Corso di Laurea in Matematica
a.a. 2015-2016

Analisi Matematica Due
sesto appello – 15 febbraio 2017

1. Stabilire se la funzione di due variabili reali $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$ risulta differenziabile nell'origine di $\mathbb{R}^2$.

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = x\ (1-y^2) \\ y(0) = y_0 \end{cases} .$$
Disegnare approssimativamente il grafico della soluzione $y = y(x)$ nel caso in cui $y_0 = 0$. Inoltre si diterminino tutti i valori $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui la corrispondente soluzione $y = y(x)$ si annulla per qualche $x \in \mathbb{R}$.

3. Calcolare l'integrale curvilineo della forma differenziale
$$\omega = \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dx - \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy ,$$
esteso all'asteroide γ di equazioni parametriche
$$\gamma : \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} , \quad t \in [0, 2\pi] ,$$
nel verso delle t crescenti. Calcolare inoltre, se esiste, una primitiva della forma differenziale ω nel semipiano $y > 0$.

4. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_D \frac{x}{1+y}\, dx\, dy ,$$
dove D è il dominio del piano cartesiano (x, y) delimitato dalla parabola di equazione $y = x^2$ e dalla bisettrice del primo quadrante.