Matematica e Statistica
Scienze Farmaceutiche Applicate
a.a. $2011-2012$ - $17.09.2012$

Nome .... Cognome ....

Matricola n° ....

Domanda N°1 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$$

Risposta N°1

Calcoliamo il limite applicando il teorema de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\right)=\left(\frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}\right)=\frac{1}{2}$$

Domanda N°2 Determinare m e n in modo che la funzione

$$f(x)=\frac{2x^2+2mx+n}{x^2+1}$$

ammetta valore 1 nel punto di ascissa -2 e valore massimo nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

Risposta N°2 Dobbiamo risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} f(-2) & = & 1 \\ f'(\frac{1}{2}) & = & 0 \end{cases}$$

La derivata di f vale:

$$f'(x)=\frac{(4x+2m)(x^2+1)-(2x^2+2mx+n)(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^3+4x+2mx^2+2m-4x^3-4mx^2-2nx}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{-2mx^2+(4-2n)x+2m}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{cases} \frac{8-4m+n}{5} & = & 1 \\ -\frac{m}{2}+2-n+2m & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8-4m+n & = & 5 \\ \frac{3m}{2}+2-n & = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4m+n & = & -3 \\ 3m-2n & = & -4 \end{cases}$$

Moltiplicando per 2 la prima riga e sommandola alla seconda, otteniamo che $m=2$ e $n=5$

Domanda N°3 Calcola l'area sottesa alla curva $y=e^{3x}$, per $x\in[0,1]$.

noindent

Risposta N°3 Il valore cercato è dato dall'integrale

$$\int_0^1 e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_0^1 = \frac{e^3-1}{3}$$

Domanda N°4 Data la funzione:

$$f(x) = x + \ln x + \frac{2}{x} + 2$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne le eventuali simmetrie;
3. studiarne il comportamento agli estremi;
4. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
5. determinare gli eventuali asintoti;
6. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
7. dallo studio della derivata prima, determinarne la positività e le eventuali intersezioni con gli assi;
8. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
9. darne un grafico approssimato.

Risposta N°4

1. Dominio: $D = (0; +\infty)$
2. Simmetrie: data l'espressione di D, $f(x)$ non è né pari, né dispari.
3. Limiti, asintoti e discontinuità:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x}\right) = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x + \frac{2}{x} + 2\right) = +\infty$$

quindi non ci sono asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 + x\ln x + 2 + 2x}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 + \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} + 2 + 2x}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 + \frac{1}{x} : \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2 + 2x}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^2 - x + 2 + 2x}{x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

La retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale e i punto $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

4. Derivata prima:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}$$

$$f'(x) \geq 0 \to x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$f'(x) \geq 0 \to x \leq -2 \ \vee \ x \geq +1$$

Quindi, visto che la funzione è definita solo per $x > 0$, nell'intervallo $(0; 1)$ sarà decrescente, nell'intervallo $(1; +\infty)$ crescente. Per $x = 1$ la derivata si annulla e avremo un minimo.

5. Positività e intersezioni con gli assi: dato che la funzione è continua in $(0, +\infty)$, in $x_0 = 1$ la funzione ammette un minimo 3 $f(1) = 5 > 0$, deduciamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in D$. In particolare non ammette intersezioni con l'asse x. Poichè $0 \notin D$, la funzione non ammette neppure intersezioni con l'asse y.

6. Derivata seconda:
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{4 - x}{x^3}$$
$$f''(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} Num \geq 0 \rightarrow x \leq 4 \\ Den > 0 \rightarrow x > 0 \end{cases}$$

   Considerando il dominio di $f(x)$, ovvero $x > 0$, la funzione è convessa nell'intervallo $(0, 4)$, concava nell'intervallo $(4; +\infty)$. Per $x = 4$ la derivata seconda si annulla e abbiamo un punto di flesso:
$$F(4; \frac{13}{2} + \ln 4)$$

   Ecco il grafico della funzione: