AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
MathSciNet Mathematical Reviews on the Web

Citations
From References: 4
From Reviews: 0

MR0467437 (57 #7295) 49A15

Marcellini, P.; Sbordone, C.

Dualita e perturbazione di funzionali integrali. (Italian)

Ricerche Mat. **26** (1977), *no. 2,* 383–421.

In this interesting paper the authors consider sequences of convex integrals $I_n(v) = \int_A f_n(x, v, Dv)\,dx$ of the calculus of variations, and their convergence to an integral I of the same form, such that the minimum value of I_n converges to the minimum value of I under suitable spaces and conditions. Such a problem is studied by using the Γ^- convergence of functionals as defined by De Giorgi-Franzoni [E. De Giorgi and T. Franzoni, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **58** (1975), no. 6, 842–850; MR0448194 (56 #6503)], and the convergence of U. Mosco [Advances in Math. **3**, 510–585 (1969); MR0298508 (45 #7560).] The authors characterize the Mosco and Γ^- convergence of various classes of integrals as above, with respect to topologies of L^p and Sobolev spaces, in terms of the integrands and their conjugates. Moreover Γ^- compactness results are proved without coerciveness assumptions. Many examples are considered.

Reviewed by *T. Zolezzi*

© *Copyright American Mathematical Society 1979, 2010*

BIBLIOGRAFIA

[1] S. Agmon, *Lectures on Elliptic boundary value problems*, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton (1965).

[2] S. Agmon, A. Douglas. L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions* I, Comm. Pure Appl. Math., vol. 12 (1959), 623-727.

[3] M. L. Benevento, *Sul problema del tipo di Dirichlet per operatori ellittico-parabolici di ordine 2 s, quasi ellittici nelle zone di degenerazione*, Ricerche di Matematica, vol. XXVI (1977).

[4] M. L. Benevento, T. Bruno, L. Castellano, *Sul problema del tipo di Dirichlet per una classe di operatori ellittico-parabolici del IV ordine degeneri in una o più direzioni*, Ricerche di matematica, vol. XXIV (1975), 280-340.

[5] A. Canfora, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine* I, Ricerche di Matematica, vol. XXI (1972), 86-156.

[6] A. Canfora, *Un problema al contorno per una classe di operatori ellittico-parabolici del quarto ordine* II, Ricerche di Matematica, vol. XXII (1973), 3-68.

[7] L. Hörmander, *On the theory of general partial differential operators*, Acta Mathematica, vol. 94 (1955), 161-248.

[8] S. Matarasso, *Formule di maggiorazione relative ad una classe di equazioni a coefficienti costanti*, Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat .di Napoli, serie 4, XL (1973), 269-302.

[9] S. Matarasso, *Regolarizzazione delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche*, Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli, serie 4, XLI (1974), 160-192.

[10] S. Matarasso, *Esistenza ed unicità delle soluzioni di una classe di problemi ipoellittici*, Annali di Matematica (IV), vol. CIX, (1976), 39-87.

[11] C. Miranda, *Teoremi di unicità in domini non limitati e teoremi di Liouville per le soluzioni dei problemi al contorno relativi alle equazioni ellittiche*, Annali di Matematica, vol. LIX, (1962), 189-212.

[12] J. Peetre, *On estimating the solutions of hypoelliptic differential equations near the plane boundary*, Mathematica Scandinavica, vol. 9, (1961), 337-351.

[13] M. Picone, *Appunti di Analisi Superiore*, Ed. Rondinella 1940, Napoli.

[14] M. Schechter, *On the dominance of partial differential operators* II, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. XVIII (1964), 255-282.

[15] M. Troisi, *Problemi ellittici con dati singolari*, Annali di Matematica, vol. LXXXIII (1969), 363-407.

Pervenuta alla redazione il 18 aprile 1977

Dualità e perturbazione di funzionali integrali (*)

Nota di P. MARCELLINI (**) e C. SBORDONE (***)

Scopo di questo lavoro è di studiare il comportamento dell'integra

$$\int f(x, v, Dv)\,dx \quad \left(\text{oppure } \int f(x, v_1, \ldots, v_N)\,dx\right)$$

in corrispondenza a variazioni dell'integrando. In altri termini il pr blema considerato è il seguente: si cerca una convergenza (che indich remo sinteticamente con $\Rightarrow$) sulla successione di funzioni reali f_h una convergenza ($\Rightarrow$) su $\int f_h$ per cui

$$(0.1) \qquad \text{se } f_h \to f \text{ allora } \int f_h(x, v, Dv) \Rightarrow \int f(x, v, Dv)\,.$$

In tale direzione classici sono ad esempio il teorema di conv genza dominata di Lebesgue e il teorema di convergenza monotona Beppo Levi. Tali risultati hanno applicazione in molti procedime standard di approssimazione.

Ciononostante, in alcuni problemi, la convergenza puntuale de integrali, cioè la convergenza di $\int f_h(x, v, Dv)\,dx$ per ogni v fissato, n è la più appropriata. Ciò accade ad esempio se si vuole studiare convergenza dei valori di minimo (o la convergenza delle funzioni realizzano il minimo) nei problemi

$$\int f_h(x, v, Dv)\,dx = \text{minimo su V}$$

dove V è una fissata classe di funzioni. Ciò in generale è indipende e non discende dalla convergenza puntuale degli integrali.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNAFA-CNR.

(**) Istituto Matematico « U. Dini » Università di Firenze.
(***) Istituto Matematico « R. Caccioppoli » Università di Napoli.

Schematizziamo anche questo problema: si cerca una convergenza $(\Rightarrow)$ per funzionali F_h definiti su uno spazio di funzioni V per cui

(0.2) $$\text{se } F_h \Rightarrow F \text{ allora } \lim_h \operatorname*{Min}_V F_h = \operatorname*{Min}_V F.$$

Per studiare tale problema sono stati recentemente introdotti diversi tipi di convergenza da Mosco [20], Joly [11], Marcellini [13], De Giorgi-Franzoni [7]. Ampie bibliografie su questo punto si trovano in [6], [10], [21]. Risultati sulla convergenza dei valori e dei punti di minimo si trovano in [1], [2], [7], [13], [20], [21], [26]. Le definizioni di tali convergenze, che indicheremo genericamente con Γ-convergenze, sono riportate nel § 1.

In questo lavoro studiamo il problema (0.1) nel caso in cui la convergenza $\to$ dei funzionali integrali sia tale da risolvere, in situazioni opportune, il problema (0.2). I casi che prendiamo in considerazione sono:

(0.3) Successioni di integrali multipli del tipo

$$\int f(x, v_1, \ldots, v_N)\, dx \qquad (\S\ 3).$$

(0.4) Successioni di integrali semplici del tipo

$$\int f(x, Dv)\, dx \qquad (\S\ 4).$$

Il caso (0.3) è stato considerato da Joly-De Thelin in [12], i quali hanno dato condizioni sulla successione degli integrandi sufficienti ad ottenere la Γ-convergenza degli integrali sia nella topologia forte che nella topologia debole di $[L^p]^N$ (p opportuno). Ciò garantisce, sotto opportune ipotesi di equicoercività, la convergenza dei valori di minimo e la convergenza nella topologia forte di $[L^p]^N$ delle funzioni che realizzano il minimo.

Nel § 3 noi diamo condizioni sulla successione degli integrandi necessarie e sufficienti per la Γ-convergenza degli integrali nelle topologie anzidette. Restringendo i funzionali alla varietà lineare $\{v = (v_o, v_1 \ldots, v_N) \in [L^p]^{N+1} : D_i v_o = v_i;\ i = 1, \ldots, N\}$, otteniamo risultati per successioni di integrali multipli del tipo $\int f(x, v, Dv)\, dx$.

Nel § 4 caratterizziamo la Γ-convergenza di integrali del tipo (0.4) nella topologia di $H^{1,p}$ in termini di convergenza degli integrandi. Nello schema che proponiamo si inquadra il noto esempio di De Giorgi: se F_h è definito sullo spazio di Sobolev $H^{1,2}$ da

$$F_h(v) = \int_a^b \left(2 + \frac{\operatorname{sen} h x}{|\operatorname{sen} h x|}\right) v'^2\, dx,$$

è facile verificare che $\lim_h F_h(v) = \int_a^b 2 v'^2\, dx$ per ogni v fissato, mentre (si veda la prop. 4.12):

$$\lim_h \operatorname*{Min}_V F_h = \operatorname*{Min}_V \int_a^b \frac{3}{2} v'^2\, dx$$

dove V è ad esempio l'insieme delle funzioni di $H^{1,2}$ con valori assegnati agli estremi dell'intervallo (a, b). Altri esempi sono riportati alla fine del § 4.

I funzionali F_h sono sempre supposti convessi e le caratterizzazioni di cui si è parlato sono date per dualità, cioè in termini delle funzioni coniugate secondo Fenchel degli integrandi.

Oltre a ciò, diamo nel § 2 alcuni teoremi di compattezza rispetto alla Γ-convergenza per funzionali integrali come in (0.3) senza ipotesi di equicoercività.

I teoremi di compattezza sono infatti caratteristici della Γ-convergenza; ricordiamo in tale direzione i risultati di De Giorgi [5], Sbordone [23], Marcellini-Sbordone [15], [16].

§ 1. DEFINIZIONI, NOTAZIONI E RISULTATI PRELIMINARI

Se (V, τ) è uno spazio con struttura di convergenza τ (rispettivamente con topologia τ), si possono dare diverse definizioni di limite per successioni di funzioni $F_h : V \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definizione 1.1. — Si dirà che F è il $\Gamma^-_{seq}(\tau)$ limite (risp. $\Gamma^-(\tau)$ limite) di F_h su V, e scriveremo $F = \Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h F_h$ su V (risp. $F = \Gamma^-(\tau) \lim_h F_h$ su V) se

$$F = \Gamma^-_{seq}(\tau) \liminf_h F_h = \Gamma^-_{seq}(\tau) \limsup_h F_h$$

$$\text{(risp. } F = \Gamma^-(\tau) \liminf_h F_h = \Gamma^-(\tau) \limsup_h F_h)$$

ove (si indica con $\tau(v)$ la famiglia degli intorni aperti di v) si ha per ogni $v \in V$

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \liminf_h F_h(v) = \inf\{\liminf_h F_h(v_h) : v_h \xrightarrow{\tau} v\}$$

$$\Gamma^-_{seq}(\tau) \limsup_h F_h(v) = \inf\{\limsup_h F_h(v_h) : v_h \xrightarrow{\tau} v\}$$

(risp. $\Gamma^-(\tau)\lim_h \inf F_h(v) = \sup\{\lim_h \inf \inf_U F_h : U \in \tau(v)\}$

$\Gamma^-(\tau)\lim_h \sup F_h(v) = \sup\{\lim_h \sup \inf_U F_h : U \in \tau(v)\}$).

Per le proprietà generali di queste convergenze si vedano [3], [6], [7], [19].

In questo lavoro utilizzeremo, quando possibile, il seguente criterio

PROPOSIZIONE 1.2 ([7]). — *Sia* τ *una convergenza proveniente da una topologia (che indicheremo ancora con* τ*) verificante il primo assioma di numerabilità. È equivalente dire che* $F = \Gamma^-(\tau)\lim_h F_h$ *su* V *o che* $F = \Gamma^-_{seq}(\tau)\lim_h F_h$ *su* V *o che valgono le due proprietà*:

(i) $\forall\, v_h,\ v \in V,\ v_h \xrightarrow{\tau} v \Longrightarrow F(v) \le \lim_h \inf F_h(v_h)$

(ii) $\forall\, v \in V\ \exists\, v_h \xrightarrow{\tau} v$ *tale che* $F(v) = \lim_h F_h(v_h)$.

Di utilità è anche il seguente risultato di compattezza:

PROPOSIZIONE 1.3 ([7]). — *Sia* (V,τ) *una spazio topologico avente una base numerabile di aperti. Da ogni successione* $F_h : V \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$ *si può estrarre una sottosuccessione* $\Gamma^-(\tau)$ *convergente su* V *ad una funzione* $F : V \to R \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Supponiamo ora che V sia uno spazio di Banach reale *riflessivo e separabile*. In tale ambiente è di particolare interesse la Γ^- convergenza nella topologia debole di V, topologia che indicheremo con $w-V$. Si ha la

PROPOSIZIONE 1.4 ([1]). — *Se* $F_h\, V \to R \cup \{+\infty\}$, *verificano* $\forall\, v \in V$ $F_h(v) \ge \lambda \| v \|^p$ *con* $\lambda > 0$ *e* $p \ge 1$, *allora vale la tesi della proposizione* 1.2 *con* $\tau = w - V$.

