DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
"U. Dini"
Viale Morgagni, 67/A
Firenze

1997
4

Paolo MARCELLINI

Alcuni recenti sviluppi nei problemi 19-simo e 20-simo di Hilbert

Marzo 1997

Boll. Un. Mat. Ital.
11-A (1997), 323-352

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI FIRENZE

Alcuni recenti sviluppi nei problemi 19-simo e 20-simo di Hilbert

PAOLO MARCELLINI [1]

0.– Premessa

Scopo di questa conferenza è quello di descrivere brevemente *alcune* direzioni di ricerca seguite in questi ultimi anni nel calcolo delle variazioni per funzioni di più variabili. Trattandosi di una conferenza di carattere generale, rivolta a colleghi e a giovani ricercatori non necessariamente specialisti del settore, credo sia naturale che agli sviluppi più recenti io premetta parte dei risultati classici che hanno fatto la storia del calcolo delle variazioni del secolo che si sta concludendo.

Ringrazio quanti hanno ascoltato la mia conferenza e quanti avranno la pazienza di leggere queste note. Ringrazio il Presidente, il Vice Presidente, la Commissione Scientifica dell'UMI ed il Comitato Organizzatore per l'invito rivoltomi. Ringrazio infine Enrico Giusti e Luigi Pepe che hanno riletto i paragrafi 1, 2 e 3.

La conferenza è dedicata a Franco Tricerri, amico e collega di Dipartimento oltre che geometra differenziale di notevole valore, scomparso con la sua famiglia in un incidente aereo vicino a Xian, l'antica capitale della Cina, la mattina del 6 giugno 1994.

1.– I problemi di Hilbert

Ben noti sono i 23 problemi che Hilbert pose nella sua conferenza in occasione del Congresso Internazionale dei Matematici che si è tenuto a Parigi nel 1900. Tali problemi hanno originato una serie innumerevole di ricerche in molti settori della Matematica e le *soluzioni* date ad alcuni di tali problemi non sempre possono considerarsi definitive.

Un buon punto di riferimento per i problemi di Hilbert è il volume dell'*American*

[1] Conferenza presentata a Padova in occasione del XV Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi dall'11 al 16 settembre 1995.

Mathematica Society, edito F.E. Browder nel 1976[2]. L'elenco dei titoli dei 23 problemi, nella traduzione in inglese[3] che è apparsa sul *Bullettin of the American Mathematical Society*, 8 (1902), 437-479, è il seguente:

1. Cantor's problem of the cardinal number of the continuum.

2. The compatibility of the arithmetical axioms.

3. The equality of the volumes of two tetrahedra of equal bases and equal altitudes.

4. Problem of the straight line as the shortest distance between two points.

5. Lie's concept of a continuous group of transformations without the assumption of the differentiability of the functions defining the group.

6. Mathematical treatment of the axioms of physics.

7. Irrationality and transcendence of certain numbers.

8. Problems of prime numbers.

9. Proof of the most general law of reciprocity in any number field.

10. Determination of the solvability of a diophantine equation.

11. Quadratic forms with any algebraic numerical coefficients.

12. Extension of Kronecker's theorem on abelian fields to any algebraic realm of rationality.

13. Impossibility of the solution of the general equation of the 7th degree by means of functions of only two arguments.

14. Proof of the finiteness of certain complete systems of functions.

15. Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus.

16. Problem of the topology of algebraic curves and surfaces.

17. Expression of definite forms by squares.

18. Building up of space from congruent polyhedra.

19. Are the solutions of regular problems in the calculus of variations always necessarily analytic?

20. The general problem of boundary values.

21. Proof of the existence of linear differential equations having a prescribed monodromic group.

22. Uniformization of analytic relations by means of automorphic functions.

23. Further development of the methods of the calculus of variations.

---

[2]Si richiamano i titoli in Bibliografia con il nome dell'autore e con l'anno, senza ulteriori numeri di riferimento.

[3]Mi è stato consigliato di riportare i titoli originali in tedesco, oppure in francese (lingua del Congresso), oppure in italiano. Da un lato la difficoltà linguistica del tedesco, dall'altro la traduzione non necessariamente fedele che avrei potuto effettuare in italiano, mi hanno comunque fatto optare per la versione del 1902 in inglese. L'inglese è altresì utilizzato per altre citazioni nel seguito.

Come dicevo tali problemi sono stati ampiamente studiati nel corso di questo secolo (si veda ad esempio il citato libro edito F.E. Browder nel 1976). In questa conferenza ci limitiamo ad esaminare i problemi 19-simo e 20-simo, rispettivamente relativi alla regolarità e all'esistenza di soluzioni di problemi del calcolo delle variazioni.

2.– Il 20-simo problema (esistenza) e cenni sui metodi diretti

Un integrale del calcolo delle variazioni è spesso un'*energia*, talvolta ha altri significati fisici (*tempo, resistenza,* ...) o significati geometrici (*lunghezza, area,* ...); in genere si rappresenta nella forma

$$F(v) = \int_\Omega f(x, v(x), Dv(x))\, dx\,, \tag{2.1}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega$ la sua frontiera) e Dv è il gradiente di una generica funzione $v{:}\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($n \geq 1$, $m \geq 1$) e $f = f(x, s, \xi)$ è una funzione assegnata. Il problema variazionale associato, ad esempio il *problema di Dirichlet*, è del tipo (con u_0 dato al bordo fissato):

$$\min \left\{ \int_\Omega f(x, v(x), Dv(x))\, dx : \; v = u_0 \text{ su } \partial\Omega \right\}.$$

Se $m = 1$ (cioè $v{:}\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) il problema variazionale si dice *scalare*; in tal caso la variazione prima dell'integrale in (2.1), uguagliata a zero, è un'*equazione* differenziale. Se $m > 1$ la funzione $v{:}\Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è un'applicazione a valori *vettoriali*; la variazione prima, resa uguale a zero, è un *sistema* differenziale.

Hilbert (che considera il caso $n = 2$, $m = 1$) chiama il problema *regolare* se l'integrando $f = f(x, s, \xi)$ è *convesso* rispetto alla variabile $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ del gradiente, nel senso che (nell'ipotesi che f ammetta derivate seconde) la matrice delle derivate seconde debba risultare positiva:

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} f_{\xi_i^\alpha \xi_j^\beta}(x, s, \xi)\, \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \;>\; 0\,, \qquad \forall\, \lambda \equiv (\lambda_i^\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n},\; \lambda \neq 0, \tag{2.2}$$

per ogni $x \in \Omega$, per ogni $s \in \mathbb{R}^m$ e per ogni $\xi \equiv (\xi_i^\alpha) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Nella terminologia moderna (si veda ad esempio L. Nirenberg (1955)) la condizione (2.2), di *regolarità* di Hilbert, si dice condizione di *ellitticità* (o *forte ellitticità*).

Riprendo dalla conferenza di Hilbert parte dell'enunciato del 20-simo problema:

It is my conviction that it will be possible to prove these existence theorems by means of a general principle whose nature is indicated by Dirichlet's principle. This general

principle will then perhaps enable us to approach the question: has not every regular variation problem a solution, provided certain assumptions regarding the given boundary conditions are satisfied (say that the functions concerned in these boundary conditions are continuous and have in sections one or more derivatives), and provided also if need be that the notion of a solution shall be suitably extended?

Per semplicità di esposizione considereremo più spesso nel seguito il caso particolare in cui l'integrando $f(x,s,\xi)$ dipende solo dalla variabile del gradiente ξ; cioè

$$f = f(\xi), \qquad F(v) = \int_\Omega f(Dv(x))\, dx\,. \tag{2.3}$$

Consideriamo, solo per iniziare, l'*integrale di Dirichlet*[4], con $f(\xi) = |\xi|^2$:

$$F(v) = \int_\Omega |Dv|^2\, dx \;=\; \|Dv\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^{m\times n})}\,.$$

La formulazione del problema è allora geometrica; infatti si cerca sulla varietà affine $\{v = u_0 \text{ su } \partial\Omega\}$ l'elemento di minima norma:

$$\min\Big\{F(v) = \|Dv\|^2_{L^2}:\;\; v = u_0 \text{ su } \partial\Omega\Big\}. \tag{2.4}$$

Non è sufficiente scegliere $C^1(\Omega)$ come spazio di funzioni su cui minimizzare l'integrale F in (2.3); occorre, nella terminologia di Hilbert, estendere opportunamente F (... *provided also if need be that the notion of a solution shall be suitably extended*). In questo caso occorre estendere (il quadrato del) la norma alle funzioni v con gradiente $Dv \in L^2$. In altre parole, per avere l'elemento di minima norma occorre che la varietà affine in (2.4) sia *chiusa*. Si ottiene una varietà affine nello *spazio di Sobolev* $W^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

I *metodi diretti* danno una risposta al problema dell'esistenza; gli ingredienti per l'esistenza del minimo sono: *(i)* la *semicontinuità inferiore* del funzionale F; *(ii)* la *compattezza* della classe di funzioni dove si ricerca il minimo. Infatti, in base ad un ben noto teorema di Weierstrass (che si insegna nei corsi di calcolo), una funzione semicontinua inferiormente in una topologia τ ammette minimo su ogni insieme $\tau-$compatto. La scelta della topologia ($\tau =$ topologia *debole* di uno spazio di Sobolev) è

[4]Si può ricordare che spetta a Cesare Arzelà il merito di aver tentato di dimostrare il *principio di Dirichlet* ancor prima della conferenza di Hilbert, precisamente nel 1896-97. Si vedano ad esempio, oltre al lavoro in bibliografia, *Cesare Arzelà e l'analisi reale in Italia* in Cesare Arzelà, *Opere*, a cura di G. Letta, P.L. Papini e L. Pepe, Vol. 2, Bologna, Unione Matematica Italiana, 1992, XIII-XXXVII; si veda anche la conferenza di M. Miranda del 1980.

argomento di *Analisi Funzionale*. Ricordo che gli *spazi di Sobolev* sono stati introdotti alcuni decenni dopo la conferenza di Hilbert, in particolare da S.L. Sobolev (1938) e indipendentemente da J.W. Calkin (1940) e C.B. Morrey (1940). Riferimenti classici sono i libri di J.L. Lions e E. Magenes (1972) e R.A. Adams (1975); un riferimento più recente per questo e, parzialmente, per i successivi argomenti è il libro di E. Giusti (1994).

