Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2015-2016
Analisi Matematica Due
primo appello – 27 maggio 2016

1. Stabilire se sia differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^2$ la funzione $f(x,y)$ di due variabili reali definita da
$$f(x,y) = \frac{x^2y^2 + x^4y + y^3}{x^4 + y^2} \text{ se } (x,y) \neq (0,0)\,, \quad f(0,0) = 0.$$

2. Sia $[a,b]$ un generico intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$. Verificare che la successione di funzioni
$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$$
converge uniformemente in $[a,b]$ e calcolare il limite $f(x)$ in $[a,b]$ per ogni a,b (e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$). Inoltre, tenendo presente (cioè: sapendo per ipotesi) che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-n)^2} dx = \sqrt{\pi}$, verificare che
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, dx \neq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$$
e spiegare il motivo per cui in questo caso non vale la tesi del teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

3. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale
$$w = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\,,$$
esteso, nel verso delle t crescenti, alla curva di equazioni
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}t + \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

4. Sia L l'insieme di $\mathbb{R}^2$ "a forma di luna", cioè costituito dai punti del cerchio chiuso di centro in $(r,0)$ e raggio $r > 0$ e non interni al cerchio di centro in $(0,0)$ e raggio r. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_L \sqrt{x^2+y^2}\; dx\, dy\,.$$