Se F è una funzione definita su V a valori in $R \cup \{+\infty\}$ (escluso il caso in cui $F(v) = +\infty\ \forall\, v \in V$) convessa e semicontinua inferiormente su V, la funzione *coniugata secondo Fenchel* di F è la funzione F^* definita sul duale topologico V^* di V da (cfr. [9], [18], [22])

(1.1) $F^*(v^*) = \sup\{< v^*, v > - F(v) : v \in V\} \quad \forall\, v^* \in V^*$.

Facendo uso delle funzioni coniugate proviamo la

PROPOSIZIONE 1.5. — *Sia* $F_h : V \to R \cup \{+\infty\}$ *una successione di funzioni convesse, semicontinue inferiormente e non negative su* V *tali che* $F_h(v_o) \le M$ *per* $v_o \in V$ *e* $M \in \mathbb{R}$ *fissati. Allora esiste una funzione* F *con le stesse proprietà di* F_h *ed una sottosuccessione* F_{h_r} *di* F_h *per cui* $F = \Gamma^-_{seq}(w-V)\lim_r F_{h_r}$ *su* V.

Dim. — Si ha che, $\forall\, h \in N$

(1.2) $F_h^*(v^*) \ge < v^*, v_o > - M \qquad \forall\, v^* \in V^*,\ F_h^*(0) \le 0$.

Dalla proposizione 1.3 segue l'esistenza di una funzione $F^* : V^* \to R \cup \{+\infty\}$ e di una successione F_{h_r} estratta da F_h per cui, se $s-V^*$ è la topologia forte di V^*, si ha $F^* = \Gamma^-(s-V^*)\lim_r F_{h_r}^*$. È facile verificare che F^* è convessa e semicontinua inferiormente su V^* e che verifica (1.2); in particolare F^* è, come si dice, una funzione propria. Allora il risultato segue dal fatto che (cfr. [10], [14], [17]) posto $F = (F^*)^*$, $F = \Gamma^-_{seq}(w-V)\lim_h F_h$ su V se e solo se $F^* = \Gamma^-(s-V^*)\lim_h F_h^*$ su V^*.

In ipotesi di coercività vale la seguente caratterizzazione:

PROPOSIZIONE 1.6. — 2. *Sia* $F_h : V \to R \cup \{+\infty\}$ *una successione di funzioni convesse e semicontinue inferiormente su* V *tali che* $F_h(v) \ge \lambda \| v \|^p\ \forall\, v \in V$ *con* $\lambda > 0$ *e* $p > 1$, *e* $F_h(v_o) \le M$ *per qualche* $v_o \in V$ *e* $M \in \mathbb{R}$. *Si ha che* $F = \Gamma^-(w-V)\lim F_h$ *su* V *se e solo se* $F^*(v^*) = \lim_h F_h^*(v^*)\ \forall\, v^* \in V^*$ (*o equivalentemente per ogni* $v^* \in K$ *con* K *insieme denso in* V^*).

Se F_h è una successione di funzioni convesse e semicontinue inferiormente su V a valori in $R \cup \{+\infty\}$, diremo che F_h *converge ad* F *secondo Mosco su* V (cfr. [20]) se $F = \Gamma^-(s-V)\lim_h F_h = \Gamma^-(w-V)\lim_h F_h$ su V. ($s-V$ è la topologia forte e $w-V$ la topologia debole su V).

Faremo uso nel seguito anche di un risultato di teoria della misura di [8] (si veda anche [4]).

PROPOSIZIONE 1.7 ([8]. — *Se* ν *è una funzione non negativa di insieme definita sugli aperti limitati di* R^N, *finitamente additiva e crescente, se esiste una misura di Radon* α *tale che* $\alpha - \nu$ *è crescente, allora esiste un'unica misura di Radon estensione di* ν.

Infine, se Ω è un insieme misurabile di R^N e se $a_h : \Omega \to R$ è una successione di funzioni misurabili e limitate, diremo che a_h converge

in $\sigma(L^\infty(\Omega)\, L^1(\Omega))$ ad una funzione a misurabile e limitata su Ω se e solo se

$$\lim_h \int_\Omega (a_h(x) - a(x))\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\, \varphi \in L^1(\Omega)\,.$$

§ 2. TEOREMI DI COMPATTEZZA

In questo numero prendiamo in considerazione successioni di integrali del tipo

$$\int_\Omega f(x, v(x))\,dx \qquad v = (v_1, \ldots, v_N) \in [L^p(\Omega)]^N$$

e i loro Γ limiti sequenziali rispetto a convergenze deboli o forti degli spazi $[L^p]^N$.

Per ogni aperto limitato $\Omega \subset R^N$ indichiamo con τ_Ω una struttura di convergenza (eventualmente di natura topologica) su $[C^o(R^N)]^N$ e ad essa associamo l'altra struttura τ'_Ω definita da

$$(2.1) \qquad u_h \to u \text{ in } \tau'_\Omega \Leftrightarrow u_h \to u \text{ in } \tau_\Omega \text{ e } u_h - u \in [C^o_o(\Omega)]^N.$$

Se $f_h = f_h(x, \xi)$ è una successione di integrandi misurabili in $x \in R^N$, convessi in $\xi \in R^N$ e non negativi, poniamo $\forall\, u \in [C^o(R^N)]^N$

$$(2.2) \qquad F_h(\Omega, u) = \int_\Omega f_h(x, u(x))\,dx\,.$$

Sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. — *Se per una* $u \in [C^o(R^N)]^N$ *esistono i* Γ^- *limiti seguenti*

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(\tau_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u)$$

$$F_o(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(\tau'_\Omega) \lim_h F_h(\Omega, u)\,,$$

allora si ha:

$$F_o(\Omega, u) = F(\Omega, u)\,.$$

Dim. — Poiché τ_Ω è una convergenza meno fine di τ'_Ω, si ha

$$F(\Omega, u) \le F_o(\Omega, u)\,,$$

pertanto basterà dimostrare l'altra disuguaglianza. A tale scopo, fissato $\varepsilon > 0$, sia $u_h \to u$ in τ_Ω tale che

$$(2.3) \qquad F(\Omega, u) + \varepsilon/2 > \limsup_h F_h(\Omega, u_h)\,.$$

Fissato $K \subset\subset \Omega$, posto $\delta = \operatorname{dist}(K, R^N/\Omega)$, poniamo $\forall\, \nu \in N$

$$B_o = K \quad B_i = \{x:\ \operatorname{dist}(x, K) < i\,\delta/\nu\} \qquad i = 1, \ldots, \nu\,,$$

e siano $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ delle funzioni tali che

$$\psi_i \in C^o_o(B_i) \qquad 0 \le \psi_i(x) \le 1 \qquad \forall\, x \in B_i$$

$$\psi_i(x) = 1 \qquad \forall\, x \in B_{i-1}\,.$$

Allora, posto $\forall\, i = 1, \ldots, \nu$

$$w_{ih} = u + (u_h - u)\,\psi_i\,,$$

si ha, da un lato

$$w_{ih} \to u \quad \text{in} \quad \tau'_\Omega \qquad \forall\, i = 1, \ldots, \nu$$

e dall'altro, per ipotesi,

$$(2.4) \qquad F_o(\Omega, u) \le \liminf_h F_h(\Omega, w_{ih}) \qquad i = 1, \ldots, \nu$$

Valutiamo $F_h(\Omega, w_{ih})$:

$$(2.5) \qquad \begin{aligned} F_h(\Omega, w_{ih}) &= F_h(\Omega \backslash B_i, w_{ih}) + F_h(B_i \backslash B_{i-1}, w_{ih}) + \\ &+ F_h(B_{i-1}, w_{ih}) \le F_h(\Omega \backslash K, u) + F_h(\Omega, u_h) + \\ &+ \int_{B_i \backslash B_{i-1}} f_h(x, w_{ih}(x))\,dx \le \\ &\le F_h(\Omega \backslash K, u) + F_h(\Omega, u_h) + \\ &+ \int_{B_i \backslash B_{i-1}} \{f_h(x, u_h(x)) + f_h(x, u(x))\}\,dx\,. \end{aligned}$$

Da (2.3), (2.4), (2.5) si ricava

$$F_o(\Omega, u) - F(\Omega, u) - \varepsilon/2 < \liminf_h F_h(\Omega, w_{ih}) - \limsup_h F_h(\Omega\, u_h) \leq$$

$$\leq \liminf_h [F_h(\Omega, w_{ih}) - F_h(\Omega, u_h)] ,$$

da cui $\forall\, h \geq \bar{h}$

$$F_o(\Omega, u) - F(\Omega, u) - \varepsilon < F_h(\Omega, w_{ih}) - F_h(\Omega, u_h) ,$$

ossia per la (2.5)

$$F_o(\Omega, u) - F(\Omega, u) - \varepsilon < F_h(\Omega \backslash K, u) + \int_{B_i \backslash B_{i-1}} \{f_h(x, u_h) + f_h(x, u)\}\, dx .$$

Ne segue ancora, $\forall\, h \geq \bar{h}$

$$F_o(\Omega, u) - F(\Omega, u) - \varepsilon < F_h(\Omega \backslash K, u) + 1/\nu \int_\Omega f_h(x, u_h)\, dx ,$$

da cui, passando al limite per $h \to +\infty$, poi per $\nu \to +\infty$, poi per $K \to \Omega$, si ha la tesi, per l'arbitrarietà di ε.

Il risultato precedente può essere migliorato in ipotesi ulteriori sugli integrandi f_h, come si vede dalla seguente

PROPOSIZIONE 2.2. — Siano $f_h = f_h(x, \xi)$ *verificanti le condizioni*

$$(2.6) \qquad \begin{cases} f_h(x, \xi) \text{ misurabile in } x \in R^N, \text{ convessa in } \xi \in R^N \\ 0 \leq f_h(x, \xi) \leq a(x)\, \Lambda(\xi) \end{cases}$$

con $a \in L^1_{loc}(R^N)$ *e* $\Lambda : R^N \to R$ *convessa.*

Se esiste in $u \in [C^o(R^N)]^N$

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(\tau_\Omega) \lim F_h(\Omega, u) ,$$

allora esiste anche

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(\tau'_\Omega) \lim F_h(\Omega, u)$$

e si ha:

$$F(\Omega, u) = F_o(\Omega, u) .$$

Dim. — Poiché τ_Ω è meno fine di τ'_Ω, allora si ha

$$F(\Omega, u) \leq \Gamma^-_{seq}(\tau'_\Omega) \liminf_h F_h(\Omega, u) ,$$

pertanto è sufficiente provare che

$$F_o(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(\tau'_\Omega) \limsup_h F_h(\Omega, u) \leq F(\Omega, u) .$$

Sia dunque $\varepsilon > 0$ e $u_h \to u$ in τ_Ω tale che

$$\limsup_h F_h(\Omega, u_h) < F(\Omega, u) + \varepsilon .$$

Fissato $B \subset\subset \Omega$ e $g \in C^o_o(\Omega)$ tale che

$$g(x) = 1 \qquad \forall\, x \in B$$
$$0 \leq g(x) \leq 1 ,$$

sia $w_h = g\, u_h + (1 - g)\, u$.

Allora

$$w_h \to u \quad \text{in} \quad \tau'_\Omega$$

e inoltre

$$F_o(\Omega, u) \leq \limsup_h F_h(\Omega, w_h) .$$

Ora, dalla convessità in ξ di $f_h(x, \xi)$ si deduce

$$F_h(\Omega, w_h) \leq \int_\Omega [g\, f_h(x, u_h) + (1 - g)\, f_h(x, u)]\, dx \leq \int_\Omega f_h(x, u_h)\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega \backslash B} f_h(x, u)\, dx \leq \int_\Omega f_h(x, u_h)\, dx + \int_{\Omega \backslash B} a(x)\, \Lambda(u(x))\, dx$$

da cui

$$F_o(\Omega, u) \leq \limsup_h [F_h(\Omega, w_h) - F_h(\Omega, u_h)] + \limsup_h F_h(\Omega, u_h) <$$

$$< \int_{\Omega \backslash B} a(x)\, \Lambda(u(x))\, dx + F(\Omega, u) + \varepsilon$$

e l'asserto per $B \uparrow \Omega$ e $\varepsilon > 0$.

Supporremo, d'ora in avanti, che la famiglia (τ'_Ω) di convergenze su $[C^o_o(R^N)]^N$ goda della seguente proprietà: se Ω_1 e Ω_2 sono aperti limitati

disgiunti

$$\left.\begin{array}{l} u_h^{(1)} \overset{\tau'_{\Omega_1}}{\longrightarrow} u,\ u_h^{(2)} \overset{\tau'_{\Omega_2}}{\longrightarrow} u \\ u_h(x) = \begin{cases} u_h^{(1)}(x) & \forall\, x \in \Omega_1 \\ u(x) & \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) \\ u_h^{(2)}(x) & \forall\, x \in \Omega_2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow u_h \overset{\tau_{\Omega_1 \cup \Omega_2}}{\longrightarrow} u$$

($\mathcal{F}$)

$$\left.\begin{array}{l} u_h \overset{\tau'_{\Omega_1 \cup \Omega_2}}{\longrightarrow} u \\ u_h^{(i)}(x) = \begin{cases} u_h(x) & \forall\, x \in \Omega_i \\ u(x) & \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow u_h^{(i)} \overset{\tau'_{\Omega_i}}{\longrightarrow} u\,.$$

Un esempio di famiglia di convergenze verificanti ($\mathcal{F}$) è ottenibile a partire dalla scelta τ_Ω = convergenza debole o forte di $[L^p(\Omega)]^N$.

Passiamo a dimostrare il seguente

TEOREMA 2.3. — *Se ogni τ_B proviene da una topologia che ha base numerabile di aperti, vale ($\mathcal{F}$) e si ha:*

$$B \subseteq B' \Longrightarrow \tau_B < \tau_{B'} \quad \text{e} \quad \tau'_B > \tau'_{B'}\ ; \tag{2.7}$$

se f_h soddisfano (2.6) *e*

$$F_h(\Omega, u) = \int_\Omega f_h(x, u(x))\, dx$$

allora per una (h_r), esistono, se $u \in [C_0^\circ(R^N)]^N$

$$G(B, u) = \lim_r F_{h_r}(B, u) \tag{2.8}$$

$$F(B, u) = \Gamma^-(\tau_B) \lim F_{h_r}(B, u) \tag{2.9}$$

per ogni insieme di $\mathcal{B}_n$ (1). Inoltre per tali insiemi

$$B \to G(B, u) - F(B, u) \text{ è crescente} \tag{2.10}$$

$$F(\circ, u) \text{ e } G(\circ, u) \text{ sono finitamente additive.} \tag{2.11}$$

(1) Con $\mathcal{B}_n$ indichiamo la famiglia dei plurintervalli superiormente semiaperti di R^N, con vertici razionali.

Dim. — Dalla convessità e dalla equilimitatezza dei funzionali $u \to F_h(B, u)$ segue la loro equilocale lipschitzianità; e pertanto, con un ragionamento diagonale, l'esistenza di una sottosuccessione (F_{h_p}) verificante (2.8) per ogni B e $u \in [C^\circ(R^N)]^N$.

Applicando a tale successione la prop. 1.3, si deduce la prima parte della tesi, cioè (2.8) e (2.9).

Dimostriamo la (2.10). Siano $B, A \in \mathcal{B}_n$; $B \subseteq A$ e $u \in [C^\circ(R^N)]^N$ e sia $\varepsilon > 0$. Allora esiste $u_r \to u$ in τ'_B tale che

$$F(B, u) + \varepsilon > \limsup_r F_{h_r}(B, u_r)\,.$$

Evidentemente $u_r \to u$ in τ'_A per (2.7) e allora

$$\begin{aligned} F(A, u) &\le \limsup_r F_{h_r}(B, u_r) + F_{h_r}(A \setminus B, u_r) \\ &\le F(B, u) + \varepsilon + \limsup_r F_{h_r}(A \setminus B, u) \\ &\le F(B, u) + \varepsilon + G(A, u) - G(B, u)\,. \end{aligned}$$

Ossia la (2.10) per l'arbitrarietà di ε.

Per provare la (2.11) siano Ω_1 e $\Omega_2 \in \mathcal{B}_n$ tali che $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Fissato $\varepsilon > 0$, esisteranno $u_r^{(1)} \to u$ in τ'_{Ω_1} e $u_r^{(2)} \to u$ in τ'_{Ω_2} tali che

$$\limsup_r F_{h_r}(\Omega_1, u_r^{(1)}) < F(\Omega_1, u) + \varepsilon/2$$

$$\limsup_r F_{h_r}(\Omega_2, u_r^{(2)}) < F(\Omega_2, u) + \varepsilon/2\,,$$

definendo w_r come nella ($\mathcal{F}$), si ha $w_r \to u$ in $\tau_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ e pertanto

$$F(\Omega_1 \cup \Omega_2, u) \le \liminf_r F_{h_r}(\Omega_1 \cup \Omega_2, w_r) \le \tag{2.12}$$

$$\le \limsup_r (F_{h_r}(\Omega_1, w_r) + F_{h_r}(\Omega_2, w_r)) < F(\Omega_1, u) + (\Omega_2, u) + \varepsilon\,.$$

Dimostriamo infine che

$$F(\Omega_1, u) + F(\Omega_2, u) \le F(\Omega_1 \cup \Omega_2, u)\,. \tag{2.13}$$

A tale scopo, per ogni $w_r \to u$ in $\tau'_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ poniamo

$$u_r^{(1)}(x) = \begin{cases} w_r(x) & \forall\, x \in \Omega_1 \\ u(x) & \forall\, x \in R^N \setminus \Omega_1 \end{cases}$$

$$u_r^{(2)}(x) = \begin{cases} w_r(x) & \forall\, x \in \Omega_2 \\ u(x) & \forall\, x\, R^N \setminus \Omega_2\,; \end{cases}$$

allora da $(\mathcal{F})$ segue che $u_r^{(i)} \to u$ in τ'_{Ω_i} e di conseguenza:

$$F(\Omega_1, u) + F(\Omega_2, u) \leq \liminf_r F_{h_r}(\Omega_1, u_r^{(1)}) + \liminf_r F_{h_r}(\Omega_2, u_r^{(2)}) \leq$$

$$\leq \liminf_r [F_{h_r}(\Omega_1, u_r^{(1)}) + F_{h_r}(\Omega_2, u_r^{(2)})] =$$

$$= \liminf_r [F_{h_r}(\Omega_1, w_r) + F_{h_r}(\Omega_2, w_r)] = \liminf_r F_{h_r}(\Omega_1 \cup \Omega_2, w_r)$$

per cui si ha la (2.13) ed anche il teorema, dal momento che la seconda delle (2.11) è evidente.

Osservazione 2.4. — Il risultato precedente vale più in generale supponendo che $\forall B \in \mathcal{B}_N$, $\Gamma^-(\tau_B)$ abbia la proprietà che da ogni successione f_n se ne può estrarre una $\Gamma^-(\tau_B)$ convergente.

COROLLARIO 2.5. — *Se f_h sono come nell'enunciato teorema* 2.3, *allora* $\exists$ (h_r) *crescente tale che, posto*

$$F(\Omega, u) = \sup\{F(B, u): B \in \mathcal{B}_N, B \subseteq \Omega\},$$

ove $F(B, u)$ *è come nella* (2.9), *si ha* $\forall \Omega \in A\, p_N$ *e* $\forall u \in [C^o(R^N)]^N$

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(\tau_\Omega) \lim_r F_{h_r}(\Omega, u).$$

Dim. — Basta osservare che se $B \subseteq A$ si ha:

$$\Gamma^-_{seq}(\tau_B) \liminf F_h(B, u) \leq \Gamma^-_{seq}(\tau_A) \liminf F_h(A, u)$$

$$\leq \Gamma^-_{seq}(\tau'_A) \limsup F_h(A, u) \leq \Gamma^-_{seq}(\tau'_B) \limsup F_h(A, u)$$

$$\leq \Gamma^-_{seq}(\tau'_B) \limsup F_h(B, u) + \limsup F_h(A \setminus B, u).$$

In questa ultima parte del paragrafo daremo una applicazione dei risultati precedenti a teoremi di compattezza rispetto alla $\Gamma^-_{seq}(w - [L^p]^N)$ convergenza di successioni di funzionali del tipo

$$F_h(\Omega, v) = \int_\Omega f_h(x, v(x))\, dx \qquad v \in [L^p(\Omega)]^N, \tag{2.14}$$

ove w è la convergenza debole in $[L^p(\Omega)]^N$.

Supporremo

$$\begin{cases} 0 \leq f_h(x, z) \leq \Lambda_o + \Lambda_1 |z|^p \\ |f_h^{1/p}(x, z) - f_h^{1/p}(x, z')| \leq \Lambda |z - z'| \end{cases} \tag{2.15}$$

con $p > 1$, Λ_o, Λ_1, Λ non negative. Proviamo che una sottosuccessione è dotata di $\Gamma^-_{seq}(w - [L^p]^N)$ limite del tipo

$$F(\Omega, v) = \int_\Omega f(x, v(x))\, dx \qquad v \in [L^p(\Omega)]^N, \tag{2.16}$$

con f verificante (2.15).

TEOREMA 2.6. — *Siano f_h e F_h come in* (2.14), (2.15). *Allora esistono (h_r) crescente e f verificante* (2.15) *tale che* $\forall u \in [L^p(\Omega)]^N$

$$\int_\Omega f(x, u(x))\, dx = \Gamma^-_{seq}(w - [L^p(\Omega)]^N) \lim_r F_{h_r}(\Omega, u).$$

Dim. — Dall'osservazione 2.4 e dal Corollario 2.5 seguono l'esistenza di una sottosuccessione F_{h_r} di F_h di una $F: A\, p_N \times [C^o(R^N)]^N \to R$ tale che $\forall \Omega \in A\, p_N$ e $\forall u \in [C^o(R^N)]^N$

$$F(\Omega, u) = \Gamma^-_{seq}(w - [L^p(\Omega)]^N) \lim \int_\Omega f_{h_r}(x, u(x))\, dx. \tag{2.17}$$

Dalle (2.10), (2.11) del teorema 2.3 segue poi, grazie alla proposizione 1.7, che $\forall u \in [C^o(R^N)]^N$

$$\Omega \in A\, p_N \to F(\Omega, u)$$

è traccia su $A\, p_N$ di una misura di Radon assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, e pertanto rappresentabile mediante una densità f_u:

$$F(\Omega, u) = \int_\Omega f_u(x)\, dx.$$

Ricordando che (2.17) equivale (cfr. [19]) a

$$\sqrt[p]{\int_\Omega f_u(x)\, dx} = \Gamma^-_{seq}(w - [L^p(\Omega)]^N) \lim_r \sqrt[p]{\int_\Omega f_{h_r}(x, u(x))\, dx},$$

passiamo a dimostrare che dalla (2.15) segue

$$(2.18) \qquad |\sqrt[p]{F(\Omega,u)} - \sqrt[p]{F(\Omega,v)}| \leq \Lambda \|u-v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u,v \in [C^0(R^N)]^N.$$

A tale scopo sia $\varepsilon > 0$ e $u_r \to u$ in $w - [L^p(\Omega)]^N$ tale che

$$\sqrt[p]{F(\Omega,u)} + \varepsilon > \limsup_r \sqrt[p]{F_{h_r}(\Omega,u_r)}.$$

Posto $v_r = v + u_r - u$, si ha $v_r \to v$ in $w - [L^p(\Omega)]^N$ e dunque

$$\sqrt[p]{F(\Omega,v)} \leq \limsup_r [\sqrt[p]{F_{h_r}(\Omega,v_r)} - \sqrt[p]{F_{h_r}(\Omega,u_r)}] +$$

$$+ \limsup_r \sqrt[p]{F_{h_r}(\Omega,u_r)} \leq \Lambda \|v-u\|_{L^p(\Omega)} + \sqrt[p]{F(\Omega,u)} + \varepsilon,$$

da cui la (2.18) per l'arbitrarietà di ε.

Dalle precedenti relazioni, con un metodo analogo a quello usato in [23], lemma II, si prova che esiste f verificante (2.15) per cui

$$f_u(x) = f(x,u(x)) \qquad \forall u, x$$

ossia l'asserto.

§ 3. CARATTERIZZAZIONE DELLA Γ^--CONVERGENZA PER SUCCESSIONI DI INTEGRALI DEL TIPO $\int f(x, v_1(x), \ldots, v_N(x))\,dx$

In questo paragrafo consideriamo alcuni casi di Γ^--convergenza di funzionali integrali del tipo

$$F_h(\Omega, v) = \int_\Omega f_h(x, v(x))\,dx \qquad v = (v_1, \ldots, v_N)$$

che possono essere caratterizzati tramite opportune convergenze degli integrandi.

