2}$$

che può essere riscritto come

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(xy-1)e^{xy} + 1}{x^2y^2}\, x^2.$$

A questo punto, considerando la funzione

$$g(x,y) = \frac{(xy-1)e^{xy} + 1}{x^2y^2}$$

essa ammette limite uguale a $1/2$ per $(x,y) \to (x_0,0)$ (si può pensare di vederlo come limite di una variabile ponendo $xy = t$ con $t \to 0$ e qundi usare il teorema di de l'Höpital).
Quindi riassumendo, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0).$$

Dunque le derivate parziali esistono e sono continue, allora la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 2.2.**

Si verifichi che la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è continua e dotata di derivate parziali $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ma non è differenziabile in (0,0).

Di sicuro la funzione continua per $(x,y) \neq (0,0)$. Invece, per quanto riguarda la continuit nell'origine osserviamo che

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} \right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|(x^2y^2)}{x^4+y^4} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2}|y| = 0;$$

dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$$

dal teorema dei due carabinieri e pertanto la funzione continua anche nell'origine. D'altra parte, per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3(x^4+y^4) - 4x^3x^2y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{2xy^7 - 2x^5y^3}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x^2(x^4+y^4) - 4y^3x^2y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{3x^6y^2 - y^6x^2}{(x^4+y^4)^2}$$

mentre nell'origine si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$$

e questo limite non esiste, basta considerare il limite lungo la curva $h = k$: in questo caso si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^5}{2\sqrt{2}h^4|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{h}{|h|}$$

e dunque se $h > 0$ si ottiene $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ mentre se $h < 0$ si ottiene $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

✍ **Esercizio 2.3.**

Si consideri la seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3|x|xy + y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) f è continua in $(0,0)$?
ii) Esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$? In caso affermativo calcolarle.
iii) Esiste la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione della bisettrice del primo quadrante? In caso affermativo calcolarla.

(i) Conviene passare a coordinate polari. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 3\,|x|\,x\,y + y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\,\cos^3\theta + 3\,\rho^3\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta + \rho^4\,\sin^4\theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta\,+\,\rho^2\,\sin^4\theta]. \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho\,\cos^3\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho\,|\cos^3\theta| \le \lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta| = \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho\,||\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta| \le \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho^2\,\sin^4\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta \le \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0.$$

Dal teorema dei carabinieri e dal fatto che $f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$ si ottiene facilmente che

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta = 0$$

da cui anche

$$\lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta\,+\,\rho^2\,\sin^4\theta] = 0.$$

Quindi f è continua in $(0,0)$.

(ii) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2}\,\frac{1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2}\,\frac{1}{h} = 0.$$

(iii) La direzione della bisettrice del primo quadrante coincide con la direzione individuata dal versore

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

quindi

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{v}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\,t^2\,|t|\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + t^4\,\frac{1}{4}}{t^2}\,\frac{1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\,\frac{|t|}{t}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{4}\right]
\end{aligned}$$

e questo ultimo limite non esiste in quanto vale $\sqrt{2}$ per $t \to 0^+$ mentre vale $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ per $t \to 0^-$.