L. Tonelli nel 1913 ha introdotto nel contesto del calcolo delle variazioni la *semicontinuità*[5], dopo che tale nozione era stata utilizzata massicciamente da altri matematici, ad esempio nella teoria dell'integrazione di Lebesgue (1902): un funzionale F è (sequenzialmente) semicontinuo inferiormente in v nella topologia τ se

$$v_k \xrightarrow{\tau} v \quad \Rightarrow \quad \liminf_{k \to +\infty} F(v_k) \geq F(v).$$

Per ottenere la semicontinuità inferiore del funzionale integrale $F(v)$ in (2.1), in una topologia τ compatibile con la compattezza dello spazio di funzioni (o meglio, compatibile con la $\tau-$compattezza dei sottoinsiemi limitati dello spazio di funzioni), risulta essenziale il ruolo della *convessità* dell'integrando $\xi \to f(x,s,\xi)$ rispetto alla variabile del gradiente ξ, nel senso che la convessità rispetto a ξ dell'integrando è una condizione sufficiente per la *debole* semicontinuità inferiore, ed è anche una condizione necessaria nel caso scalare $m = 1$.

La convessità è stata generalizzata al caso vettoriale $m > 1$ da Morrey (1952) nella condizione di *quasiconvessità* (ancora sufficiente per la semicontinuità inferiore):

$$\int_\Omega f(\xi + D\varphi)\, dx \geq \int_\Omega f(\xi)\, dx = f(\xi)\cdot|\Omega|, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^{m\times n},\ \forall\, \varphi \in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m), \tag{2.5}$$

e nella condizione di Legendre-Hadamard di *rango-uno convessità* (necessaria per la semicontinuità):

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} f_{\xi_i^\alpha \xi_j^\beta}(\xi)\, \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \geq 0, \qquad \forall\, \lambda \equiv (\lambda_i^\alpha)_{m\times n} \text{ matrice di rango uno.} \tag{2.6}$$

Le condizioni (2.5) e (2.6) sono soddisfatte da ogni funzione *convessa* f o, più generalmente, da ogni funzione *policonvessa*, cioè, ad esempio (nel caso $n = m$), del tipo

$$f(\xi) = |\xi|^p + g(\det \xi),$$

[5]Si vedano le monografie di Tonelli del 1921 e 1923 e la ricostruzione storica di L. Pepe del 1987. Da notare che lo stesso Leonida Tonelli, nella conferenza da lui presentata al primo Congresso dell'Unione Matematica Italiana, tenutosi a Firenze nel 1937, scriveva che *il primo tentativo di risolvere con un metodo diretto un problema di calcolo delle variazioni fu fatto, nel 1897, da Cesare Arzelà.*

dove g è una funzione convessa su $\mathbb{R}$ e $\det \xi$ è il *determinante* della matrice $\xi \in \mathbb{R}^{n \times n}$. John Ball nel 1977 ha mostrato l'applicabilità della nozione della *quasiconvessità* in (2.5) all'*elasticità non lineare.*

La caratterizzazione della *quasiconvessità* (che è espressa da una disuguaglianza integrale) in termini di disuguaglianza puntuale (*rango-uno convessità*) è un problema in parte ancora aperto; citando Morrey (1952): *after a great deal of experimentation, the writer is inclined to think that there is no condition of the type discussed, which involves f and only a finite number of its derivatives, and which is both necessary and sufficient for quasi-convexity in the general case.*

Recentemente V. Šverák (1992) ha mostrato che la *quasiconvessità* non è equivalente alla *rank-one convessità* se $n \geq 2$ e $m \geq 3$. Il problema è ancora aperto nel caso (rilevante) $n = 2$ e $m = 2$.

Molti sono i riferimenti in letteratura alla semicontinuità ed agli *inviluppi semicontinui*; citiamo ad esempio Tonelli (1921), McShane (1931), Caccioppoli - Scorza Dragoni (1938), Serrin (1961), Goffman - Serrin (1964), Morrey (1966), De Giorgi (1968-69), Berkowitz (1974), Cesari (1974), Ekeland - Temam (1974), Rockafellar (1975), Ioffe (1977), Olech (1977), Ball (1977), Marcellini - Sbordone (1980), Acerbi - Fusco (1984), Marcellini (1985), Buttazzo (1989), Dacorogna (1989), Dacorogna - Marcellini (1990), Malý (1993, 1994), Gangbo (1994), Celada - Dal Maso (1994), Dal Maso - Sbordone (1995), Fusco - Hutchinson (1995), Fonseca - Marcellini, Fonseca - Malý, Giaquinta - Modica - Souček (questi ultimi in corso di stampa), ecc.

Legate alla semicontinuità sono la $\Gamma -$ *convergenza*, la $G -$ *convergenza* e l'*omogeneizzazione*, che meritano un discorso a sé e che, dal 1968, hanno avuto numerosi contributi, a partire da quelli di De Giorgi, Spagnolo, J.L. Lions, Tartar.

3. – Il 19-simo problema (regolarità)

Riprendo dalla conferenza di Hilbert l'enunciato del 19-simo problema:

It is chiefly the regular variation problems that play a role in geometry, in mechanics, and in mathematical physics; and the question naturally arises, whether all solutions of regular variation problems must necessarily be analytic functions.

In other words, does every lagrangian partial differential equation of a regular variation problem have the property of admitting analytic integrals exclusively? And is this the case even when the function is constrained to assume, as, e. g., in Dirichlet's problem on the potential function, boundary values which are continuous, but not analytic?

Consideriamo preliminarmente il caso scalare $m = 1$ e, almeno all'inizio, funzioni di due variabili. S. Bernstein (1904) ha fornito la prima risposta che - schematicamente - si può enunciare così: *solutions of class C^3 of a single elliptic, nonlinear, analytic equation in two variables are necessarily analytic.* Inoltre Bernstein ha introdotto le "*stime a priori*": se si prova che una *norma opportuna* delle soluzioni è *limitata*, se ne deduce l'esistenza e la regolarità di tali soluzioni dell'equazione; per ottenere le stime che assicurano la limitatezza della norma si suppone "*a priori*" che le soluzioni siano regolari; da cui il nome di "*stime a priori*". Infine Bernstein ha completato il quadro utilizzando il principio di massimo e il metodo delle barriere.

Successivamente L. Lichtenstein (1912) ha migliorato il risultato di Bernstein nel modo seguente: *C^2 solutions of a regular variational problem in two variables are of class C^3 (and thus analytic).* Ancora E. Hopf (1929): *$C^{1,\alpha}$ solutions of a regular variational problem in two variables are of class C^2 (and thus analytic).*

Con il contributo di molti autori tali risultati sono stati estesi al caso generale $n \geq 2$, $m \geq 2$. Si possono citare ad esempio: Leray-Schauder (1934), Petrowsky (1939), Caccioppoli (1934, 1950-51), Morrey (1958), ecc.

Riassumendo, in modo impreciso ma efficace, negli anni '50 si poteva affermare che *every sufficiently smooth solution of a regular variational problem is an analytic function.*

Però i metodi diretti (visti nel paragrafo precedente) forniscono una soluzione di un problema regolare del calcolo delle variazioni nello *spazio di Sobolev* $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, o più in generale, in $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ per qualche $p > 1$. Per ottenere la regolarità mancava il passo seguente

$$u \in W^{1,p} \text{ (derivate prime sommabili in } L^p\text{)}, \ u \text{ soluzione}$$
$$\Downarrow$$
$$u \in C^{1,\alpha} \text{ (derivate prime continue nel senso di Hölder)}$$

Questo passo è stato fatto con due risultati fondamentali, in ipotesi di *"crescita naturale"* dell'integrando (darò sotto la definizione). I risultati a cui mi riferisco sono dovuti a C.B. Morrey (1938) con $n = 2$, $m \geq 1$, relativamente a *sistemi* in *due* variabili, ed a E. De Giorgi (1957) nel caso $n \geq 2$, $m = 1$, cioè per *equazioni* in n variabili (e indipendentemente da J. Nash (1958) per le equazioni paraboliche ed ellittiche).

Il teorema di hölderianità di De Giorgi, ottenuto per $p = 2$, è stato poi ripreso e rivisto alla fine degli anni '60 da molti autori, anche per $p \in (1, +\infty)$; ad esempio nelle monografie di C.B. Morrey (1966), G. Stampacchia (1966), O.A. Ladyzhenskaya - N.N. Ural'tseva (1968). Notevole è anche la dimostrazione fornita da J. Moser nel 1960. Il teorema di hölderianità fornisce l'implicazione seguente

$$W^{1,p} \Rightarrow C^{1,\alpha},$$

sotto le seguenti ipotesi di *ellitticità* e di *"crescita naturale"* dell'integrando $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$m\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\lambda|^2 \le \sum_{i,j} f_{\xi_i\xi_j}(\xi)\lambda_i\lambda_j \le M\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\lambda|^2, \qquad \forall\, \lambda, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

con $p > 1$ e $M \ge m > 0$ opportuni.