Di utilità saranno i due seguenti lemmi.

LEMMA 3.1. — *Sia Ω un insieme misurabile di R^N, $g_h(x,z)$ una successione di funzioni misurabili in $x \in \Omega$ e convesse in $z \in R^N$, tale che*

$$(3.1) \qquad 0 \leq g_h(x,z) \leq \Lambda(z) \qquad x \in \Omega,\ z \in R^N,$$

con $\Lambda(z)$ convessa e finita su R^N.

Se $g_h(x,z)$ converge in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ a $g(x,z)$ per ogni $z \in R^N$, allora $g_h(x, v(x))$ converge in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ a $g(x, v(x))$ qualunque sia $v \in [C^0(\bar\Omega)]^N$.

Dim. — È facile verificare che $g(x,z)$ è convessa in z e verifica la (3.1). Dalla (3.1) e dalla convessità su R^N delle funzioni reali

$$z \to \|g_h(\circ, z)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

segue la loro equilipschitzianità su ogni insieme limitato.

Fissati $\varepsilon > 0$, $v \in [C^0(\bar\Omega)]^N$ e $\varphi \in L^1(\Omega)$, siano $\sigma = \varepsilon(1 + \|\varphi\|_{L^1(\Omega)})^{-1}$ e $K \subset\subset \Omega$ tale che

$$(3.2) \qquad \int_{\Omega/K} |\Lambda(v(x))\,\varphi(x)|\,dx < \sigma/4.$$

Poiché $v(K)$ è un compatto di R^N esiste una costante positiva L per cui

$$(3.3) \qquad \|g_h(\circ, z) - g_h(\circ, z')\|_{L^\infty(\Omega)} \leq L|z - z'| \qquad \forall z, z' \in v(K).$$

Se indichiamo (intendendo le disuguaglianze componente per componente) con $y_i = \min v(K) + i\,\sigma/2\,L\,\sqrt{N}$ $(i \in Z)$ e se s è il minimo intero tale che $y_s \geq \max v(K)$, per $i = 0,1,\ldots,s$ poniamo $\Omega_i = v^{-1}(]y_{i-1}, y_{i+1}[)$. Si ha che

$$(3.4) \qquad |y_i - v(x)| < \sigma/2\,L \qquad \forall x \in \Omega_i.$$

Sia $\{h_0, \ldots, h_s\}$ una partizione dell'unità su K subordinata al ricoprimento $\{\Omega_0, \ldots, \Omega_s\}$. Dalle (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) si ottiene

$$(3.5) \qquad \left|\int_\Omega g_h(x, v(x)) - g(x, v(x))\}\,\varphi(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq 2\int_{\Omega/K} |\Lambda(v(x))\,\varphi(x)|\,dx + \left|\int_\Omega \{g_h(x, v(x)) - g(x, v(x))\}\,\varphi(x)\,dx\right|$$

$$< \sigma/2 + \left|\sum_{i=0}^{s} \int_{K\cap\Omega_i} \{[g_h(x, v(x)) - g_h(x, y_i)] +\right.$$

$$\left. + [g(x, y_i) - g(x, v(x))]\}\,\varphi(x)\,h_i(x)\,dx\right|$$

$$+ \left|\sum_{i=0}^{s} \int_{K\cap\Omega_i} \{g_h(x, y_i) - g(x, y_i)\}\,\varphi(x)\,h_i(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \sigma/2 + \sum_{i=0}^{s} 2\,L \sup_{K\cap\Omega_i} |\, y_i - v(x)\,| \int_{K\cap\Omega_i} |\,\varphi(x)\,|\, h_i(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{i=0}^{s} \left| \int_{K\cap\Omega_i} \{g_h(x, y_i) - g(x, y_i)\}\,\varphi(x)\, h_i(x)\,dx \right|$$

$$< \sigma/2 + \sigma \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} + \sum_{i=0}^{s} \left| \int_{\Omega} \{g_h(x, y_i) - g(x, y_i)\}\,\varphi(x)\, h_i(x)\,dx \right| .$$

Dato che per ipotesi è possibile determinare un indice $\bar h$ per cui risulti, se $h > \bar h$ e $i = 0,1,\dots,s$

$$\left| \int_{\Omega} \{g_h(x, y_i) - g(x, y_i)\}\,\varphi(x)\, h_i(x)\,dx \right| < \sigma/2\,(s+1),$$

dalla (3.5) si ottiene

$$\left| \int_{\Omega} \{g_h(x, v(x)) - g(x, v(x))\}\,\varphi(x)\,dx \right| < \sigma/2 + \sigma \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} + \sigma/2 \leq \varepsilon .$$

per ogni $h > \bar h$, che è quanto volevasi dimostrare.

LEMMA 3.2. — *Sia Ω un insieme misurabile di R^N e $g_h(x, z)$ una successione di funzioni misurabili in $x \in \Omega$ e convesse in $z \in R^N$ tale che $0 \leq g_h(x, z) \leq \Lambda(z)$ $\forall (x, z) \in \Omega \times R^N$, con $\Lambda(z)$ funzione convessa e finita su R^N.*

Allora esistono (h_r) crescente e una funzione $g(x, z)$ misurabile in x convessa in $z \in R^N$ e verificante $0 \leq g(x, z) \leq \Lambda(z)$ tale che $g_{h_r}(x, v(x))$ converge in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ a $g(x, v(x))$ qualunque sia $v \in [C^0(\Omega)]^N$.

Dim. — Per ogni $z \in R^N$, $g_h(\circ, z)$ è limitata in $L^\infty(\Omega)$ ed è quindi relativamente compatta in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$. Con un procedimento diagonale è quindi possibile trovare una successione crescente di interi (h_r) ed una funzione $g(x, z)$ definita in $\Omega \times Q^N$ in modo che se $r \to +\infty$, $g_{h_r}(\circ, z)$ converge in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ a $g(\circ, z)$ $\forall z \in Q^N$.

La funzione $g(x, z)$ ha su $\Omega \times \Omega^N$ le stesse proprietà delle g_h. Infatti, ad esempio, passando al limite nella relazione

$$0 \leq \int_{\Omega} g_{h_r}(x, z)\, \mathbb{1}_{\Omega'}(x)\,dx \leq \Lambda(z)\,\text{mis}\,\Omega'$$

valida $\forall z \in Q^N$ e per ogni insieme misurabile $\Omega' \subset \Omega$, si ottiene

$$0 \leq \frac{1}{\text{mis}\,\Omega'} \int_{\Omega'} g(x, z)\,dx \leq \Lambda(z),$$

da cui $0 \leq g(x, z) \leq \Lambda(z)$ per quasi ogni $x \in \Omega$.

La convessità di $g(x, \circ)$ segue con un ragionamento analogo. Proprio grazie alla convessità è possibile estendere per continuità la funzione $g(x, z)$ su $\Omega \times R^N$ in modo che $0 \leq g(x, z) \leq \Lambda(z)$ per $x, z \in \Omega \times R^N$.

Proviamo che

$$(3.6) \qquad g_{h_r}(\circ, z) \to g(\circ, z) \text{ in } \sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega)) \qquad \forall z \in R^N .$$

A tale scopo, se $z \in R^N$, fissiamo una successione $(z_k) \subset Q^N$ convergente a z in R^N. Per la convessità e la equilimitatezza delle funzioni $g_h(x, \circ)$ e $g(x, \circ)$ esiste una costante L per cui

$$|\, g_h(x, z) - g_h(x, z_k)\,| \leq L\,|\, z - z_k\,|,\ |\, g(x, z) - g(x, z_k)\,| \leq L\,|\, z - z_k\,|$$

per $h \in N$ e $x \in \Omega$.

Ma allora, se $\varphi \in L^1(\Omega)$, si ha:

$$\left| \int_{\Omega} \{g_{h_r}(x, z) - g(x, z)\}\,\varphi(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{\Omega} \{[g_{h_r}(x, z) - g_{h_r}(x, z_k)] + [g(x, z_k) - g(x, z)]\}\,\varphi(x)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int_{\Omega} \{g_{h_r}(x, z_k) - g(x, z_k)\}\,\varphi(x)\,dx \right|$$

$$\leq 2L \cdot |\, z - z_k\,| \cdot \|\varphi\|_{L^1(\Omega)} + \left| \int_{\Omega} \{g_{h_r}(x, z_k) - g(x, z_k)\}\,\varphi(x)\,dx \right| .$$

Passando al limite per $r \to \infty$ e poi per $k \to \infty$, si ottiene la (3.6)

Per il lemma 3.1, dalla (3.6) segue la tesi.

Diamo ora due teoremi di caratterizzazione della Γ^- convergenza.

Indichiamo con Ω un insieme misurabile e limitato di R^N e con $f_h(x, z)$ ed $f(x, z)$ funzioni misurabili in $x \in \Omega$, convesse in $z \in R^N$, non negative in $\Omega \times R^N$. Poniamo per ogni $v \in [L^1(\Omega)]^N$

$$(3.7) \qquad F_h(v) = \int_{\Omega} f_h(x, v(x)\,dx\,; \quad F(v) = \int_{\Omega} f(x, v(x))\,dx .$$

TEOREMA 3.3. — *Supponiamo che per qualche* $\Lambda > 0$ *si abbia* $0 \le f_h(x,z) \le \Lambda |z|^p$, $0 \le f(x,z) \le \Lambda |z|^p$. *Allora* $F = \Gamma^-([L^p(\Omega)]^N) \lim F_h$ *su* $[L^p(\Omega)]^N$ *se e soltanto se* $f_h(x,\circ)$ *converge a* $f(x,\circ)$ *in* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ $\forall z \in R^N$.

Dim. — Proviamo la parte sufficiente. Dato che

$$0 \le F_h(v) \le \Lambda \| v \|_{[L^p(\Omega)]^N} \qquad \forall v \in [L^p(\Omega)]^N,$$

F_h è una successione di funzioni convesse equilimitate sui limitati di $[L^p(\Omega)]^N$. Ne segue che su tali insiemi la successione F_h è equilipschitziana. Ma allora la tesi segue dal provare che

$$\lim_h F_h(v) = F(v) \tag{3.8}$$

per ogni $v \in [L^p(\Omega)]^N$, o anche soltanto per $v \in [C^\circ(\Omega)]^N$, data la densità di tale insieme in $[L^p(\Omega)]^N$. La (3.8) segue dall'ipotesi e dal lemma 3.1.

La parte necessaria si prova con un ragionamento di compattezza. Infatti, per il lemma 3.2 esistono una funzione $g(x,z)$ misurabile in x, convessa in z, con $0 \le g(x,z) \le \Lambda |z|^p$, ed una successione crescente di interi (h_r) tali che $f_{h_r}(\circ,z)$ converge a $g(\circ,z)$ in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$. Dalla parte precedente della prova si deduce che

$$\int_\Omega f(x,v)\,dx = \int_\Omega g(x,v)\,dx \qquad \forall v \in [L^p(\Omega)]^N. \tag{3.9}$$

Se $\Omega' \subset \Omega$, ponendo nella (3.9)

$$v(x) = \begin{cases} z & \text{se } x \in \Omega' \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \backslash \Omega', \end{cases}$$

dividendo per la misura di Ω' e passando al limite quando il diametro di Ω' tende a zero, si ottiene che $f(x,z) = g(x,z)$ per quasi ogni x e per ogni z (si usa qui la continuità di f e g rispetto a z). Ciò implica che $f_h(\circ,z)$ converge a $f(\circ,z)$ in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ per ogni $z \in R^N$.

Se $f(x,z)$ è una funzione convessa in z, poniamo

$$f^*(x,z^*) = \sup_{z \in R^N} \{(z^*,z) - f(x,z)\} \qquad \forall z^* \in R^N. \tag{3.10}$$

TEOREMA 3.4. — *Siano* f_h *ed* f *funzioni misurabili in* $x \in \Omega$, *convesse in* $z \in R^N$ *e tali che* $\lambda |z|^p \le f_h(x,z)$, $\lambda |z|^p \le f(x,z)$ $(\lambda > 0, p > 1)$, $f_h(x,0) = f(x,0) = 0$ *per ogni* $x \in \Omega$ *e per ogni* $z \in R^N$. *Definite* F_h *ed* F *come in* (3.7), *si ha che* $F = \Gamma^-(w - [L^p(\Omega)]^N) \lim F_h$ *su* $[L^p(\Omega)]^N$ *se e solo se* $f_h(\circ,z) \to f(\circ,z)$ *in* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ $\forall z \in R^N$.

