Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2011 - 2012$ - $26.01.2012$

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Senza ricorrere al Teorema de l'Hospital ma utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi o i limiti notevoli, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + 2x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

Risposta N°1

Per il principio di sostituzione degli infinitesimi $1-\cos x \approx \frac{x^2}{2}$, $2x\sin x \approx 2x^2$, $\sin x \approx x$ e $x\cos x \approx x$, abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + 2x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + 2x^2}{x+x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{4} = 0$$

Domanda N°2 Data la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{se } x < 1 \\ \ln x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per quali valori di a e b $f(x)$ verifica le ipotesi del Teorema di Lagrange nell'intervallo $[0; e]$? Per tali valori calcolare il punto di Lagrange.

Risposta N°2

Affinché $f(x)$ soddisfi le ipotesi del Teorema di Lagrange, deve essere continua in $[0, e]$ e derivabile in $(0, e)$. In particolare deve essere continua in $x_0 = 1$. Imponendo la continuità e la derivabilità in 1, i due coefficienti soddisfano le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} a+b & = 0 \\ a & = 1 \end{cases}$$

Ricaviamo $a = 1$ e $b = -1$. Chiaramente negli altri punti la funzione soddisfa le ipotesi volute. Adesso cerchiamo il punto di Lagrange c: per c deve valere

$$\frac{2}{e} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{c} & \text{se} \quad 1 \le x \le e \end{cases}$$

Chiaramente dobbiamo scegliere la seconda alternativa che fornisce $c = \frac{e}{2}$.

Domanda N°3

- Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \sin \ln x \, dx$$

- Calcolare

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx.$$

Risposta N°3

- $$\int \sin \ln x \, dx = x \sin \ln x - \int \cos \ln x \, dx = x \sin \ln x - x \cos \ln x - \int \sin \ln x \, dx$$

  per cui

$$\int \sin \ln x \, dx = \frac{x(\sin \ln x - \cos \ln x)}{2} + c$$

- Consideriamo la sostituzione $t = \sqrt{e^x - 1}$, ossia $x = \ln(t^2 + 1)$ e $dx = \frac{2t}{t^2+1} dt$. Gli estremi diventano $\sqrt{e^0 - 1} = 0$ e $\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$. L'integrale diventa

$$\int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + 1} \, dt = 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + t^2}\right) dt = 2 \left[t - \arctan t\right]_0^1 = 2 \left[1 - \frac{\pi}{4}\right] = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = 2 \arcsin \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) + x$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
4. studiarne le eventuali simmetrie;
5. determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. determinarne la positività e le intersezioni con gli assi (N.B. ricavare informazioni dallo studio della derivata prima)
8. determinare gli eventuali punti di non derivabilità e classificarli;
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

Risposta N°4 Il dominio di $f(x)$ è dato dall'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ per cui:

$$-1 \leq \frac{2x}{1 + x^2} \leq 1,$$

ossia deve valere

$$\begin{cases} \frac{2x+1+x^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \geq 0 \\ \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0, \end{cases}$$

che è verificata da ogni $x \in \mathbb{R}$. Chiaramente f è continua su tutto $\mathbb{R}$ e dunque non ha punti di discontinuità.

$$f(-x) = 2 \arcsin \left(\frac{-2x}{1 + x^2}\right) - x = -2 \arcsin \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) - x = -\left(2 \arcsin \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right) + x\right),$$

ossia f è dispari. In particolare $f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Chiaramente f non ha asintoti né orizzontali né verticali: cerchiamo eventuali asintoti obliqui.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}{x} + 1 = 1$$

e

$$q = \lim_{x\to\infty} f(x) - x = 2\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 0$$

Per cui l'asintoto obliquo è la retta $y = x$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + 1 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{1+x^4+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + 1 = \frac{2(1+x^2)}{|1-x^2|} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + 1 =$$

$$= \begin{cases} \frac{4}{1+x^2} + 1 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ -\frac{4}{1+x^2} + 1 & \text{se} \quad x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2+5}{x^2+1} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ \frac{x^2-3}{x^2+1} & \text{se} \quad x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

In particolare abbiamo che

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1,$$

mentre

$$\lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 3.$$

I punti $x = \pm 1$ sono perciò punti angolosi. Studiamo il segno della derivata prima:

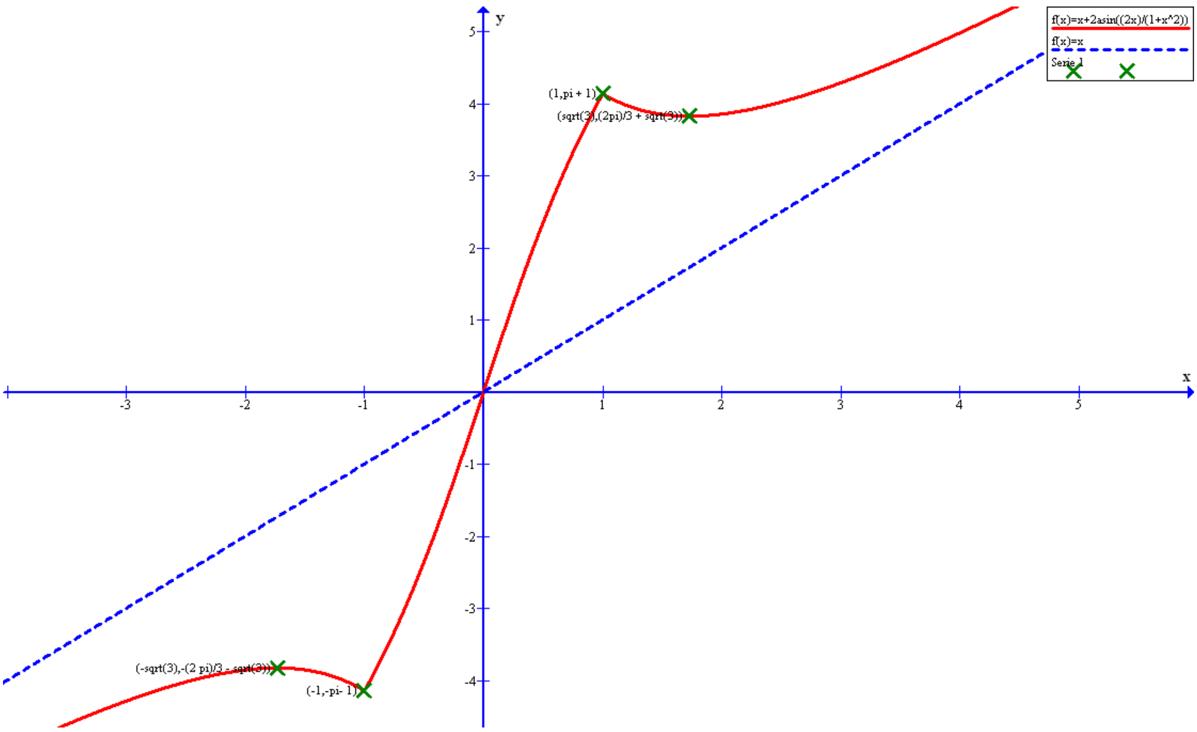
- Se $-1 < x < 1$ $f'(x) > 0$;
- Se $x < -1 \vee x > 1$, $f'(x) > 0$ per $x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}$, $f'(x) < 0$ per $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$ e si annulla in $x = \pm\sqrt{3}$.

In questo modo la funzione risulta strettamente crescente per $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, strettamente decrescente per $x \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$. I punti $x = -\sqrt{3}$ e $x = 1$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = -1$ e $x = \sqrt{3}$ sono punti di minimo relativo.

Se vogliamo cercare tutti gli zeri della funzione oltre a $x_0 = 0$, per simmetria basta considerare in primo luogo le x positive. Chiaramente $f(x) > 0$ per $x \in (0, 1]$, essendo strettamente crescente. Inoltre $f(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} > 0$. Essendo f strettamente decrescente per $x \in (1, \sqrt{3})$ e continua, avremo che $f(x) > 0$ per $x \in (1, \sqrt{3})$. Essendo f strettamente crescente in $(\sqrt{3}, +\infty)$, $f(x) > 0$ per ogni $x > 0$. Per disparità, $f(x) < 0$ per $x < 0$. Quindi l'unico zero di f è $x_0 = 0$. Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-8x}{(1+x^2)^2} & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ \frac{8x}{(1+x^2)^2} & \text{se} \quad x < -1 \vee x > 1 \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ risulta convessa per $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$, concava per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ e i punti di flesso sono $x_0 = 0$ e $x_{1,2} = \pm 1$.


f(x)=x+2asin((2x)/(1+x^2))
f(x)=x
Serie 1
(1,pi + 1)
(sqrt(3),(2pi)/3 + sqrt(3))
(-sqrt(3),-(2 pi)/3 - sqrt(3))
(-1,-pi- 1)
x
y
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5