In effetti il teorema di hölderianità di De Giorgi, nella sua formulazione più nota, prende in considerazione un'equazione differenziale *lineare* alle derivate parziali del secondo ordine della forma (di divergenza)

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \tag{3.1}$$

dove $\left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}$ è una matrice simmetrica a coefficienti misurabili tale che

$$m\,|\lambda|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}(x)\,\lambda_i\lambda_j \le M|\lambda|^2, \qquad \text{q.o. } x \in \Omega, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

con M, m costanti positive; si noti che *non* si suppone che i coefficienti siano *continui* in Ω. Il teorema di hölderianità di De Giorgi afferma che ogni *soluzione debole* dell'equazione (3.1) è localmente hölderiana. L'applicazione al caso non lineare del calcolo delle variazioni si ottiene allora prendendo in considerazione un integrando *regolare* $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che soddisfa le ipotesi di *ellitticità* e di *"crescita naturale"* (per $p = 2$):

$$m\,|\lambda|^2 \le \sum_{i,j} f_{\xi_i\xi_j}(\xi)\,\lambda_i\lambda_j \le M\,|\lambda|^2, \qquad \forall\, \lambda, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti, una funzione u minimizzante l'integrale

$$F(v) = \int_\Omega f(Dv(x))\,dx$$

con un opportuno dato al bordo (cioè una soluzione del problema di Dirichlet) è una *soluzione debole* dell'*equazione di Eulero*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\xi_i}(Du(x)) = 0.$$

Si dimostra poi (derivando nell'equazione rispetto ad x_k) che, per ogni $k = 1,2,\ldots,n$, la derivata parziale u_{x_k} verifica l'equazione differenziale

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\xi_i}(Du(x)) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_{\xi_i\xi_j}(Du(x)) \cdot u_{x_j x_k} = 0.$$

Pertanto, posto $v_k = u_{x_k}$, tale funzione soddisfa l'equazione differenziale *lineare* in forma di divergenza

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 0 ,$$

dove si è posto $a_{ij}(x) = f_{\xi_i \xi_j}(Du(x))$. Si noti che, essendo $u \in W^{1,2}(\Omega)$, anche quì i coefficienti a_{ij} *non* sono a priori continui. In base al teorema di De Giorgi $v_k = u_{x_k}$ è localmente hölderiana per ogni $k = 1, 2, \ldots, n$; perciò il gradiente Du è di classe $C^{0,\alpha}$ e u è di classe $C^{1,\alpha}$.

Che il teorema di hölderianità di De Giorgi non valga in generale per i sistemi è stato mostrato dallo stesso De Giorgi nel 1968 con un controesempio relativo al caso vettoriale $n = m \geq 3$ e ad un integrale del tipo (con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ contenente l'origine)

$$F(v) = \int_\Omega f(x, Dv(x))\, dx = \int_\Omega \sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, v_{x_i}^\alpha v_{x_j}^\beta \, dx ,$$

con coefficienti $a_{ij}^{\alpha\beta}$ *discontinui*, ma soddisfacenti le condizioni di ellitticità uniforme

$$m\, |\lambda|^2 \leq \sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij}^{\alpha\beta}(x)\, \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \leq M\, |\lambda|^2 , \qquad \text{q.o. } x \in \Omega, \ \forall\, \lambda \equiv (\lambda_i^\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$(0 < m \leq M)$. De Giorgi ha determinato un tale integrale che ammette come minimizzante, tra le funzioni con lo stesso valore al bordo, la funzione $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ non limitata

$$u(x) = \frac{x}{|x|^\gamma} ,$$

per qualche $\gamma > 1$ (in dipendenza da $n \geq 3$). Nello stesso anno (1968) E. Giusti - M. Miranda hanno ottenuto un esempio analogo per un integrale del tipo

$$F(v) = \int_\Omega f(v, Dv(x))\, dx = \int_\Omega \sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij}^{\alpha\beta}(v)\, v_{x_i}^\alpha v_{x_j}^\beta \, dx ,$$

con coefficienti $a_{ij}^{\alpha\beta}$ *analitici* e soddisfacenti le condizioni di ellitticità uniforme

$$m\, |\lambda|^2 \leq \sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij}^{\alpha\beta}(s)\, \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \leq M\, |\lambda|^2 , \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, \lambda \equiv (\lambda_i^\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$(0 < m \leq M)$ che, per n sufficientemente grande, ammette come minimizzante, tra le funzioni con lo stesso valore al bordo, la funzione $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ limitata ma discontinua

$$u(x) = \frac{x}{|x|} .$$

Infine, da segnalare che Nečas nel 1975 ha determinato un funzionale integrale del tipo

$$F(v) = \int_\Omega f(Dv(x))\, dx\ ,$$

con integrando $f(\xi)$ a crescita quadratica, che, per n sufficientemente grande, ammette come minimizzante, tra le funzioni con lo stesso valore al bordo, una funzione Lipschitziana ma non di classe $C^{1,\alpha}$.

Nell'ambito vettoriale sono stati ottenuti risultati di *regolarità parziale* (ogni *soluzione debole* è di classe $C^{1,\alpha}$ in un insieme aperto $\Omega_0 \subseteq \Omega$ e l'insieme singolare $\Omega - \Omega_0$ è di misura nulla) da parte di C.B. Morrey (1968), E. Giusti - M. Miranda (1968), E. Giusti (1969) e poi, con l'uso di un teorema di Gehring (1973), negli anni 1979-84 da M. Giaquinta - G. Modica, M. Giaquinta - E. Giusti e, in ipotesi di quasiconvessità, da L.C. Evans (1986), ecc.

E' la *regolarità parziale* l'unico tipo di regolarità che ci si può aspettare per i sistemi? Su tale problema E. Bombieri scriveva nel 1976: *in special cases, one can even prove that solutions are everywhere analytic, and it is an interesting open question to find good conditions which imply regularity everywhere.*

Un anno più tardi (1977) K. Uhlenbeck, in un ben noto lavoro pubblicato sugli Acta Mathematica, ha provato che le funzioni minimizzanti l'integrale ($u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

$$F(v) = \int_\Omega |Dv|^p\, dx\ ,$$

con $p \geq 2$, sono *ovunque regolari*, precisamente sono di classe $C^{1,\alpha}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Una estensione recente del teorema della Uhlenbeck è proposta nel paragrafo che segue.

4. – Alcuni recenti sviluppi nella regolarità

Ricordiamo le ipotesi di crescita, ad esempio le ipotesi (di *ellitticità*) e di *"crescita naturale"*: dato $p > 1$, esistono due costanti positive m, M tali che

$$m\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\lambda|^2 \leq \sum_{i,j,\alpha,\beta} f_{\xi_i^\alpha \xi_j^\beta}(\xi)\, \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta \leq M\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |\lambda|^2, \qquad \forall\, \lambda, \xi \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Tali ipotesi di *crescita naturale* (che implicano la crescita *polinomiale* di grado p dell'integrando, cioè $f(\xi) \sim |\xi|^p$ per $|\xi| \to +\infty$) non erano state proposte da Hilbert. *Sono necessarie?*

Sotto tali ipotesi vengono completamente eliminati integrali del tipo:

i) piccole perturbazioni di crescite *polinomiali*

$$\int_\Omega f(Dv)\,dx\,, \quad \text{con } f(\xi) \sim |\xi|^p \log(1+|\xi|) \text{ per } |\xi| \to +\infty;$$

ii) grandi perturbazioni di crescite polinomiali, cioè crescite *esponenziali*

$$\int_\Omega f(Dv)\,dx\,, \quad \text{con } f(\xi) \sim \exp(|\xi|^\alpha) \text{ per } |\xi| \to +\infty;$$

iii) crescite *anisotrope*, come nell'integrale

$$F(v) = \int_\Omega \Big\{ \big(1+|Dv|^2\big)^{p/2} + \sum_{i,\alpha} |v^\alpha_{x_i}|^{q_i^\alpha} \Big\}\,dx\,; \tag{4.1}$$

iv) crescite *di tipo* p,q $(1<p<q,\ c_1,c_2>0)$, quando l'integrando soddisfa condizioni del tipo

$$c_1|\xi|^p \le f(x,\xi) \le c_2(1+|\xi|^q)\,, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}; \tag{4.2}$$

ad esempio nel caso

$$F(v) = \int_\Omega \big(1+|Dv|^2\big)^{\alpha(x)/2}\,dx\,, \qquad \text{con } 1<p\le\alpha(\mathrm{x})\le q.$$

Citiamo qualche risultato di regolarità, cominciando da un integrando dipendente dal solo modulo del gradiente

$$\int_\Omega f(Dv)\ dx\,, \qquad \text{con} \quad f(Dv) = g(|Dv|)\,,$$

dove $g\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ è una funzione convessa. Ciò equivale, in termini di variazione prima, a considerare un sistema differenziale del tipo

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_i^\alpha(Du) = 0\,,\ \forall\,\alpha = 1,2,\ldots,m\,, \qquad \text{con} \qquad a_i^\alpha(Du) = a(|Du|)u^\alpha_{x_i}\,, \tag{4.3}$$

dove la funzione $a\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ è legata alla funzione g dalla condizione

$$a(t) = \frac{g'(t)}{t}.$$

Si pone la seguente ipotesi

$$\begin{cases} \textit{(i) la funzione } a\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty) \textit{ è crescente;} \\ \textit{(ii) per ogni } \alpha>1 \textit{ esiste il limite } \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{a'(t)\cdot t}{\big[a(t)\big]^\alpha}\,. \end{cases} \tag{4.4}$$

Integrali del calcolo delle variazioni che rientrano nell'ipotesi (4.4) si ottengono, ad esempio, con le seguenti funzioni integrande

i) crescite *esponenziali*, quando f è della forma

$$f(\xi) = \exp(|\xi|^p), \qquad \text{con } p \geq 2,$$

ii) o di più, con f del tipo

$$f(\xi) = (\exp(\ldots(\exp(\exp|\xi|^2)^{p_1})^{p_2})\ldots)^{p_k}, \qquad \text{con } p_i \geq 1, \ \forall i = 1,2,\ldots,k;$$

iii) crescite oscillanti tra due potenze, come nell'esempio dovuto a N. Fusco - C. Sbordone (1990) e G. Talenti (1990): assegnato $p \geq 3$, $f(\xi)$ è definita da

$$f(\xi) = \begin{cases} |\xi|^{p+1-\sin\log\log|\xi|}, & \text{se } |\xi| \in (e, +\infty) \\ e|\xi|^p, & \text{se } |\xi| \in [0, e] \end{cases}.$$

Il teorema ed il corollario che seguono sono provati in Marcellini (1996). Indichiamo con B_ρ, B_R sfere di raggio rispettivamente ρ e R ($\rho < R$) contenute in Ω e con lo stesso centro.

TEOREMA. — *Nella ipotesi* (4.4) *ogni soluzione debole del sistema differenziale* (4.3) *ha gradiente localmente limitato e, per ogni* $\epsilon > 0$ *e* $R > \rho > 0$, *esiste una costante* $c = c(\epsilon, n, \rho, R)$ *tale che*

$$\|Du\|^2_{L^\infty(B_\rho, \mathbb{R}^{m\times n})} \leq c \left\{ \int_{B_R} [1 + f(Du)]\, dx \right\}^{1+\epsilon}.$$

Una volta ottenuta una stima locale per la norma L^∞ del gradiente, il comportamento per $t \to +\infty$ dell'integrando diviene irrilevante. Si dimostra allora il seguente

COROLLARIO. — *Nella ipotesi* (4.4); *se* $a(0) > 0$, *vale l'implicazione*

$$a \in C^{k-1,\alpha}([0, +\infty)) \text{ per qualche } k \geq 2 \quad \Rightarrow \quad u \in C^{k,\alpha}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

In particolare, se a *è di classe* C^∞, *allora anche* u *è di classe* C^∞.

Citiamo un altro aspetto e ricordiamo l'esempio di crescite *di tipo* p,q in (4.2), o l'esempio di crescite *anisotrope* (caso particolare del precedente) in (4.1). Con condizioni di crescita di tipo p,q si ha regolarità delle soluzioni nel caso scalare (e regolarità parziale nel caso vettoriale) se il rapporto q/p è sufficientemente vicino ad 1 in dipendenza della dimensione n, del tipo

$$\frac{q}{p} < \frac{n}{n-2}$$

(non ci sono restrizioni se $n = 2$); mentre si possono avere soluzioni discontinue se il rapporto q/p è grande.

L'esempio oggi noto di soluzione discontinua (illimitata) risale al 1987 ed è dovuto a Giaquinta e Marcellini ed è stato ripreso da Hong Min-Chung (1992). E' relativo ad un funzionale integrale

$$F(v) = \int_\Omega f(Dv)\, dx \tag{4.5}$$

nel caso scalare ($m = 1$), con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) contenuto nel semispazio $\{x_n > 0\}$ e $f = f(\xi)$ fuori di un intorno dell'origine $\xi = 0$ data da

$$f(\xi) = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right)^{p/2} + \frac{1}{q}\,|\xi_n|^q \qquad (1 < p < q).$$

Perciò f è un esempio di funzione con crescita *anisotropa* e di *tipo* p,q. Se

$$n > 2, \qquad 1 < p < n-1, \qquad q > \frac{(n-1)\,p}{n-1-p},$$

allora, per una particolare scelta della costante, una funzione u minimizzante l'integrale (4.5) è data da

$$u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const} \cdot \left\{ \frac{(x_n)^q}{\left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2\right)^{\frac{p}{2}}} \right\}^{\frac{1}{q-p}}.$$

Dal 1987 a tutt'oggi si segnalamo molti contributi alla regolarità sull'argomento; ad esempio E. Acerbi - N. Fusco (1994), T. Bhattacharya - F. Leonetti (1993), L. Boccardo - T. Gallouet - P. Marcellini (1996), L. Boccardo - P. Marcellini - C. Sbordone (1990), H. Choe (1992), A. Dall'Aglio - E. Mascolo - G. Papi (in corso di stampa), N. Fusco - C. Sbordone (1990, 1993), M. Giaquinta (1987), Hong Min-Chung (1992), F. Leonetti (1989, 1992), G.M. Lieberman (1992), P. Marcellini (1987, ..., 1996), E. Mascolo - G. Papi (1994), G. Moscariello - L. Nania (1991), B. Stroffolini (1991), Tang Qi (1993), ecc.

5. – Alcuni recenti sviluppi sulla esistenza

Riprendiamo il problema variazionale

$$\min\left\{F(v)=\int_\Omega f(Dv(x))\,dx:\ v=u_0 \text{ su } \partial\Omega\right\} \tag{5.1}$$

e consideriamo il caso particolare in cui il dato al bordo è *lineare*, cioè della forma $u_0=u_0(x)=\xi_0 x$ per ogni $x\in\mathbb{R}^n$, essendo ξ_0 una matrice $m\times n$ ($Du_0=\xi_0$ è *costante*). Per definizione la funzione f è *quasiconvessa* nel senso di Morrey (1952) se

$$\int_\Omega f(\xi+D\varphi)\,dx \geq \int_\Omega f(\xi)\,dx = f(\xi)\cdot|\Omega|, \qquad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^{m\times n},\ \forall\,\varphi\in C_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m).$$

Pertanto, se f è *quasiconvessa*, allora u_0 è una soluzione del problema di minimo (5.1) nella classe $C^1(\Omega,\mathbb{R}^m)$.

Però, in alcune recenti applicazioni (si vedano ad esempio i problemi relativi alle *buche di potenziale* in J.M. Ball - R.D. James (1987, 1991) e D. Kinderlehrer - P. Pedregal (1992)) non sempre la funzione f è quasiconvessa, in particolare non sempre f è convessa su $\mathbb{R}^{m\times n}$. E' quindi utile studiare integrali del calcolo delle variazioni con integrando non regolare (nel senso di Hilbert).

Contributi allo studio di problemi non convessi e (perfino) non quasiconvessi sono stati dati ad esempio da Aubert - Tahraoui (1979, 1984), Ball - James (1987, 1991), Bauman - Phillips (1990), Buttazzo - Ferone - Kawohl (1995), Cellina (1993), Cellina - Colombo (1990), Cellina - Zagatti (1995), Cesari (1974, 1983), Chipot - Kinderlehrer (1988), Cutrì (1993), Dacorogna (1981), Dacorogna - Marcellini (1995), Ekeland - Temam (1974), Firoozye - Kohn (1992), Fonseca - Tartar (1989), Fusco - Marcellini - Ornelas (in corso di stampa), Friesecke (1994), Giachetti - Schianchi (1993), Kinderlehrer - Pedregal (1992), Kohn (1991), Kohn - Strang (1986), Marcellini (1980, 1983), Mascolo (1988), Mascolo - Schianchi (1983,...,1987), Monteiro Marques - Ornelas (1995), Müller (1990), Müller - Šverák (in corso di stampa), Olech (1970), Raymond (1987, 1992), Šverák (1992), ecc.

Osserviamo che il caso *unidimensionale* $n=1$ (sia scalare che vettoriale) con $f=f(\xi)$ ammette sempre una soluzione indipendentemente dalla convessità di f. Al contrario, i problemi variazionali scalari a più dimensioni ($n>1$ e $m=1$) possono non avere soluzione (Marcellini, 1980) in mancanza di convessità. Alcune condizioni sufficienti per l'esistenza in più dimensioni sono state date da E. Mascolo - R. Schianchi (1983,...,1987). Una caratterizzazione del caso *scalare* con dato al bordo lineare $u_0=u_0(x)=\xi_0 x$ è dovuta ad A. Cellina (1993) e G. Friesecke (1994).

L'esempio scalare di *non esistenza* (Marcellini, 1980), in mancanza di convessità, è relativo ad una funzione dipendente dal modulo del gradiente $f(\xi) = g(|\xi|)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, con $g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ funzione di classe C^1, non convessa in corrispondenza ad un valore $t_0 > 0$, nel senso che $g(t_0) > g^{**}(t_0)$ (g^{**} è la più grande funzione convessa minorante g su $[0,+\infty)$) e con derivata $(g^{**})'(t_0)$ positiva in t_0.

In tali condizioni siano $m = 1$ (caso scalare), $n \geq 2$ (integrali multipli) e $u_0 = u_0(x) = \xi_0 x$ (dato al bordo lineare); allora il seguente problema variazionale *non* ha minimo in $W^{1,\infty}(\Omega)$

$$\inf\left\{ F(v) = \int_\Omega g(|Dv(x)|)\, dx : \ v = u_0 \text{ su } \partial\Omega \right\}. \tag{5.2}$$

Avendo in mente tale esempio *scalare* di non esistenza, si deve ritenere impossibile, in generale, ottenere l'esistenza nel caso *vettoriale*? Si deve ritenere che un problema analogo di minimizzazione nel caso *vettoriale* sia, in generale, privo di soluzione? Il caso *scalare* è un caso particolare del caso *vettoriale*? La risposta data in B. Dacorogna - P. Marcellini (1995) è sembrata per certi versi sorprendente:

TEOREMA. — *Siano $m \geq 1$ (casi scalare e vettoriale), $n \geq 2$ (integrali multipli) e $u_0 = u_0(x) = \xi_0 x$ (dato al bordo lineare); $g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ come in precedenza. Allora condizione necessaria affinchè il problema variazionale* (5.2) *abbia minimo è che* $\operatorname{rank}\{\xi_0\} \geq 2$.