Dim. — Se F_h^* è la coniugata secondo Fenchel di F_h *su* $[L^{p'}(\Omega)]^N$ $(1/P + 1/p' = 1)$ si ha ([9], prop. 2.1, cap. IX)

$$F_h^*(v^*) = \int_\Omega f_h^*(x, v^*(x))\,dx$$

$$F^*(v^*) = \int_\Omega f^*(x, v^*(x))\,dx$$

Quindi, se $f_h^*(\circ,z)$ converge a $f^*(\circ,z^*)$ per il lemma 3.1, $F^*(v^*) = \lim_h F_h^*(v^*)$ per ogni $v^* \in [C^\circ(\Omega)]^N$. Ciò, in base alla proposizione 1.6, implica che $F = \Gamma^-(w - [L^p(\Omega)]^N \lim_h F_h$ su $[L^p(\Omega)]^N$.

Il viceversa si ottiene per compattezza, come nella seconda parte della prova del teorema 3.3.

Diretta conseguenza dei teoremi 3.3, 3.4 è il seguente

COROLLARIO 3.5. — *Siano* f_h *ed* f *funzioni misurabili in* x, *convesse in* z *e tali che* $\lambda |z|^p \le f_h(x,z) \le \Lambda |z|^p$ $(0 < \lambda \le \Lambda, p > 1)$ *per ogni* $x \in \Omega$, $z \in R^N$. *Se* F_h *ed* F *sono definiti da* (3.7), F_h *converge ad* F *secondo Mosco se e solo se*

(i) $\quad f_h(\circ,z) \to f(\circ,z)$ *in* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ $\qquad \forall z \in R^N$

(ii) $\quad f_h^*(\circ,z^*) \to f^*(\circ,z^*)$ *in* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ $\qquad \forall z^* \in R^N$.

Esplicitiamo le condizioni (i) e (ii) nel caso quadratico. Supponiamo cioè che $f_h(x,z) = (A_h(x)z, z)$ e $f(x,z) = (A(x)z, z)$, con $A_h(x)$ e $A(x)$ matrici $N \times N$ simmetriche con autovalori compresi fra due numeri positivi λ e Λ. Si ha

PROPOSIZIONE 3.6. — *Nelle condizioni sopra descritte,* $F_h(v) = \int_\Omega (A_h(x)v, v)\,dx$ *converge secondo Mosco a* $F(v) = \int_\Omega (A(x)v, v)\,dx$ *in* $[L^2(\Omega)]^N$ *se e soltanto se le matrici* $A_h(x)$ *e* $A_h^{-1}(x)$ *convergono in* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ *rispettivamente alle matrici* $A(x)$ *e* $A^{-1}(x)$ [2].

---

[2] $A_h(x)$ converge ad $A(x)$ in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ se, posto $A_h(x) = [a_{ij,h}(x)]$ e $A(x) = [a_{ij}(x)]$, $\forall i,j = 1, \dots, N$ $a_{ij,h}(x)$ converge in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ ad $a_{ij}(x)$.

Dim. — Basta applicare il corollario precedente osservando che, se $f_h(x,z) = (A_h(x)\,z, z)$, allora $f_h^*(x,z^*) = 1/4\,(A_h^{-1}(x)\,z^*, z^*)$.

Diamo ora un'applicazione dei risultati trovati ai funzionali del calcolo delle variazioni del tipo $\int_\Omega f(x, v, D\,v)\,dx$. Precisamente, sia Ω un aperto di R^N ed f_h: $\Omega\, x\, R^{N+1} \to R$ tale che

$$(3.11)\qquad \begin{cases} f_h(x,z) \text{ è misurab. in } x \in \Omega, \text{ convessa in } z \in R^{N+1} \\ \lambda\,|z|^p \le f_h(x,z) \le \Lambda\,|z|^p \qquad \forall\, x \in \Omega,\ z \in R^{N+1}, \end{cases}$$

con $0 < \lambda \le \Lambda$ e $p > 1$. Poniamo

$$(3.12)\qquad F_h(v) = \int_\Omega f_h(x, v, D\,v)\,dx \qquad \forall\, v \in H^{1,p}(\Omega)\,.$$

Supponiamo analogamente che

$$(3.13)\qquad F(v) = \int_\Omega f(x, v, D\,v) \qquad \forall\, v \in H^{1,p}(\Omega)\,,$$

con f verificante (3.11). Vale il seguente

TEOREMA 3.7. — *Nelle ipotesi sopra descritte se* $f_h(\circ, z)$ *converge in* $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ *a* $f(\circ, z)$ *per ogni* $z \in R^{N+1}$ *e se* $f_h^*(\circ, z^*)$ converge in $\sigma(L^\infty(\Omega), L^1(\Omega))$ *a* $f^*(\circ, z^*)$ per ogni $z^* \in R^{N+1}$, *allora* F_h *converge ad* F *secondo Mosco su* $H^{1,p}(\Omega)$.

Dim. — Se per ogni $w \in [L^p(\Omega)]^{N+1}$ poniamo

$$G_h(w) = \int_\Omega f_h(x, w)\,dx\,, \quad G(w) = \int_\Omega f(x, w)\,dx\,,$$

per i teoremi 3.3 e 3.4 si ha che

$$(3.14)\qquad G = \Gamma^-([L^p(\Omega)]^{N+1}) \lim_h G_h$$

$$(3.15)\qquad G = \Gamma^-(w - [L^p(\Omega)]^{N+1}) \lim_h G_h\,.$$

Sia v_h una successione convergente debolmente a v in $H^{1,p}(\Omega)$. Dato che $w_h = (v_h, D_1 v_h, \dots, D_N v_h)$ converge debolmente in $[L^p(\Omega)]^{N+1}$ a

$w = (v, D_1 v, \dots, D_N v)$, dalla (3.15) si ha che $G(w) \le \liminf_h G_h(w_h)$. In altri termini si è provato che

$$(3.16)\qquad v_h \to v \text{ in } H^{1,p}(\Omega) \Rightarrow F(v) \le \liminf_h F_h(v_h)\,.$$

Inoltre, dato che

$$\lambda\,\|w\|^p_{[L^p(\Omega)]^{N+1}} \le G_h(w) \le \Lambda\,\|w\|^p_{[L^p(\Omega)]^{N+1}}$$

e data l'ipotesi di convessità, la successione G_h è equilocalmente lipschitziana su $[L^p(\Omega)]^{N+1}$.

Dalla (3.14) segue allora che $G(w) = \lim_h G_h(w)$ per ogni $w \in [L^p(\Omega)]^{N+1}$. In particolare, se $w = (v, D_1 v, \dots, D_n v)$ si ha:

$$(3.17)\qquad F(v) = \lim_h F_h(v) \qquad \forall\, v \in H^{1,p}(\Omega)\,.$$

Le (3.16) e (3.17) danno la tesi.

Osservazione 3.8. — Con la stessa dimostrazione sopra proposta si prova che le ipotesi del teorema 3.7 sono sufficienti ad avere la convergenza di F_h ad F secondo Mosco in un qualsiasi sottoinsieme di $H^{1,p}(\Omega)$.

Inoltre, se $F_h(v) = \int_\Omega f_h(x, D\,v)\,dx$, cioè se gli integrandi non dipendono da v, ma solo da $D\,v$, la (3.11) non è soddisfatta. È però naturale in tal caso supporre $\lambda\,|z|^p \le f_h(x,z) \le \Lambda\,|z|^p$ per ogni $z \in R^N$ (invece che ad R^{N+1}) ed ottenere la tesi come nel caso precedente.

Osservazione 3.9. — Il risultato del teor. 3.7 non è invertibile. Se infatti f_h sono definite per $x \in R^2$, $z \in R^2$ da:

$$f_h(x,z) = a(h\,x_2)\,z_1^2 + z_2^2\,,$$

ove $a(t)$ è periodica di periodo 1 ed è definita per $t \in (0,1)$ da

$$a(t) = \begin{cases} 5/4 & 1/2 < t < 1 \\ 3/4 & 0 < t \le 1/2 \end{cases}$$

con $f(x,z) = |z|^2$ si ha (cfr. [13] prop. 13 e [25] remark 8),

$$\int_\Omega f(x, D\,u)\,dx = \Gamma^-(w - H^{1,2}, s - H^{1,2}) \lim_h \int_\Omega f_h(x, D\,u)\,dx$$

su $H^{1,2}_{(\Omega)}$, ovvero convergenza secondo Mosco degli integrali; mentre è facile verificare che $f^*_h(\circ, z^*)$ non converge in $\sigma(L^\infty, L^1)$ verso $f^*(\circ, z^*) = 1/4\,|z^*|^2$. In particolare non esiste limite secondo Mosco della successione

$$\int_\Omega f_h(x, v(x))\,dx \qquad v \in [L^2(\Omega)]^2.$$

§ 4. CARATTERIZZAZIONE DELLA $\Gamma^-(w - H^{1,p})$ CONVERGENZA DI SUCCESSIONI DI INTEGRALI SEMPLII DEL TIPO $\int f(x, v')\,dx$

In questo paragrafo prendiamo in considerazione successioni di funzioni f_h: $(a, b)\,x\,R \to R$ verificanti per ogni h le seguenti condizioni:

$$(4.1)\qquad \begin{cases} f_h(x, z) \text{ misurabile in } x \text{ e convessa in } z \\ f_h(x, z) \geq \lambda\,|z|^p \qquad \forall\, x, z \\ f_h(x, z_\circ) \leq M \qquad \forall\, x \\ \displaystyle\int_a^b f_h(x, z)\,dx \leq \Lambda(z) \qquad \forall\, z\,; \end{cases}$$

con $\lambda > 0$, $p < 1$, $z_\circ$ ed M numeri reali fissati e $\Lambda : R \to R$.

Tali condizioni sono verificate ad esempio se $f_h(x, z) = a_h(x)\,|z|^p$, con (a_h) limitata in $L^1(a, b)$ e $a_h(x) \geq \lambda > 0$.

Se Ω è un intervallo aperto contenuto in (a, b) poniamo:

$$(4.2)\qquad F_h(\Omega, v) = \int_\Omega f_h(x, v')\,dx \qquad \forall\, v \in H^{1,p}(\Omega).$$

Se $\Omega = (a, b)$ indicheremo semplicemente $F_h((a, b), v) = F_h(v)$ e $H^{1,p}(a, b) = H^{1,p}$.

Per ogni h, F_h è un funzionale a valori in $R \cup \{+\infty\}$ semicontinuo inferiormente su $H^{1,p}$. Generalmente F_h non è finito su tutto $H^{1,q}$ per alcun q tale che $p \leq q < \infty$, mentre la successione F_h è limitata su $H^{1,\infty}$; infatti, se $A \leq v'(x) \leq B$, allora $v'(x) = \alpha(x)\,A + (1 - \alpha(x))\,B$ con $0 \leq \alpha(x) \leq 1$; da cui

$$0 \leq F_h(v) \leq \int_a^b \{\alpha(x) f(x, A) + (1 - \alpha(x)) f(x, B)\}\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \{f(x, A) + f(x, B)\}\,dx \leq \Lambda(A) + \Lambda(B).$$

Cominciamo con lo stabilire l'invarianza della Γ^- convergenza rispetto alle topologie L^q $(1 \leq q \leq \infty)$ e $w - H^{1,p}$.

PROPOSIZIONE 4.1. — *Sia data una successione f_h verificante* (4.1). *Se F_h è definito come in* (4.2), *è possibile determinare un funzionale $F : H^{1,p} \to R \cup \{+\infty\}$ convesso e semicontinuo inferiormente su $H^{1,p}$ ed una sottosuccessione F_{h_r} di F_h tali che*:

$$(4.3)\qquad F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_r F_{h_r} = \Gamma^-(L^q) \lim_r F_{h_r} \text{ su } H^{1,p}$$

qualunque sia $q \in [1, a]$.

Dim. — In base alla Prop. 1.3 esiste un funzionale F convesso e semicontinuo inferiormente su $L^1 = L^1(a, b)$ ed esiste una sottosuccessione F_{h_r} di F_h tali che

$$(4.4)\qquad F = \Gamma^-(L^1) \lim_r F_{h_r} \text{ su } H^{1,p}.$$

Da ciò, in base ai teoremi di immersione compatta, per provare la (4.3) è sufficiente mostrare che per ogni v per cui $F(v) < +\infty$ è possibile determinare una successione v_r tale che:

$$(4.5)\qquad v_r \to v \text{ in } w - H^{1,p},\ F_{h_r}(v_r) \to F(v).$$

La (4.4) garantisce l'esistenza di una successione v_r convergente a v in L^1 per cui $\lim_r F_{h_r}(v_r) = F(v)$. Per la (4.1) si ha allora definitivamente

$$\|v_r'\|_{L^p} \leq 1/\lambda\, F_{h_r}(v_r) \leq 1/\lambda\,(F(v) + 1)$$

Usando la riflessività di L^p si verifica allora facilmente che v_r converge debolmente in $H^{1,p}$ a v, che è quanto richiesto nella (4.5).

