Analisi Matematica II (A.A. 2017/18)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Determinare i valori del parametro reale α per cui la seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha} x}{1+n^2x^2}$$

(a) converge totalmente per x in $\mathbb{R}$;
(b) converge totalmente quando x varia nell'intervallo $[1,+\infty)$.

2. Stabilire se risultano differenziabili nel punto $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ le due funzioni di due variabili reali $f(x,y)$ e $g(x,y)$, definite da $f(0,0)=0$, $g(0,0)=0$ e

$$f(x,y) = \frac{x^3y}{x^2+y^4}\ , \quad g(x,y) = \frac{x\,y^3}{x^2+y^4} \qquad \textit{se}\ \ (x,y) \neq (0,0)\,.$$

3. Determinare l'integrale generale $\mathcal{I}$ dell'equazione differenziale

$$y^{iv} - 5y'' + 4y = \sin x,$$

e l'integrale generale $\mathcal{I}_0$ e dell'equazione omogenea associata.
(a) Ci sono elementi di $\mathcal{I}$ con integrale (improprio) finito su $\mathbb{R}^+$?
(b) Ci sono elementi di $\mathcal{I}_0$ con integrale (improprio) finito su $\mathbb{R}^+$?
In caso di risposta positiva ad (a) oppure (b), determinare il massimo numero di tali elementi linearmente indipendenti.

4. Sia $a > 1$ si calcoli l'integrale doppio

$$\mathcal{I}(a) = \int_{Q(a)} (x^2-y^2)\log(x+y)dxdy,$$

dove $Q(a)$ è il quadrilatero di vertici $(1,0)$, $(a,0)$, $(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Si calcoli, poi la derivata di $\mathcal{I}(a)$ rispetto ad a e si giustifichi il segno di tale derivata.