Ricordiamo che ξ_0 è una matrice $m \times n$. Nel caso scalare $m = 1$ risulta ovviamente $\operatorname{rank}\{\xi_0\} = 1$ (se $\xi_0 \neq 0$) e non c'è minimo. Nel caso vettoriale $m > 1$ c'è più libertà; infatti, nello studio dell'esistenza si possono imporre *a priori* $m - 1$ condizioni supplementari che permettono di risolvere il problema (si veda Dacorogna - Marcellini (1995) per maggiori dettagli).

Il passo principale nella trattazione di problemi variazionali non convessi è lo studio di un problema di Dirichlet per un'*equazione* (o un *sistema*) differenziale non lineare del primo ordine, che, nel caso scalare $m = 1$, è del tipo

$$\begin{cases} F(x, u(x), Du(x)) = 0, & q.o.\ x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}, \tag{5.3}$$

dove Ω è un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$, $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\varphi \in W^{1,\infty}(\Omega)$; mentre nel caso vettoriale assume, ad esempio, la forma

$$\begin{cases} F_i(x, u(x), Du(x)) = 0, & q.o.\ x \in \Omega, \ \forall i = 1,2,\ldots,N \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}; \tag{5.4}$$

in quest'ultimo caso N è un intero positivo assegnato, $u:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $F\equiv(F_i):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}^N$ e $\varphi\in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$; si tratta quindi di un *sistema* differenziale non lineare del primo ordine in N equazioni.

L'esistenza di soluzioni di classe $W^{1,\infty}(\Omega)$ del problema scalare (5.3) è stata ampiamente studiata in letteratura. Alcuni riferimenti sono P.D. Lax (1957), A. Douglis (1961), S.N. Kruzkov (1975), M.G. Crandall - P.L. Lions (1983), M.G. Crandall - L.C. Evans - P.L. Lions (1984), I. Capuzzo Dolcetta - L.C. Evans (1988), I. Capuzzo Dolcetta - P.L. Lions (1990), M.G. Crandall - H. Ishii - P.L. Lions (1992). Anche alcune importanti monografie sono dedicate a questi problemi; ad esempio: H. Rund (1966), S.H. Benton (1977), P.L. Lions (1982), W.H. Fleming - H.M. Soner (1993), G. Barles (1994), I. Subbotin (1995), M. Giaquinta - S. Hildebrandt (1996) e M. Bardi - I. Capuzzo Dolcetta (in preparazione).

Nei lavori e testi citati l'esistenza di soluzioni è soltanto una parte del problema, mentre altre questioni sono relative alla unicità, alla determinazione di formule esplicite per la risoluzione, a proprietà di *massimalità* della soluzione, e così via. Nel contesto scalare citato la nozione di *soluzione viscosità*, introdotta da M.G. Crandall - P.L. Lions (1983), gioca un ruolo centrale.

La soluzione viscosità è però utilizzabile soltanto nel contesto scalare. Il caso vettoriale è stato recentemente affrontato da B. Dacorogna - P. Marcellini (1996, 1997) fornendo l'esitenza di soluzioni di classe $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ non solo nel caso scalare (5.3), ma soprattutto per il sistema differenziale (5.4) nel caso vettoriale. Vale ad esempio il seguente

TEOREMA. — *Sia $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Siano $F_i^\delta:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$, per $\delta\in[0,\delta_0)$, $\delta_0>0$ e $i=1,2,\ldots,N$, con $F_i^0=F_i$, funzioni continue nel complesso delle variabili (ed anche rispetto a δ), quasiconvesse nella variabile del gradiente. Si assuma che, per ogni $(x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^m$, l'interno dell'involucro convesso di rango uno sia espresso da*

$$intRco\Big\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ F_i^\delta(x,s,\xi)=0,\ \ i=1,2,\ldots,N\Big\}=$$
$$=\Big\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ F_i^\delta(x,s,\xi)<0,\ \ i=1,2,\ldots,N\Big\},\ \ \forall\,\delta\in[0,\delta_0)\,,$$

e sia limitato; inoltre

$$\Big\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ F_i^\delta(x,s,\xi)=0,\ \ i=1,2,\ldots,N\Big\}\subset$$
$$\subset\Big\{\xi\in\mathbb{R}^{m\times n}:\ F_i^{\delta'}(x,s,\xi)<0,\ \ i=1,2,\ldots,N\Big\},\ \ \forall\,0\le\delta'<\delta<\delta_0\,.$$

Allora il problema di Dirichlet (5.4) ammette soluzioni $u\in W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)$, purché il dato iniziale $\varphi\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^m)$ soddiffi le condizioni di compatibilità

$$F_i(x,\varphi(x),D\varphi(x))<0\,,\qquad\qquad \forall\,x\in\Omega,\ \ \forall\,i=1,2,\ldots,N\,.$$

Gli strumenti principali del metodo per trattare il caso vettoriale sono: *(i)* il teorema di Baire, già utilizzato in un contesto simile (relativamente ad inclusioni differenziali ordinarie) da A. Cellina (1980) e F.S. De Blasi - G. Pianigiani (1982, 1991) (un riferimento per inclusioni differenziali in $\mathbb{R}^n$ nel caso scalare, di cui sono venuto a conoscenza solo recentemente, è A. Bressan - F. Flores, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 92 (1994), 9-16); *(ii)* metodi di *rilassamento* per integrali del calcolo delle variazioni; *(iii)* semicontiniutà per integrali quasiconvessi.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. ACERBI - N. FUSCO, *Semicontinuity problems in the calculus of variations,* Arch. Rational Mech. Anal., **86** (1984), 125-145.

[2] E. ACERBI - N. FUSCO, *A regularity theorem for minimizers of quasiconvex integrals,* Arch. Rational Mech. Anal., **99** (1987), 261-281.

[3] E. ACERBI - N. FUSCO, *Partial regularity under anisotropic (p,q) growth conditions,* J. Differential Equations, **107** (1994), 46-67.

[4] R.A. ADAMS, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[5] L. AMBROSIO, *New lower semicontinuity results for integral functionals,* Rend. Accad. Naz. Sci. XL, 11 (1987), 1-42.

[6] C. ARZELÀ, *Sul principio di Dirichlet*, Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, **1** (1896-97), 71-84.

[7] G. AUBERT - R. TAHRAOUI, *Théorèmes d'existence pour des problèmes du calcul des variations,* J. Differential Eq., **33** (1979), 1-15.

[8] G. AUBERT R. TAHRAOUI, *Théorèmes d'existence en optimimisation non convexe,* Appl. Anal., **18** (1984), 75-100.

[9] J.M. BALL, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity,* Arch. Rat. Mech. Anal., **63** (1977), 337-403.

[10] J.M. BALL - R.D. JAMES, *Fine phase mixtures as minimizers of energy,* Arch. Rational Mech. Anal., **100** (1987), 15-52.

[11] J.M. BALL - R.D. JAMES, *Proposed experimental tests of a theory of fine microstructure and the two well problem,* Phil. Trans. Royl. Soc. London, **A338** (1991), 389-450.

[12] M. BARDI - I. CAPUZZO DOLCETTA, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, libro in preparazione.

[13] G. BARLES, *Solutions de viscosite des equations de Hamilton-Jacobi*, Mathematiques and Applications, 17, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[14] P. BAUMAN - D. PHILLIPS, *A nonconvex variational problem related to change of phase*, J. Appl. Math. Optimization, 21 (1990), 113-138.

[15] A. BENSOUSSAN - J.L. LIONS - G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures,* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[16] S.H. BENTON, *The Hamilton Jacobi equation. A global approach*, Academic Press, New York, 1977.

[17] L.D. BERKOWITZ, *Lower semicontinuity of integral functionals,* Trans. Am. Math. Soc., **192** (1974), 51-57.

[18] S. BERNSTEIN, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux derivées partielles du second ordre*, Math. Annalen, 59 (1904), 20-76.

[19] T. BHATTACHARYA - F. LEONETTI, $W^{2,2}$ *regularity for weak solutions of elliptic systems with nonstandard growth,* J. Math. Anal. Applications, **176** (1993), 224-234.

[20] L. BOCCARDO - B. DACOROGNA, *Monotonicity of certain differential operators in divergence form,* Manuscripta Math., 64 (1989), 253-260.

[21] L. BOCCARDO - T. GALLOUET - P. MARCELLINI, *Anisotropic equations in* L^1, Differential and Integral Equations, **9** (1996), 209-212.

[22] L. BOCCARDO - P. MARCELLINI - C. SBORDONE, $L^\infty -$ *regularity for variational problems with sharp non standard growth conditions*, Boll. Un. Mat. Ital. **4-A** (1990), 219-225.

[23] E. BOMBIERI, *Variational problems and elliptic equations (Hilbert's problem 20)*, Proc. Symposia Pure Math., Vol. XXVIII, F.E. Browder Editor, American Math. Society, 1976, 525-535.

[24] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[25] F.E. BROWDER, *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, Proc. Symposia Pure Math., Vol. XXVIII, American Math. Society, 1976.

[26] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, relaxation, and integral representation in the calculus of variations,* Pitman Research Notes in Math., 207, Longman, Harlow, 1989.

[27] G. BUTTAZZO, V. FERONE - B. KAWOHL, *Minimum problems over sets of concave functions and related questions,* Math. Nachrichten, **173** (1995), 71-89.

[28] R. CACCIOPPOLI, *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti*, Rend. Accad. Naz. Lincei, **19** (1934), 83-89.

[29] R. CACCIOPPOLI, *Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali*, Giornale di Mat. di Battaglini, **80** (1950-51), 186-212.

[30] R. CACCIOPPOLI - G. SCORZA DRAGONI, *Necessità della condizione di Weierstrass per la semicontinuità di un integrale doppio sopra una data superficie,* Memorie Acc. d' Italia, **9** (1938), 251-268.

[31] J.W. CALKIN, *Functions of several variables and absolute continuity (I)*, Duke Math. J., **6** (1940), 170-185.

[32] I. CAPUZZO DOLCETTA - L. C. EVANS, *Optimal switching for ordinary differential equations*, SIAM J. Optim. Control, **22** (1988), 1133-1148.

[33] I. CAPUZZO DOLCETTA - P. L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and state-constraint problem*, Trans. Amer. Math. Soc., **318** (1990), 643-683.

[34] C. CARATHEODORY, *Calculus of variations and partial differential equations of the first order*, Holden Day, San Francisco, 1965.

[35] P. CELADA - G. DAL MASO, *Further remarks on the lower semicontinuity of polyconvex integrals*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Lin., **11** (1994), 661-691.

[36] A. CELLINA, *On the differential inclusion* $x' \in [-1,1]$, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Sc. Fis. Mat. Nat., **69** (1980), 1-6.

[37] A. CELLINA, *On minima of a functional of the gradient: necessary conditions*, Nonlinear Analysis. Theory Meth. Appl., **20** (1993), 337-341.

[38] A. CELLINA, *On minima of a functional of the gradient: sufficient conditions*, Nonlinear Analysis. Theory Meth. Appl., **20** (1993), 343-347.

[39] A. CELLINA - G. COLOMBO, *On a classical problem of the calculus of variations without convexity assumptions,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, **7** (1990), 97-106.

[40] A. CELLINA - S. ZAGATTI, *An existence result in a problem of the vectorial case of the calculus of variations,* S.I.A.M. J. Control Optimization, **33** (1955), 960-970.

[41] L. CESARI, *Lower semicontinuity and lower closure theorems without seminormality conditions,* Ann. Mat. Pura Appl., **98** (1974), 381-397.

[42] L. CESARI, *An existence theorem without convexity conditions,* SIAM J. Control, **12** (1974), 319-331.

[43] L. CESARI, *Optimization - Theory and applications*, Appl. of Math. 17, Springer-Verlag, 1983.

[44] M. CHIPOT - L.C. EVANS, *Linearization at infinity and Lipschitz estimates for certain problems in the calculus of variations,* Proc. Royal Soc. Edinburgh, **102 A** (1986), 291-303.

[45] M. CHIPOT - D. KINDERLEHRER, *Equilibrium configurations of crystals,* Arch. Rational Mech. Anal., **103** (1988), 237-277.

[46] H.J. CHOE, *Interior behaviour of minimizers for certain functionals with nonstandard growth,* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., **19** (1992), 933-945.

[47] M.G. CRANDALL - L.C. EVANS - P.L. LIONS, *Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **282** (1984), 487-502.

[48] M.G. CRANDALL - H. ISHII - P.L. LIONS, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. Amer. Math. Soc., **27** (1992), 1-67.

[49] M.G. CRANDALL - P.L. LIONS, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **277** (1983), 1-4.

[50] A. CUTRI', *Some remarks on Hamilton-Jacobi equations and non convex minimization problems*, Rendiconti Mat., **13** (1993), 733-749.

[51] B. DACOROGNA, *A relaxation theorem and its applications to the equilibrium of gases,* Arch. Rational Mech. Anal., **77** (1981), 359-386.

[52] B. DACOROGNA, *Direct methods in the calculus of variations,* Applied Math. Sciences 78, Springer-Verlag, 1989.

[53] B. DACOROGNA - P. MARCELLINI, *Semicontinuité pour des intégrands polyconvexes sans continuité des determinants,* C. R. Acad. Sci. Paris, Série I. Math., **311** (1990), 393-396.

[54] B. DACOROGNA - P. MARCELLINI, *Existence of minimizers for non quasiconvex integrals*, Arch. Rational Mech. Anal., **131** (1995), 359-399.

[55] B. DACOROGNA - P. MARCELLINI, *Théorèmes d'existence dans les cas scalaire et vectoriel pour les équations de Hamilton-Jacobi*, C. R. Acad. Sci. Paris, **322** (1996), 237-240.

[56] B. DACOROGNA - P. MARCELLINI, *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial cases*, Acta Mathematica, **178** (1997), 1-37.

[57] B. DACOROGNA - P. MARCELLINI, *Sur le problème de Cauchy-Dirichlet pour les systèmes d'équations non linéaires du premier ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris, **323** (1996), 599-602.

[58] B. DACOROGNA - P. MARCELLINI, *Cauchy-Dirichlet problem for first order nonlinear systems*, preprint gennaio 1997.

[59] A. DALL'AGLIO - E. MASCOLO - G. PAPI, *Local boundedness for minima with non standard growth conditions*, Rendiconti di Matematica, inviato per la pubblicazione.

[60] G. DAL MASO, *An introduction to* $\Gamma-$ *convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equat. and their Appl., Vol. 8, Birkhauser, Boston, 1993.

[61] G. DAL MASO - L. MODICA, *A general theory of variational functionals,* Topics in Funct. Analysis 1980-81, Quaderni della Scuola Normale Sup. di Pisa, 1982.

[62] G. DAL MASO - C. SBORDONE, *Weak lower semicontinuity of polyconvex integrals: a bordeline case,* Math. Z., **218** (1995), 603-609.

[63] R. DE ARCANGELIS - F. SERRA CASSANO, *On the homogenization of degenerate elliptic equations in divergence form*, J. Math. Pures Appl., **71** (1992), 119-138.

[64] F.S. DE BLASI - G. PIANIGIANI, *A Baire category approach to the existence of solutions of multivalued differential equations in Banch spaces*; Funkcialaj Ekvacioj, **25** (1982), 153-162.

[65] F.S. DE BLASI - G. PIANIGIANI, *Non convex valued differential inclusions in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **157** (1991), 469-494.

[66] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità degli estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **3** (1957), 25-43.

[67] E. DE GIORGI, *Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico,* Boll. Un. Mat. Ital., **1** (1968), 135-137.

[68] E. DE GIORGI, *Teoremi di semicontinuità nel calcolo delle variazioni*, Ist. Naz. Alta Mat. Roma, 1968-69.

[69] E. DE GIORGI, *Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area,* Rendiconti Mat., **8** (1975), 277-294.

[70] E. DI BENEDETTO, *$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations,* Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., **7** (1983), 827-850.

[71] A.L. DONTCHEV - T. ZOLEZZI, *Well posed optimization problems*, Lecture Notes in Math., 1543, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[72] A. DOUGLIS, *The continuous dependence of generalized solutions of non linear partial differential equations upon initial data*, Comm. Pure Appl. Math., **14** (1961), 267-284.

[73] D.M. DUC - J. EELLS, *Regularity of exponentially harmonic functions,* International Journal of Math., **2** (1991), 395-408.

[74] I. EKELAND, *Discontinuités de champs hamiltoniens et existence de solutions optimales en calcul des variations,* Publ. Math. (IHES), **47** (1977), 5-32.

[75] I. EKELAND - R. TEMAM, *Analyse convexe et problemes variationnels*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[76] L.C. EVANS, *A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic p.d.e.,* J. Differential Equations, **45** (1982), 356-373.

[77] L.C. EVANS, *Quasiconvexity and partial regularity in the calculus of variations*, Arch. Rational Mech. Anal., **95** (1986), 227-252.

[78] E.B. FABES - C.E. KENIG - R. SERAPIONI, *The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations, **7** (1982), 77-116.

[79] N.B. FIROOZYE - R.V. KOHN, *Geometric parametres and the relaxation of multiwell energies*, in "Microstructure and Phase Transition", ed. by D. Kinderlehrer et al., Springer, 1992.

[80] W.H. FLEMING - H.M. SONER, *Controllated Markov processes and viscosity solutions. Applications of Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[81] I. FONSECA, *Variational methods for elastic crystals*, Arch. Rat. Mech. Anal., **97** (1987), 189-220.

[82] I. FONSECA - J. MALÝ, *Relaxation of multiple integrals below the growth exponent*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Lin., in corso di stampa.

[83] I. FONSECA - P. MARCELLINI, *Relaxation of multiple integrals in subcritical Sobolev spaces*, J. Geom. Anal., in corso di stampa.

[84] I. FONSECA - L. TARTAR, *The gradient theory of phase transition for systems with two potential wells*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **111A** (1989), 89-102.

[85] G. FRIESECKE, *A necessary and sufficient condition for nonattainment and formation of microstructure almost everywhere in scalar variational problems,* Proceed. Royal Soc. Edinburgh, **124** (1994), 437-471.

[86] N. FUSCO - J. HUTCHINSON, *$C^{1,\alpha}$ partial regularity of functions minimizing quasiconvex integrals,* Manuscripta Math., **54** (1985), 121-143.

[87] N. FUSCO - J. HUTCHINSON, *A direct proof for lower semicontinuity of polyconvex functionals,* Manuscripta Math., **85** (1995), 35-50.

[88] N. FUSCO, P. MARCELLINI - A. ORNELAS, *Existence of minimizers for some nonconvex one-dimensional integrals*, Portugaliae Mathematica, in corso di stampa.

[89] N. FUSCO - C. SBORDONE, *Higher integrability of the gradient of minimizers of functionals with nonstandard growth conditions,* Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 673-683.

[90] N. FUSCO - C. SBORDONE, *Local boundedness of minimizers in a limit case*, Manuscripta Math. **69** (1990), 19-25.

[91] N. FUSCO - C. SBORDONE, *Some remarks on the regularity of minima of anisotropic integrals*, Comm. on P.D.E., **18** (1993), 153-167.

[92] W. GANGBO, *On the weak lower semicontinuity of energies with polyconvex integrands*, J. Math. Pures Appl., **73** (1994), 455-469.

[93] F.W. GEHRING, *The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping,* Acta Math., **130** (1973), 265-277.

[94] D. GIACHETTI - R. SCHIANCHI, *Minima of some non convex non coercive problems,* Ann. Mat. Pura Appl., **165** (1993), 109-120.

[95] M. GIAQUINTA, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems,* Annals of Math. Studies 105, Princeton Univ. Press, 1983.

[96] M. GIAQUINTA, *Growth conditions and regularity, a counterexample*, Manuscripta Math., **59** (1987), 245-248.

[97] M. GIAQUINTA - E. GIUSTI, *On the regularity of the minima of variational integrals,* Acta Math., **148** (1982), 31-46.

[98] M. GIAQUINTA - E. GIUSTI, *Q-minima,* Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non Linéaire, **1** (1984), 79-107.

[99] M. GIAQUINTA - S. HILDEBRANDT, *Calculus of variations I and II*, Grundlehren der Math. Wiss, 310-311, Springer, Berlin, 1996.

[100] M. GIAQUINTA - G. MODICA, *Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems*, J. für Reine Angw. Math., **311/312** (1979), 145-169.

[101] M. GIAQUINTA - G. MODICA, *Remarks on the regularity of the minimizers of certain degenerate functionals,* Manuscripta Math., **57** (1986), 55-99.

[102] M. GIAQUINTA - G. MODICA - J. SOUČEK, *Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity,* Arch. Rational Mech. Anal., **106** (1989), 97-159. Erratum and addenda **109** (1990), 385-392.

[103] D. GILBARG - N.S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order,* Grundl. der Math. Wiss. 224, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork, 1977.

[104] E. GIUSTI, *Regolarità parziale delle soluzioni di sistemi ellittici quasi lineari di ordine arbitrario,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **23** (1969), 115-141.

[105] E. GIUSTI, *Equazioni ellittiche del secondo ordine*, in "Quaderni Unione Matematica Italiana", No. 6, Pitagora, Bologna, 1978.

[106] E. GIUSTI, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation,* Birkhäuser, Boston, 1984.

[107] E. GIUSTI, *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 1994.

[108] E. GIUSTI - M. MIRANDA, *Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni,* Boll. Un. Mat. Ital., **2** (1968), 1-8.

[109] E. GIUSTI - M. MIRANDA, *Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasi-lineari,* Arch. Rat. Mech. Anal., **31** (1968), 173-184.

[110] G. GOFFMAN - J. SERRIN, *Sublinear functions of measures and variational integrals,* Duke Math. J., **31** (1964), 159-178.

[111] M.E. GURTIN - R. TEMAM, *On the anti-plane shear problem in finite elasticity,* J. Elasticity, **11** (1981), 197-206.

[112] HONG MIN-CHUN, *Existence and partial regularity in the calculus of variations,* Ann. Mat. Pura Appl., **149** (1987), 311-328.

[113] HONG MIN-CHUNG, *Some remarks on the minimizers of variational integrals with non standard growth conditions*, Boll. Un. Mat. Ital., **6-A** (1992), 91-101.

[114] E. HOPF, *Zum analytischen charakter der lösungen regulärer zweidimensionaler variationsprobleme*, Math. Z., **30** (1929), 404-413.

[115] A.D. IOFFE, *On lower semicontinuity of integral functionals I*, SIAM J. Control Optimization, **15** (1977), 521-538.

[116] A.V. IVANOV, *Quasilinear degenerate and non uniformly elliptic and parabolic equations of second order*, in "Proc. Steklov Inst. Math.," Russian tom 160 (1982), American Math. Soc., Providence, 1984.

[117] D. KINDERLHERER - G. STAMPACCHIA, *Introduction to variational inequalities and their applications,* Academic Press, New York, 1980.

[118] D. KINDERLEHRER - P. PEDREGAL, *Remarks about the analysis of gradient Young measures,* Proc. Partial Differential Equations and Related Subjects, Miranda M. Ed., Pitman Research Notes in Math., **262** (1992), Longam, 125-150.

[119] R.V. KOHN, *The relaxation of a double-well energy*, Continuum Mech. Thermodynamics, **3** (1991), 918-1000.

[120] R.V. KOHN - G. STRANG, *Optimal design annd relaxation of variational problems I,II,III*, Commun. Pure Appl. Math., **39** (1986), 113-137, 139-182, 353-377.

[121] A.G. KOROLEV, *On the boundedness of generalized solutions of elliptic differential equations with nonpower nonlinearities*, Mat. Sb. **180** (1989), 78-100; Math. USSR-Sb. **66** (1990), 83-106.

[122] S.N. KRUZKOV, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equation of eikonal type*, USSR Sbornik, **27** (1975), 406-446.

[123] O. LADYZHENSKAYA - N. URAL'TSEVA, *Linear and quasilinear elliptic equations*, in "Math. in Science and Engineering," Vol. 46, Academic Press, San Diego, 1968.

[124] O. LADYZHENSKAYA - N. URAL'TSEVA, *Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 677-703.

[125] P.D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), 537-566.

[126] H. LEBESGUE, *Intégrale, longueur, aire,* Ann. Mat. Pura Appl., **7** (1902), 231-359.

[127] F. LEONETTI, *Two-dimensional regularity of minima of variational functionals without standard growth conditions*, Ricerche di Matematica, **38** (1989), 41-50.

[128] F. LEONETTI, *Weak differentiability for solutions to nonlinear elliptic systems with $p, q -$ growth conditions*, Ann. Mat. Pura Appl., **162** (1992), 349-366.

[129] J. LERAY - J. SCHAUDER, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., **51** (1934), 45-78.

[130] J. LEWIS, *Regularity of derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations,* Indiana Univ. Math. J., **32** (1983), 849-858.

[131] L. LICHTENSTEIN, *Über den analytischen charakter der lösungen zweidimensionaler variationsprobleme*, Bull. Acad. Sci. Cracoviae, 1912.

[132] G.M. LIEBERMAN, *On the regularity of the minimizer of a functional with exponential growth,* Comment. Math. Univ. Carolin., **33** (1992), 45-49.

[133] G.M. LIEBERMAN, *Gradient estimates for a class of elliptic systems,* Ann. Mat. Pura Appl., **164** (1993), 103-120.

[134] J.L. LIONS - E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications I,II,III*, Springer-Verlag, 1972.

[135] P.L. LIONS, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations,* Research Notes in Math. no. 69, Pitman, London, 1982.

[136] J. MALÝ, *Weak lower semicontinuity of polyconvex integrals,* Proc. Royal Soc. Edinburgh, **123A** (1993), 681-691.

[137] J. MALÝ, *Weak lower semicontinuity of quasiconvex integrals,* Manuscripta

Math., 85 (1994), 419-428.

[138] J.J. MANFREDI, *Regularity for minima of functionals with $p-$growth,* J. Differential Equations, **76** (1988), 203-212.

[139] P. MARCELLINI, *Alcune osservazioni sull'esistenza del minimo di integrali del calcolo delle variazioni senza ipotesi di convessità,* Rendiconti di Matematica, **13** (1980), 271-281.

[140] P. MARCELLINI, *A relation between existence of minima for nonconvex integrals and uniqueness for non strictly convex integrals of the calculus of variations,* Mathematical Theories of Optimization, Proceedings, edited by J.P. Cecconi and T. Zolezzi, Lecture Notes in Math., vol. 979, Springer, 1983, 216-231.

[141] P. MARCELLINI, *Some remarks on uniqueness in the calculus of variations,* Collège de France Seminar, edited by H. Brézis and J.L. Lions, Research Notes in Math., vol. 84, Pitman, 1983, 148-153.

[142] P. MARCELLINI, *Approximation of quasiconvex functions and lower semicontinuity of multiple integrals,* Manuscripta Math., **51** (1985), 1-28.

[143] P. MARCELLINI, *On the defininition and the lower semicontinuity of certain quasiconvex integrals,* Ann. Inst. H. Poincare, Anal. Non. Lin. **3** (1986), 385-392.

[144] P. MARCELLINI, *Un exemple de solution discontinue d'un problème variationnel dans le cas scalaire,* Istituto Matematico "U. Dini," No. 11, Università di Firenze, 1987.

[145] P. MARCELLINI, *Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non standard growth conditions,* Arch. Rational Mech. Anal., **105** (1989), 267-284.

[146] P. MARCELLINI, *Non convex integrals of the calculus of variations,* Methods of nonconvex Analysis, edited by A. Cellina, Lecture Notes in Math., vol. 1446, Springer, 1990, 16-57.

[147] P. MARCELLINI, *Regularity and existence of solutions of elliptic equations with $p,q-$growth conditions,* J. Differential Equations, **90** (1991), 1-30.

[148] P. MARCELLINI, *Regularity for elliptic equations with general growth conditions,* J. Differential Equations, **105** (1993), 296-333.

[149] P. MARCELLINI, *Everywhere regularity for a class of elliptic systems without growth conditions,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **23** (1996), 1-25.

[150] P. MARCELLINI - C. SBORDONE, *Semicontinuity problems in the calculus of variations,* Nonlinear Anal., Theory Meth. Appl., **4** (1980), 241-257.

[151] P. MARCELLINI - C. SBORDONE, *On the existence of minima of multiple integrals of the calculus of variations,* J. Math. Pures Appl., **62** (1983), 1-9.

[152] E. MASCOLO, *Some remarks on non-convex problems,* Material Instabilities in Continuum Mechanics, ed. by J.M. Ball, Calderon Press, Oxford, 1988, 269-286.

[153] E. MASCOLO - G. PAPI, *Local boundedness of minimizers of integrals of the calculus of variations,* Ann. Mat. Pura Appl., **167** (1994), 323-339.

[154] E. MASCOLO - R. SCHIANCHI, *Existence theorems for nonconvex problems,* J. Math. Pures Appl., **62** (1983), 349-359.

[155] E. MASCOLO - R. SCHIANCHI, *Nonconvex problems of the calculus of variations,* Nonlinear Anal., **9** (1985), 371-379.