Proviamo ora che, nelle condizioni della proposizione precedente, il Γ^--limite è indipendente dai dati al contorno nello spazio funzionale ambiente.

PROPOSIZIONE 4.2. — *Sia F_h definita da* (4.2) *con f_h verificante* (4.1). *Esistono una sottosuccessione F_{h_r} di F_h ed una funzionale F convesso e semicontinuo inferiormente su $H^{1,p}$ tali che*

$$F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_r F_{h_r} \text{ su } V + w$$

qualunque siano $w \in H^{1,p}$ *e* V *sottospazio chiuso di* $H^{1,p}$, *contenente* $H_0^{1,p}$.

Dim. — Dalla Proposizione 4.1 segue l'esistenza di F_{h_r} ed F tali che:

$$F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_r F_{h_r} \text{ su } H^{1,p}. \tag{4.6}$$

Se $v \in H^{1,p}$, indichiamo con v_r la successione convergente a v in $H^{1,p}$ per cui $\lim_r F_{h_r}(v_r) = F(v)$.

Poniamo

$$v_r^{(1)}(x) = (1 - \alpha_r) v_r(x) + \alpha_r \beta_r$$

con $\alpha_r = (v(a) - v_r(a))/(\beta_r - v_r(a))$ con β_r tale che $|\beta_r| = \sup |v_r(a)| + 1$ e di segno scelto in modo che $\alpha_r \geq 0$;

Risulta $v_r^{(1)}(a) = v(a)$. Inoltre, tenendo conto che v_r converge a v uniformemente in (a, b), si ha che $\lim_r \alpha_r = 0$ e quindi $v_r^{(1)}$ converge a v in $w - H^{1,p}$. Essendo poi per r grande $0 \leq \alpha_r \leq 1$, usando la convessità dei funzionali si ha

$$F_{h_r}(v_r^{(1)}) \leq (1 - \alpha_r) F_{h_r}(v_r) + \alpha_r \Lambda(0).$$

Passando al limite per $r \to +\infty$ si ottiene

$$\limsup_r F_{h_r}(v_r^{(1)}) \leq F(v)$$

da cui, per le (4.6),

$$\lim_r F_{h_r}(v_r^{(1)}) = F(v). \tag{4.7}$$

Poniamo ora $w(x) = \xi(x - a) + v(a) - v(x)$ (ξ da determinare) e:

$$v_r^{(2)}(x) = (1 - \gamma_r)(v_r^{(1)}(x) - v(x)) + \gamma_r w(x)$$

$$\gamma_r = \frac{v(b) - v_r^{(1)}(b)}{w(b) - v_r^{(1)}(b) - v(b)}$$

Scegliamo $|\xi|$ in modo tale che $|w(b)| = \sup_r |v_r^{(1)}(b) + v(b)| + 1$; il segno di ξ sia tale che risulti $\gamma_r \geq 0$.

Dato che $v_r^{(1)}(a) = v(a)$ e $\lim_r v_r^{(1)}(b) = v(b)$, si verifica che $v_r^{(2)} \in H_0^{1,p}$, $\lim_r \gamma_r = 0$ e quindi $v_r^{(2)}$ tende a zero in $H_0^{1,p}$.

Ma allora

$$v_r^{(3)}(x) = v_r^{(2)}(x) + v(x) = (1 - \gamma_r) v_r^{(1)}(x) + \gamma_r(\xi(x - a) + v(a))$$

è una successione in $H_0^{1,p} + v$ che converge a v in $H^{1,p}$. Inoltre per r grande si ha

$$F_{h_r}(v_r^{(3)}) \leq (1 - \gamma_r) F_{h_r}(v_r^{(1)}) + \gamma_r \max\{\Lambda(\xi), \Lambda(-\xi)\}.$$

Come sopra si ottiene dalle (4.7) che

$$\lim_r F_{h_r}(v_r^{(3)}) = F(v).$$

Siano ora V e w fissati. Dato che, se $v \in V + w$, allora $\{v_r^{(3)}\} \subset H_0^{1,p} + v \subset H_0^{1,p} + V + w = V + w$, si è provato che

$$\forall v \in V + w \text{ esiste } \{v_r^{(3)}\} \subset V + w \text{ tale che}$$

$$v_r^{(3)} \to v \text{ in } w - H^{1,p} \text{ e } \lim_r F_{h_r}(v_r^{(3)}) = F(v).$$

Ciò, insieme alla (4.6) dà la tesi.

Osservazione 4.3. — Con la dimostrazione del lemma precedente, si è provato anche che se $F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_h F_h$ su $V + w$, allora $F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_h F_h$ su $V_0 + w$, qualunque sia il sottospazio chiuso V_0 tale che $H_0^{1,p} \subset V_0 \subset V$. Non vale però il viceversa.

Infatti se si considera ad esempio

$$F_h(v) = \int_a^b (v'^2 + (-1)^h v')\, dx$$

su H_0^1 la successione è costante, mentre non esiste il Γ^- limite su H^1.

Prendiamo ora in considerazione una singola funzione $f = f(x, z)$ verificante (4.1) e poniamo, se Ω è un intervallo aperto contenuto in (a, b).

$$F(\Omega, v) = \int_\Omega f(x, v')\, dx \qquad v \in H^{1,p}(\Omega). \tag{4.8}$$

Con il risultato seguente diamo una rappresentazione della funzione coniugata della F in termini della coniugata dell'integrando.

Poniamo a tale scopo

$$f^*(x, z^*) = \sup_{z \in R} \{z^* z - f(x, z)\} \quad x \in (a, b), z \in R . \tag{4.9}$$

PROPOSIZIONE 4.4. — *Sia f una funzione verificante* (4.1) *ed F definita da* (4.8). *Se* F^* *è la funzione coniugata di* F *sullo spazio* $V = \{v \in H^{1,p} : v(b) = 0\}$, si ha

$$F^*(\varphi) = \int_a^b f^* \left(x, -\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) dx \qquad \forall \varphi \in L^1.$$

Suddividiamo la prova in due parti, supponendo nella prima parte che f sia C^1 in z.

Dim. — (Nell'ipotesi $f(x, \circ) \in C^1 \; \forall x$). Dalla seconda relazione di (4.1), si deduce che l'estremo superiore della (4.9) è un massimo. Derivando rispetto a z l'argomento della (4.9) si ottiene che il massimo è raggiunto se $z^* - f_z(x, z) = 0$, cioè a dire

$$z^* - f_z(x, z) = 0 \Leftrightarrow f^*(x, z^*) = z^* z - f(x, z) . \tag{4.10}$$

Se $\varphi \in L^1$, $v \in V$, posto $\Phi(x) = -\int_a^x \varphi(t)\, dt$ si ha $\int_a^b \varphi\, v\, dx = \int_a^b \Phi\, v'\, dx$.

Quindi

$$F^*(\varphi) = \sup \left\{ \int_a^b [\varphi v - f(x, v')]\, dx : v \in V \right\} \tag{4.11}$$

$$= \sup \left\{ \int_a^b [\Phi v' - f(x, v')]\, dx ; v \in V \right\} .$$

L'estremo superiore nella (4.11) è un massimo (per l'ipotesi (4.1)) e le funzioni massimanti u verificano l'equazione di Eulero

$$u \in V \quad \int_a^b (\Phi - f_z(x, u'))\, v'\, dx = 0 \qquad \forall v \in V ;$$

ciò significa che $(\Phi - f_z(x, u'))' = 0$ e $f_z(a, u'(a)) = 0$, e quindi $\Phi(x) - f_z(x, u'(x)) = 0$. Tenendo conto della (4.10) si ha

$$F^*(\varphi) = \int_a^b f^*(x, \Phi(x))\, dx$$

che è quanto si voleva dimostrare.

Dim. — (Nel caso generale). Essendo f convessa in z, essa è anche continua in tale variabile. Consideriamo una funzione (regolarizzante) $\alpha = \alpha(t)$ pari e positiva, $\alpha \in C_0^1(-1, 1)$, $\int_{-1}^1 \alpha(t)\, dt = 1$.

Sia $\alpha_k(t) = k\, \alpha(k t)$ e $f_k(x, z) = \int_{-1}^1 \alpha_k(t) f(x, z - t)\, dt$.

Per ogni x fissato f_k è convessa e C^1 in z. Inoltre

$$f_k(x, z) \geq f(x, z) \geq \lambda |z|^p ; \tag{4.12}$$

infatti ciò segue da

$$f_k(x, z) = \int_{-1}^1 \alpha_k(t) f(x, z - t)\, dt \geq f\left(x, z - \int_{-1}^1 t\, \alpha_k(t)\, dt\right) = f(x, z) ;$$

si è usata la disuguaglianza di Jensen ed il fatto che $t\, \alpha_k(t)$ è una funzione dispari.

È facile verificare che per ogni x, f_k converge a f uniformemente al variare di z in un qualsiasi intervallo limitato. Ciò implica che $f(x, z) = \Gamma^-(R) \lim_k f_k(x, z)$ e quindi, tenendo presente la (4.12)

$$f(x, z^*) = \lim_k f_k^*(x, z^*) \qquad \forall x \in (a, b), \; \forall z^* \in R . \tag{4.13}$$

Dato che $f_k(x, \circ)$ per ogni x e per ogni k, dalla prima parte della dimostrazione si ha

$$F_k^*(\varphi) = \int_a^b f_k^* \left(x, -\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) dx , \varphi \in L^1 ; \tag{4.14}$$

si è indicata con F_k^* la polare di $F_k(v) = \int_a^b f_k(x, v')\, dx$ sullo spazio V.

Al fine di passare al limite nella (4.14) per $k \to \infty$, proviamo che la successione degli integrandi soddisfa le ipotesi del teorema di convergenza dominata.

Se z' è il minimo di $f(x, \circ)$ su R, allora $\lambda |z'|^p \leq f(x, z') \leq f(x, z_0) \leq M$, da cui

$$z > (M/\lambda)^{1/p} \Rightarrow f'_+(x, z) > 0 \qquad \forall x \in (a, b),$$

dove f'_+ indica la derivata destra di $f(x, \circ)$.

Posto $z_1 = (M/\lambda)^{1/p} + 2$, per la monotonia del rapporto incrementale si ha

$$0 < f'_+(x, z_1 - 1) \leq \frac{f(x, z_1 + t) - f(x, z_1)}{t} \leq f'_+(x, z_1 + 1)$$

per ogni $0 < |t| < 1$. Da ciò segue che

$$|f(x, z_1 + t) - f(x, z_1)| \leq f'_+(x, z_1 + 1)\,|t|.$$

si ottiene allora

$$(4.15) \qquad |f_k(x, z_1) - f(x, z_1)| = \left| \int_{-1}^{1} \alpha_k(t) \{f(x, z_1 - t) - f(x, z_1)\}\, dt \right| \leq$$

$$\leq f'_+(x, z_1 + 1) \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} \alpha_k(t)\,|t|\, dt \leq \frac{1}{k} f'_+(x, z_1 + 1)$$

La funzione $G(z) = \int_a^b f(x, z)\, dx$ essendo finita e convessa su R è lipschitziana su ogni intervallo limitato. Quindi è finita la sua derivata destra in $z_1 + 1$, cioè

$$(4.16) \qquad G'_+(z_1 + 1) = \int_a^b f'_+(x, z_1 + 1)\, dx < + \infty$$

In particolare dalle (4.15), (4.16) discende che

$$f_k(x, z_1) \leq f(x, z_1) + f'_+(x, z_1 + 1) = \psi(x) \in L^1.$$

Da ciò e dalla seconda delle (4.1) si ottiene

$$z^* z_1 - \psi(x) \leq f_k^*(x, z^*) \leq (\lambda p)^{\frac{1}{1-p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) |z^*|^{\frac{p}{p-1}}$$

per ogni $z^* \in R$ ed ogni $x \in (a, b)$. Per $z^* = -\int_b^x \varphi(t)\, dt$ le relazioni soprascritte rendono lecito il passaggio al limite per $k \to +\infty$ al secondo membro della (4.14), essendo verificate le ipotesi del teorema di convergenza dominata di Lebesgue.

