Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2015-2016
Analisi Matematica Due
secondo appello – 27 giugno 2016

1. Stabilire se sia continua, derivabile, differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^2$ la funzione di due variabili reali $f(x,y)$ definita da
$$f(x,y) = \sqrt[3]{(e^x - 1)(e^y - 1)}\,.$$

2. Determinare i punti critici ed i punti di massimo o di minimo relativo della funzione
$$f(x,y) = (\cos y - \cos x)^2 + \cos^2 y - \cos y$$
al variare di (x,y) nel quadrato *aperto* di $\mathbb{R}^2$
$$Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| < \pi,\ |y| < \pi\right\}.$$
Facoltativo: determinare i valori di massimo e di minimo assoluto di $f(x,y)$ nel quadrato *chiuso* $\overline{Q}$.

3. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{2x} - \dfrac{1}{y} \\ y(-1) = -1 \end{cases}.$$

4. Dimostrare la stima relativa al seguente integrale doppio
$$\iint_C \left(x^2 + y^2\right)\, dx\, dy \, < \frac{\pi}{4}$$
dove C è l'insieme di $\mathbb{R}^2$ definito in coordinate cartesiane da
$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \le x + y \le 1\right\}.$$