[156] E. MASCOLO - R. SCHIANCHI, *Existence theorems in the calculus of variations,* J. Differential Eq., **67** (1987), 185-198.

[157] B.J. McSHANE, *On the necessary condition of Weierstrass in the multiple integral problem of the calculus of variations,* Ann. Math., **32** (1931), 578-590.

[158] N. MEYERS, *Quasiconvexity and lower semicontinuity of multiple integrals of any order,* Trans. Amer. Math. Soc., **119** (1965), 125-149.

[159] M. MIRANDA, *Recenti progressi nel calcolo delle variazioni*, Boll. Un. Mat. Ital., **17-A** (1980), 209-225.

[160] L. MODICA - S. MORTOLA, *Un esempio di* $\Gamma^- -$ *convergenza*, Boll. Un. Mat. Ital., **14-B** (1977), 285-299.

[161] M.D.P. MONTEIRO MARQUES - A. ORNELAS, *Genericity and existence of a minimum for scalar integral functionals*, J. Optim. Th. Appl. **86** (1995), 421-431.

[162] C.B. MORREY, *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **43** (1938), 126-166.

[163] C.B. MORREY, *Functions of several variables and absolute continuity (II)*, Duke Math. J., **6** (1940), 187-213.

[164] C.B. MORREY, *Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals*, Pacific J. Math., **2** (1952), 25-53.

[165] C.B. MORREY, *On the analyticity of the solutions of analytic nonlinear elliptic systems of partial differential equations I, II*, Amer. J. Math., **80** (1958), 198-218, 219-234.

[166] C.B. MORREY, *Multiple integrals in the calculus of variations*, D. Grundl. Math. Wiss. 130, Springer-Verlag, 1966.

[167] C.B. MORREY, *Partial regularity results for non-linear elliptic systems,* J. Math. and Mech., **17** (1968), 649-670.

[168] G. MOSCARIELLO - L. NANIA, *Hölder continuity of minimizers of functionals with non standard growth conditions*, Ricerche di Matematica, **40** (1991), 259-273.

[169] J. MOSER, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **13** (1960), 457-468.

[170] S. MÜLLER, *Weak continuity of determinants and nonlinear elasticity,* C.R. Acad. Sc. Paris, **307** (1988), 501-506.

[171] S. MÜLLER, *Minimizing sequences for nonconvex functionals, phase transitions and singular perturbations*, Lecture Notes in Physics, Springer 1990, 31-44.

[172] S. MÜLLER - V. SVERAK, *Attainment results for the two-well problem by convex integration,* J. Jost Ed., International Press 1996, 239-251.

[173] F. MURAT, *Compacité par compensation,* II, Proc. Internat. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, De Giorgi, Magenes, Mosco eds., Pitagora, Bologna, (1979), 245-256.

[174] J. NASH, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math., 8 (1958), 931-954.

[175] J. NEČAS, *Example of an irregular solution to a nonlinear elliptic system with analytic coefficients and conditions for regularity,* Theory of Nonlinear Operators, Abhandlungen der Akad. der Wissen. der DDR, 1977. Proc. of a Summer School held in Berlin in 1975.

[176] L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations,* Comm. Pure Appl. Math., 8 (1955), 648-674.

[177] C. OLECH, *Integrals of set valued functions and linear optimal control problems,* Colloque sur la théorie mathématique du contrôle optimal, C.B.R.M., Vander Louvain, 1970, 109-125.

[178] C. OLECH, *A characterization of L^1 – weak lower semicontinuity of integral functionals,* Bull. Polish. Acad. Sci. Math., **25** (1977), 135-142.

[179] L. PEPE, *Leonida Tonelli e il calcolo delle variazioni*, in *La matematica tra le due guerre*, Bologna, Pitagora, 1987, 307-317.

[180] I. PETROWSKY, *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles*, Rec. Math. N. S. Mat. Sbornik, **5** (1939), 3-70.

[181] C. PUCCI, *Operatori ellittici estremanti*, Ann. Mat. Pura Appl., **65** (1964), 311-327.

[182] J.P. RAYMOND, *Champs Hamiltoniens, relaxation et existence de solutions en calcul des variations*, J. Differential Eq., **70** (1987), 226-274.

[183] J.P. RAYMOND, *Théorème d'existence pour des problèmes variationnels non convexes*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, **107A** (1987), 43-64.

[184] J.P. RAYMOND, *Lipschitz regularity of solutions of some asymptotically convex problems,* Proc. Royal Soc. Edinburgh, **117A** (1991), 59-73.

[185] J.P. RAYMOND, *Existence of minimizers for vector problems without quasi-convexity condition*, Nonlinear Anal., Theory, Methods Appl., **18** (1992), 815-828.

[186] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis,* Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[187] R.T. ROCKAFELLAR, *Integral functionals, normal integrands and measurable selections*, Nonlinear Operators and the Calculus of Variations, edited by Gossez et al., Lecture Notes in Math. 543, Sringer, Berlin, 1975, 157-207.

[188] H. RUND, *The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations*, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[189] C. SBORDONE, *Su alcune applicazioni di un tipo di convergenza variazionale,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **2** (1975), 617-638.

[190] C. SBORDONE, *Lower semicomtinuity and regularity of minima of variational*

integrals, Nonlinear P.D.E. and Appl., Collège de France Seminar, edited by H. Brézis and J.L. Lions, Pitman, 1983, 194-213.

[191] J. SERRIN, *On the definition and properties of certain variational integrals,* Trans. Amer. Math. Soc., **101** (1961), 139-167.

[192] J. SERRIN, *Gradient estimates for solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations*, in "Contributions to Nonlinear Functional Analysis," edited by E.H. Zarantonello, Academic Press, San Diego, 1971, 565-601.

[193] L. SIMON, *Interior gradients bounds for non-uniformly elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J., 25 (1976), 821-855.

[194] S.L. SOBOLEV, *Ob odnoj teoreme funkcional'nogo analiza*, Mat. Sb., **4** (1938), 471-497.

[195] S. SPAGNOLO, *Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **22** (1968), 571-597.

[196] G. STAMPACCHIA, *Problemi al contorno ellittici, con dati discontinui, dotati di soluzioni hölderiane*, Ann. Mat. Pura Appl., **51** (1960), 1-37.

[197] G. STAMPACCHIA, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), 189-258.

[198] G. STAMPACCHIA, *Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Les Presses de l'Université de Montreal, 1966.

[199] B. STROFFOLINI, *Global boundedness of solutions of anisotropic variational problems*, Boll. Un. Mat. Ital., **5-A** (1991), 345-352.

[200] A.I. SUBBOTIN, *Generalized solutions of first order partial differential equations: the dynamical optimization perspective*, Birkhauser, Boston, 1995.

[201] V. ŠVERÁK, *Rank-one convexity does not imply quasiconvexity*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **120A** (1992), 185-189.

[202] V. ŠVERÁK, *On the problem of two wells*, Geometric parametres and the relaxation of multiwell energies, in "Microstructure and Phase Transition", ed. by D. Kinderlehrer et al., Springer, 1992.

[203] R. TAHRAOUI, *Théorèmes d'existence en calcul des variations et applications à l'élasticité non linéaire,* C. R. Acad. Sci. Paris, **302** (1986), 495-498. Also in Proc. Royal Soc. Edinburgh, **109A** (1988), 51-78.

[204] R. TAHRAOUI, *Sur une classe de fonctionnelles non convexes et applications*, S.I.A.M. J. Math. Anal., **21** (1990), 37-52.

[205] G. TALENTI, *Calcolo delle variazioni,* Quaderni dell'Unione Matematica Italiana n. 2, Pitagora Ed., 1977.

[206] G. TALENTI, *Boundedness of minimizers,* Hokkaido Math. J., **19** (1990), 259-279.

[207] TANG QI, *Regularity of minimizers of nonisotropic integrals in the calculus of variations*, Ann. Mat. Pura Appl., **164** (1993), 77-87.

[208] L. TARTAR, *Compensated compactness,* Heriot-Watt Sympos. 4, Pitman, New York, 1978.

[209] L. TARTAR, *Estimations fines des coefficients homogénéisés*, in P. Krée ed. "Ennio De Giorgi Colloquium", Research Notes in Math. no. 125, Pitman, London, 1985, 168-187.

[210] F. TOMARELLI, *A quasi-variational problem in nonlinear elasticity*, Ann. Mat. Pura Appl., **158** (1991), 331-389.

[211] L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Volume primo, Zanichelli, Bologna, 1921.

[212] L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, Volume secondo, Zanichelli, Bologna, 1923.

[213] L. TONELLI, *Il calcolo delle variazioni secondo la cuola italiana e i suoi più recenti risultati*, Atti del I Congresso UMI (Firenze, 1937), 26-39. Ristampa in L. Tonelli, *Opere scelte*, Roma, Cremonese, Vol. III, 1962, 419-435.

[214] P. TOLKSDORFF, *Everywhere regularity for some quasilinear systems with a lack of ellipticity,* Ann. Mat. Pura Appl., **134** (1983), 241-266.

[215] N.S. TRUDINGER, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **20** (1967), 721-747.

[216] K. UHLENBECK, *Regularity for a class of non-linear elliptic systems,* Acta Math., **138** (1977), 219-240.

[217] L.C. YOUNG, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, W.B. Saunders Company, Philadelphia, 1969.

[218] V.V. ZHIKOV - S.M. KOZLOV - O.A. OLEINIK - KHA T'EN NGOAN, *Averaging and G-convergence of differential operators,* Uspeki Math. Nauk, **34** (1979), 65-133; Russian Math. Surveys, **34** (1979), 69-147.

Dipartimento di Matematica "U. Dini", Università di Firenze
Viale Morgagni 67/A, 50134 Firenze, Italy
Email: marcell@udini.math.unifi.it