Tenendo presente che, in base alla (4.12) $F_k^*(\varphi) \leq F^*(\varphi)\ \forall \varphi \in L^1$, si ottiene

$$(4.17) \qquad F^*(\varphi) \geq \int_a^b f^*\left(x, -\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) dx$$

Dato che la disuguaglianza opposta alla (4.17) si ottiene direttamente dalla (4.11), la prova è completa.

COROLLARIO 4.5. — *Sia f una funzione verificante* (4.1). *La polare* F^* *di* $F(v) = \int f(x, v')\, dx$ *rispetto allo spazio ambiente* $V + B = \{v \in H^{1,p}: v(b) = B\}$ $(B \in R)$ è:

$$F^*(\varphi) = \int_a^b \varphi B + f^*\left(x, -\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) dx, \qquad \forall \varphi \in L^1.$$

Dimostrazione. — È diretta conseguenza della proposizione precedente quando si osservi che

$$F^*(\varphi) = \sup\left\{\int_a^b [\varphi v - f(x, v')]\, dx : v \in V + B\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int_a^b [\varphi(v + B) - f(x, v')]\, dx : v \in V\right\} =$$

$$= \int_a^b \varphi B + \sup\left\{\int_a^b [\varphi v - f(x, v')]\, dx : v \in V\right\}.$$

Siamo ora in grado di provare il teorema di caratterizzazione della Γ^- convergenza. A causa delle Proposizioni 4.1 e 4.2, ci limiteremo a

considerare la Γ^- convergenza di $F_h(\Omega, v)$ nella topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$ e nello spazio ambiente $W^{1,p}(\Omega)$.

TEOREMA 4.6. — *Siano f_h ed f funzioni verificanti* (4.1) *ed $F_h(\Omega, v)$ ed $F(\Omega, v)$ definite su $W^{1,p}$ rispettivamente da* (4.2) *e* (4.8). *Condizione necessaria e sufficiente affinché*

$$F(\Omega, v) = \Gamma^-(w - W^{1,p}) \lim_h F_h(\Omega, v) \text{ su } W^{1,p}(\Omega)$$

qualunque sia l'intervallo aperto Ω contenuto in (a, b) è che $f_h^*(\circ, z^*)$ converga a $f^*(\circ, z^*)$ in $\sigma(L^\infty, L^1)$ qualunque sia $z^* \in R$.

Dim. — Supponiamo che $f_h^*(\circ, z^*)$ converga in $\sigma(L^\infty, L^1)$ a $f^*(\circ, z^*)$ per ogni $z^* \in R$. Dalla seconda e dalla terza relazione in (4.1) si ha che

$$z^* z_\circ - M \leq f_h^*(x, z^*) \leq (\lambda p)^{\frac{1}{1-p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) |z^*|^{\frac{p}{p-1}} \tag{4.18}$$

per ogni $x \in (a, b)$ ed ogni $z^* \in R$. Applicando il lemma 3.1 alla successione $g_h(x, z^*) = f_h^*(x, z^*) - z^* z_\circ + M$ si ottiene che per ogni $\varphi \in L^1$

$$f_h^*\left(x, -\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) \to f^*\left(x, -\int_a^x \varphi(t)\, dt\right) \text{ in } \sigma(L^\infty, L^1).$$

Consideriamo preliminarmente il caso dello spazio ambiente $V = \{v \in W^{1,p} : v(b) = 0\}$ e $w(x) = B$.

Se indichiamo con F_h^* ed F^* le funzioni polari rispettivamente di F_h ed F su $V + w$, abbiamo, in base al corollario 4.5, che:

$$\lim_h F_h^*(\varphi) = F^*(\varphi) \qquad \forall \varphi \in L^1;$$

e ciò, per la proposizione 1.6, implica che

$$\Gamma^-(w - W^{1,p}) \lim_h F_h = F \quad \text{su} \quad V + w. \tag{4.19}$$

Facendo uso della proposizione di compattezza 4.2 si ottiene che (4.19) vale più generalmente nello spazio ambiente $W^{1,p}$. Infine, sostituendo all'intervallo (a, b) un generico intervallo aperto $\Omega \subset (a, b)$ si ottiene quanto si voleva dimostrare.

Il viceversa si consegue con un ragionamento di compattezza. Infatti la successione $g_h(x, z^*) = f_h^*(x, z^*) - z^* z_\circ + M$ verifica, per la (4.18), le ipotesi del lemma 3.2. Esiste quindi una sottosuccessione $g_{h_r}(\circ, z^*)$ convergente in $\sigma(L^\infty, L^1)$ per ogni $z^* \in R$ ad una funzione $g(\circ, z^*)$ convessa in z^* e tale che

$$0 \leq g(x, z^*) \leq (\lambda p)^{\frac{1}{1-p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) |z^*|^{\frac{p}{p-1}} - z^* z_\circ + M.$$

Posto

$$\tilde{f}^*(x, z^*) = g(x, z^*) + z^* z_\circ - M,$$

$$\tilde{f}(x, z) = \sup\{z^* z - \tilde{f}^*(x, z^*) : z^* \in R\},$$

si verifica facilmente che $\tilde{f}$ verifica le prime tre condizioni di (4.1). Dalla prima parte della dimostrazione si ha allora che

$$\int_\Omega \tilde{f}(x, v')\, dx = \int_\Omega f(x, v')\, dx \qquad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{4.20}$$

Sia z_k una successione densa in R; posto nella (4.20) $v_k(x) = z_k x$, dall'arbitrarietà di Ω segue che $f(x, z_k) = \tilde{f}(x, z_k)$ per quasi ogni x e per ogni k. Ciò implica che per gli stessi x l'uguaglianza valga per ogni $z \in R$, essendo f ed $\tilde{f}$ continue rispetto a tale variabile.

Infine, dato che $\tilde{f} = f$ non dipende dalla successione estratta all'inizio, si ottiene che $f_h(\circ, z^*)$ converge a $f(\circ, z^*)$ in $\sigma(L^\infty, L^1)$ per ogni z^*, che è quanto volevasi dimostrare.

COROLLARIO 4.7. — *Per ogni successione f_h verificante* (4.1), *esiste una sottosuccessione f_{h_r} di f_h e una funzione f verificante* (4.1) *tale che, se $F_h(\Omega, v)$ ed $F(\Omega, v)$ sono definite da* (4.2) *e* (4.8):

$$F(\Omega, v) = \Gamma^-(w - W^{1,p}) \lim_r F_{h_r}(\Omega, v)$$

su $W^{1,p}(\Omega)$ qualunque sia l'intervallo aperto Ω contenuto in (a, b).

Dim. — Come nella seconda parte della prova del teorema precedente si trova una successione f_{h_r} estratta da f_h e si costruisce una funzione $f(x, z)$ verificante le prime tre condizioni di (4.1) per cui

$$f_{h_r}^*(\circ, z^*) \to f^*(\circ, z^*) \text{ in } \sigma(L^\infty, L^1) \qquad \forall z^* \in R$$

Se F_h ed F sono definite rispettivamente da (4.2) e (4.8), dal teorema precedente si ottiene che

$$F(\Omega, v) = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_r F_{h_r}(\Omega, v)$$

su $H^{1,p}(\Omega)$ qualunque sia l'intervallo $\Omega \subset (a, b)$.

In particolare se $\Omega = (a, b)$ e $v(x) = z\,x$ si ha

$$\int_a^b f(x, z)\,dx = F(v) \leq \liminf_r F_{h_r}(v) =$$

$$= \liminf_r \int_a^b f_{h_r}(x, z)\,dx \leq \Lambda(z).$$

Ciò prova che f verifica anche la quarta condizione in (4.1).

Diamo ora alcune proporzioni ed esempi facendo uso dei risultati sopra esposti.

PROPOSIZIONE 4.8. — *Se f_h è una successione verificante* (4.1) *e convergente (puntualmente) per ogni $x \in (a, b)$ e per ogni $z \in R$ ad una funzione $f = f(x, z)$; allora*

$$F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_h F_h \quad \text{su } H^{1,p},$$

ove F_h ed F sono definite da (3.2) *e* (3.8).

Dim. — Siano $z_1 < z_2$ e x fissati. Esiste un intero ν tale che per ogni $h > \nu$ si abbia

$$f_h(x, z_1) \leq f(x, z_1) + 1 \quad f_h(x, z_2) \leq f(x, z_2) + 1.$$

Sia $z = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2$ $(0 < \alpha < 1)$; allora si ha

$$\lambda |z|^p \leq f_h(x, z) \leq \alpha f(x, z_1) + (1 - \alpha) f(x, z_2) + 1.$$

La successione $f_h(x, \circ)$ è quindi equilimitata in $[z_1, z_2]$. Da ciò e dalla convessità di ogni $f_h(x, \circ)$ si ottiene che la successione è equilipschitziana in $[z_1, z_2]$. Perciò per ogni $x \in (a, b)$ $f_k(x, \circ)$ converge a $f(x, \circ)$ uniformemente al variare di z in un qualsiasi intervallo limitato. Ciò implica che $f(x, \circ) = \Gamma^-(R) \lim_h f_h(x, \circ)$ e quindi

$$f(x, z^*) = \lim_h f_h^*(x, z^*) \quad \forall x \in (a, b), z^* \in R.$$

Dalla (4.18) discende che la successione $f_h^*(\circ, z^*)$ è equilimitata in (a, b) per ogni $z^* \in R$. È perciò possibile applicare il teorema di convergenza dominata e ottenere

$$\lim_h \int_a^b f_h^*(x, z^*)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f^*(x, z^*)\,\varphi(x)\,dx$$

per ogni $\varphi \in L^1$ e per ogni $z^* \in R$. La conclusione segue dal teorema 4.6.

PROPOSIZIONE 4.9. — *Siano F_h ed F funzionali su $H^{1,p}$ definiti da (Ω intervallo aperto di (a, b))*

$$F_h(\Omega, v) = \int_\Omega a_h^{-1}(x)\,g(x, a_h(x)\,v')\,dx$$

$$F(\Omega, v) = \int_\Omega a^{-1}(x)\,g(x, a(x)\,v')\,dx$$

con $f_h(x, z) = a_h^{-1}(x)\,g(x, a_h(x)\,z)$ verificante (4.1) *e*

$$0 < \lambda \leq a_h(x).$$

Si ha che

$$F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_h F_h$$

su $H^{1,p}(\Omega)$ qualunque sia l'intervallo aperto $\Omega \subset (a, b)$, se e soltanto se

$$a_h^{-1} \to a^{-1} \qquad \sigma(L^\infty, L^1).$$

Dim. — Dato che

$$f_h^*(x, z^*) = \sup\{z^* z - a_h^{-1}(x)\,g(x, a_h(x)\,z) : z \in R\} =$$

$$= a_h^{-1}(x) \sup\{z^*(a_h(x)\,z) - g(x, a_h(x)\,z) : z \in R\} = a_h^{-1}(x)\,g^*(x, z^*),$$

il risultato è conseguenza del teorema (4.6).

Osservazione 4.10. — Dalla proposizione precedente si ottiene, ad esempio, ponendo $g(x, z) = (z^2 + 1)^2$, che, se

$$F_h(v) = \int_a^b (a_h^3\,v'^4 + 2\,a_h\,v'^2)\,dx$$

$$F(v) = \int_a^b (a^3\,v'^4 + 2\,a\,v'^2)\,dx$$

con a_h successione limitata in L^1 e $a_h(x) \geq \lambda > 0$, la convergenza di a_h^{-1} verso a^{-1} in $\sigma(L^\infty, L^1)$ è condizione necessaria e sufficiente affinché $F = \Gamma^-(w - H^{1,4}) \lim_h F_h$ su $H^{1,4}$.

Una diversa situazione si presenta invece per la successione di funzionali su $H^{1,4}$

$$F_h(v) = \int_a^b (v'^4 + 2\, a_h\, v'^2)\, dx$$

In tal caso, se $(0 < \alpha \leq \beta)$

$$a_h(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } \dfrac{2k}{h} \leq x < \dfrac{2k+1}{h} \qquad k \in Z \\ \beta & \text{se } \dfrac{2k+1}{h} \leq x < \dfrac{2(k+1)}{h} \qquad k \in Z \end{cases} \tag{4.20}$$

si prova (cfr. [24]) che il Γ^--limite, certo esistente almeno per una sottosuccessione in base al corollario 4.7, è un funzionale

$$\int_a^b g(x, v')\, dx$$

con integrando $g(x, z)$ non è un polinomio in z.

Nell'esempio che segue mostriamo che la classe di funzionali

$$F(v) = \int_a^b a(x)\, g(v')\, dx \tag{4.21}$$

non è in generale chiusa rispetto alla Γ-convergenza.

ESEMPIO 4.11. — Sia $a_h(x)$ come in (4.20) e

$$F_h(v) = \int_a^b a_h(x)\, e^{|v'|}\, dx$$

allora

$$\Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim F_h = \int_a^b f(v')\, dx \text{ su } V + w$$

per ogni $p > 1$, dove

$$f(z) = \begin{cases} \alpha\, e^{2|z|} & \text{se } |z| < \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\beta}{\alpha} \\ \sqrt{\alpha\beta}\; e^{|z|} & \text{se } |z| \geq \dfrac{1}{2} \log \dfrac{\beta}{\alpha} \end{cases} \tag{4.22}$$

Dim. — Posto $f_h(x, z) = a_h(x)\, e^{|z|}$ si ha che

$$f_h^*(x, z^*) = \begin{cases} -a_h(x) & \text{se } |z^*| < a_h(x) \\ z^* \left(\lg \dfrac{z^*}{a_h(x)} - 1 \right) & \text{se } |z^*| \geq a_h(x). \end{cases}$$

Per ogni $z^* \in R$, f_h converge in $\sigma(L^\infty, L^1)$ alla funzione f^* definita da

$$f^*(z^*) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha + \beta}{2} & \text{se } |z^*| < \alpha \\ \dfrac{1}{2} \left[z^* \left(\lg \dfrac{z^*}{\alpha} - 1 \right) - \beta \right] & \text{se } \alpha \leq |z^*| < \beta \\ z^* \left(\log \dfrac{z^*}{\sqrt{\alpha\beta}} - 1 \right) & \text{se } |z^*| \geq \beta. \end{cases}$$

che è la funzione coniugata della (4.22).

A questo punto basta applicare il teorema 4.6.

Esistono classi di funzionali del tipo (4.21) chiuse rispetto alla Γ^- convergenza. Diamo di seguito due diverse situazioni in cui ciò accade.

PROPOSIZIONE 4.12. — *Sia a_h una successione di funzioni tale che*

$$a_h(x) \geq \lambda > 0, \quad \| a_h \|_{L^1} \leq \Lambda.$$

Se $p > 1$ ed Ω è un intervallo aperto contenuto in (a, b), poniamo

$$F_h(\Omega, v) = \int_\Omega a_h(x)\, |v'|^p\, dx$$

$$F(\Omega, v) = \int a(x)\, |v'|^p\, dx \qquad \forall v \in W^{1,p}(\Omega)$$

con $a(x)$ verificante le stesse limitazioni di a_h. Si ha che

$$F = \Gamma^-(w - H^{1,p}) \lim_h F_h \text{ su } H^{1,p}$$

se e soltanto se

$$a_h^{\frac{1}{1-p}} \to a^{\frac{1}{1-p}} \quad in \quad \sigma(L^\infty, L^1)$$

Dim. — È conseguenza del teorema 4.6 che, posto

$$f_h(x, z) = a_h(x) |z|^p$$

si ha

$$f_h^*(x, z^*) = a_h(x)^{\frac{1}{1-p}} p^{\frac{1}{1-p}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) |z^*|^{\frac{p}{p-1}}$$

PROPOSIZIONE 4.13. — *Siano a_h, a funzioni misurabili tali che*

$$0 < \lambda \leq a_h(x), \; a(x) \leq \Lambda .$$

Posto

$$F_h(v) = \int_a^b a_h(x) e^{v'} dx$$

$$F(v) = \int_a^b a(x) e^{v'} dx \qquad v \in H^{1,p}$$

Si ha che

$$F = \Gamma^-_{seq}(\tau) \lim_h F_h \; su \; H^{1,p}$$

ove τ è la topologia L^p o la topologia debole di $H^{1,p}$ (debole se $p = \infty$) per ogni $p \in [1, \infty]$, se e soltanto se*

$$\log a_h \to \log a \qquad \sigma(L^\infty, L^1) .$$

Dim. — Non essendo soddisfatte le ipotesi del teorema 4.6 occorre dare una prova diretta.

Basta dimostrare la parte sufficiente della condizione, dato che $\log a_h$ è una successione relativamente compatta in $\sigma(L^\infty, L^1)$.

A tale scopo sia v_h una successione convergente a v in L^1. Posto

$$w_h(x) = v_h(x) + \int_a^x \log a_h(t) \, dt$$

si ha che w_h converge in L^1 verso

$$w(x) = v(x) + \int_a^x \log a(t) \, dt .$$

Da ciò, per la semicontinuità inferiore in L^1 del funzionale

$$v \to \int_a^b e^{v'} dx$$

(si veda ad esempio sul Morrey, th. 4.1.1. G), si ottiene

$$\int_a^b e^{w'(x)} dx \leq \liminf_h \int_a^b e^{w_h'(x)} dx$$

In altri termini si è provato che

$$v_h \to v \text{ in } L^1 \Rightarrow F(v) \leq \liminf_h F_h(v_h) . \tag{4.23}$$

Inoltre se $v \in H^{1,p}$ $(1 \leq p \leq \infty)$, posto

$$v_h(x) = v(x) = \int_a^x (\log a(t) - \log a_h(t)) \, dt$$

si ha che

$$v_h \to v \text{ in } w - H^{1,p} \text{ e } F_h(v_h) = F(v) . \tag{4.24}$$

(v_h' converge a v' in $\sigma(L^\infty, L^1)$ se $p = \infty$). Le (4.24) e (4.23) provano la proposizione.

Chiudiamo il paragrafo osservando che il teorema (4.6) non vale se la dimensione dello spazio è maggiore di 1; cioè non è possibile in generale, caratterizzare la $\Gamma^-(w - H^{1,p})$ convergenza in termini di convergenza in $\sigma(L^\infty, L^1)$ delle polari degli integrandi.

È facile costruire un esempio in tal senso con integrandi del tipo $f_h(x, z) = a_h(x) |z|^2$.

Inoltre se la dimensione dello spazio è maggiore di 2, le ipotesi del teorema 4.6 non garantiscono nemmeno che il Γ^- limite sia un integrale, nè che il limite sia lo stesso su tutte le varietà lineari $V + w$ $(V \supset H_0^{1,p})$, come è mostrato dall'esempio che segue.

ESEMPIO 4.13. — *Sia* Ω *un aperto convesso di* R^N $(N \geq 3)$, *la cui frontiera incontra l'asse* x_N *in due soli punti distinti* A *e* B. *Se*

$$a_h(x_1, \ldots, x_N) = \begin{cases} h^{N-1} & se \quad |x_i| < \dfrac{1}{h} \quad i = 1, \ldots, N-1 \\ 1 & se \quad |x_i| \geq \dfrac{1}{h} \quad i = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

poniamo per ogni $v \in H^{1,2}$

$$F_h(\Omega, v) = \int_\Omega a_h(x) \, |Dv|^2 \, dx$$

$$F(\Omega, v) = \int_\Omega |Dv|^2 \, dx$$

Allora, se $w \in C^1$, *si ha*

$$F = \Gamma^-(w - H^{1,2}) \lim_h F_h \; su \; H^{1,2}(\Omega)$$

$$F + 2^{N-2}(w(A) - w(B))^2 = \Gamma^-(w - H^{1,2}) \lim_h F_h \; su \; w + H_o^{1,2}(\Omega)$$

Dim. — Si può procedere come nella prova della proposizione 4.1 di [15] con l'accortezza di modificare opportunamente le scelte delle successioni di funzioni su cui calcolare F_h nella zona

$$\left\{ x \in \Omega : \frac{1}{h} < |x_i| < \frac{2}{h}, \quad i = 1, \ldots, N-1 \right\}$$

Ad esempio, nella prova del Lemma 4.2 si può richiedere che la successione u_h verifichi nell'insieme E_h le limitazioni

$$\begin{cases} |D_i u_h| \leq h \max\{|u_h - u| : x \in \Omega \backslash E_h\} \; i = 1, \ldots, N-1 \\ |D_N u_h| \leq |D_N u| \end{cases}$$

Eseguendo queste ed altre due modifiche analoghe con l'argomento di [15] si ottiene il risultato nello spazio ambiente $C^1(\bar{\Omega})$; infine l'estensione allo spazio ambiente $H_{(\Omega)}^{1,2}$ o $w + H_o^{1,2}(\Omega)$ segue dalla proposizione 1.5 di [7].

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI-C. SBORDONE, *Γ-convergenza e G-convergenza per problemi non lineari di tipo ellittico*, Boll. Un. Mat. Ital., 13-A (1976), 352-362.

[2] L. BOCCARDO-P. MARCELLINI, *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali*, Ann. Mat. Pura Appl., CX (1976), 137-159.

[3] G. BUTTAZZO, *Su una definizione generale dei Γ-limiti*, di prossima pubblicazione su Boll. Un. Mat. Ital.

[4] G. DAL MASO, *Alcuni teoremi sui Γ-limiti di misure*, di prossima pubblicazione.

[5] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area*, Rend. Mat. Roma, **8** (1975), 277-294.

[6] E. DE GIORGI, *Γ-convergenza e G-convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital., 14-A (1977).

[7] E. DE GIORGI-T. FRANZONI, *Su un tipo di convergenza variazionale*, Rend. Acc. Naz. Lincei Roma, LVIII **6** (1975), 842-850.

[8] E. DE GIORGI-G. LETTA, *Une notion générale de convergence faible pour des fonctions croissantes d'ensemble*, Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, **4** (1977), 61-69.

[9] I. EKELAND-R. TEMAM, *Analyse Convexe et problèmes variationnels*, Dunod Gauthier-Villars, 1974.

[10] J. L. JOLY, *Une famille de topologies et de convergences sur l'ensemble des fonctionnelles convexes*, Thèse, Université de Grenoble, 1970.

[11] J. L. JOLY, *Une famille de topologies sur l'ensemble des fonctions convexes pour lesquelles la polarité est bicontinue*, J. Math. Pures Appl., **52** (1973), 421-441.

[12] J. L. JOLY-F. DE THELIN, *Convergence of convex integrals in L^p spaces*, J. Math. Anal. Appl., **54** (1976), 230-244.

[13] P. MARCELLINI, *Su una convergenza di funzioni convesse*, Boll. Un. Mat. Ital., **8** (1973), 137-158.

[14] P. MARCELLINI, *Un teorema di passaggio al limite per la somma di funzioni convesse*, Boll. Un. Mat. Ital., **11** (1975), 107-124.

[15] P. MARCELLINI-C. SBORDONE, *An approach to the asymptotic behaviour of elliptic-parabolic operators*, J. Math. Pures Appl., **56** (1977), 157-182.

[16] P. MARCELLINI-C. SBORDONE, *Sur quelques questions de G-convergence et d'homogénéisation non linéaire*, C.R. Acad. Sc. Paris, **284** (1977), 535-537.

[17] M. MATZEU, *Su un tipo di continuità dell'operatore subdifferenziale*, Boll. Un. Mat. XIV-B 1977, 480-490.

[18] J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France 1966-67.

[19] G. MOSCARIELLO, *Γ-convergenza negli spazi sequenziali*, Rend. Accad. Sc. Fis. Mat. Napoli, XLIII (1976), 333-350.

[20] U. MOSCO, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Advances in Math., **3** (1969), 510-585.

[21] U. MOSCO, *An introduction to the approximate solution of variational inequalities*, Corso C.I.M.E., II Ciclo 1971, Ed. Cremonese, 1973, 499-685.

[22] R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, 1970.

[23] C. SBORDONE, *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **2** (1975), 617-638.

[24] C. SBORDONE, *Sur une limite d'integrales polynomiales du calcul des variations*, J. Math. Pures Appl., **56** (1977), 67-77.

[25] S. SPAGNOLO, *Convergence in energy for elliptic operators*, Numerical Solution of Partial Differential Equations III, Maryland, Ac. Press (1976), 469-498.

[26] T. ZOLEZZI, *Su alcuni problemi fortemente ben posti di controllo ottimo*, Ann. Mat. Pura Appl., **95** (1973), 147-160

[27] L. CARBONE, *Γ-convergence d'integrales sur des fonctions avec des contrâintes sur le gradient*, Comm. in Partial Differential Equations, **2**, (6), (1977), 627-651.

Pervenuta alla redazione il 14 giugno 1977