

Esercizi relativi al capitolo 2

2.1 Funzioni pari e dispari

Stabilire se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.

1. $f(x) = x^4 - x^2$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$
3. $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x+x}}$
4. $f(x) = x^2 \sin x$
5. $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2}}$
6. $f(x) = |x - 2| + 4$
7. $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$
8. $f(x) = \ln(x^4 - 1)$
9. $f(x) = e^{|x|+x^2}$
10. $f(x) = x + \sqrt{|x|}$
11. $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$
12. $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$
13. $f(x) = x \cos x$
14. $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$
15. $f(x) = |\ln x|$
16. $f(x) = x(\cos x + \sin x)$

Soluzioni

1. f è pari
2. f è dispari
3. f è pari
4. f è dispari
5. f è pari
6. f non è pari né dispari

7. f è dispari
8. f è pari
9. f è pari
10. f non è pari né dispari
11. f è dispari
12. f è dispari
13. f è dispari
14. f è dispari
15. f non è pari né dispari
16. f non è né pari né dispari

2.2 Funzione composta

1. Date le funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt{2x-1}$ determinare $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$, $g \circ g(x)$.
2. Date le funzioni $f(x) = 1 - x^2$ e $g(x) = e^x$ determinare $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$, $f \circ f(x)$.
3. Sia $f(x) = e^x$. Scrivere l'espressione analitica di $f(-x)$, $-f(x)$, $f(x-2)$, $f(x)+2$, $|f(x)|$, $f(|x|)$, $|f(|x|)|$, $f(1+|x|)$, $1+f(|x|)$.
4. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni dispari. Stabilire se $f \circ g(x)$ è pari o dispari.
5. Siano $f(x)$ una funzione crescente e $g(x)$ una funzione decrescente. Stabilire se $f \circ g(x)$ è crescente o decrescente.
6. Sia $q(x) = 3 + \ln^2(2x-1)$. Determinare tre funzioni f , g e h tali che $q(x) = f \circ g \circ h(x)$.

Soluzioni

1. $f \circ g(x) = (\sqrt{2x-1})^3$, $g \circ f(x) = \sqrt{2x^3-1}$, $f \circ f(x) = x^9$, $g \circ g(x) = \sqrt{2\sqrt{2x-1}-1}$;
2. $f(-x) = e^{-x}$, $-f(x) = -e^x$, $f(x-2) = e^{x-2}$, $f(x)+2 = e^x+2$, $|f(x)| = |e^x|$, $f(|x|) = e^{|x|}$, $|f(|x|)| = |e^{|x|}|$, $f(1+|x|) = e^{1+|x|}$, $1+f(|x|) = 1+e^{|x|}$;
3. $f \circ g(x) = 1 - e^{2x}$, $g \circ f(x) = e^{1-x^2}$, $f \circ f(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$;
4. $f \circ g(x)$ risulta dispari;

5. $f \circ g(x)$ risulta decrescente;
6. $f(x) = 3 + x^2$, $g(x) = \ln x$ e $h(x) = 2x - 1$.

2.3 Funzioni invertibili

Delle seguenti funzioni determinare, se esiste, la funzione inversa f^{-1} ed il suo dominio.

1. $f(x) = 2 - 3x$;
2. $f(x) = x^2 - 2x$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$;
4. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5}$
5. $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$;
6. $f(x) = \frac{x}{x+3}$;
7. $f(x) = e^{1-2x}$;
8. $f(x) = 3^{x^2}$;
9. $f(x) = \ln(x+4)$;
10. $f(x) = \frac{4}{5^{3x}}$;

Soluzioni

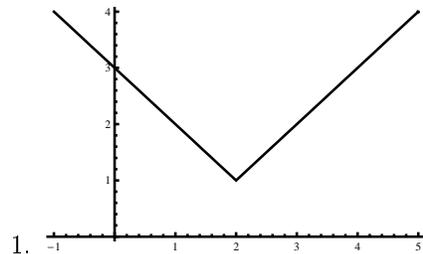
1. $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R}$;
2. f non è invertibile;
3. $f^{-1}(x) = x^3 + 1$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R}$;
4. f non è invertibile;
5. $f^{-1}(x) = \frac{2}{x^3}$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
6. $f^{-1}(x) = \frac{3x}{1-x}$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
7. $f^{-1}(x) = \frac{1-\ln x}{2}$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = (0, +\infty)$;
8. f non è invertibile;
9. $f^{-1}(x) = e^x - 4$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R}$;
10. $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3} \log_5 4y$, $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = (0, +\infty)$.

2.4 Funzioni iniettive, suriettive e monotone

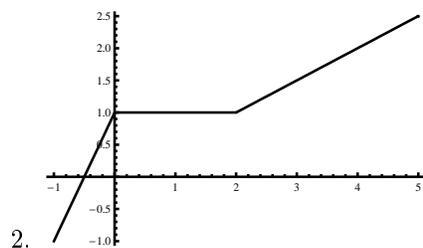
Dopo avere rappresentato graficamente le seguenti funzioni, stabilire se esse sono monotone, iniettive e suriettive (sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali). Determinarne inoltre l'insieme immagine ($\text{Im } f$).

1. $f(x) = 1 + |x - 2|;$
2. $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2; \\ \frac{x}{2} & x > 2 \end{cases};$
3. $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & x \leq 1; \\ 2x - 4 & x > 1; \end{cases};$
4. $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0; \\ \sqrt{x} & x \geq 0; \end{cases};$
5. $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 1; \\ \ln x & x > 1; \end{cases};$
6. $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0; \\ 3x + 1 & x > 0; \end{cases};$
7. $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x < 0; \\ 1 - x^2 & x \geq 0; \end{cases};$
8. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1; \\ -x - 2 & x > -1; \end{cases};$
9. $f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1; \\ \frac{1}{|x|} & |x| > 1; \end{cases};$
10. $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \leq 1; \\ x^2 & x > 1; \end{cases};$

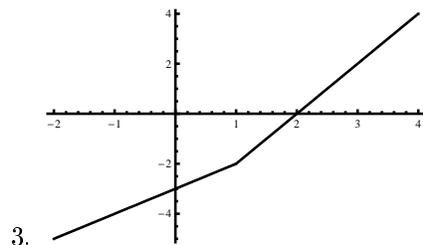
Soluzioni



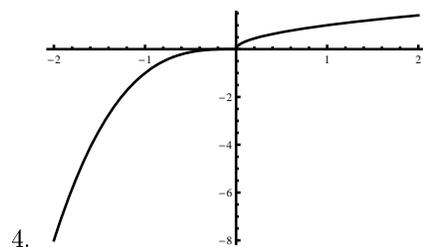
f non è iniettiva, non è suriettiva, né monotona, $\text{Im } f = [1, +\infty)$;



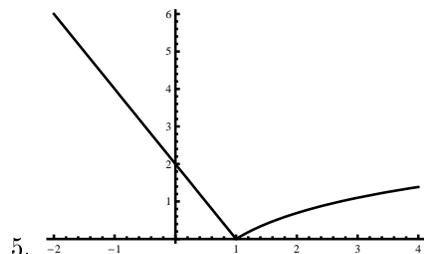
f non è iniettiva, è suriettiva, monotona non decrescente, $\text{Im } f = \mathbb{R}$;



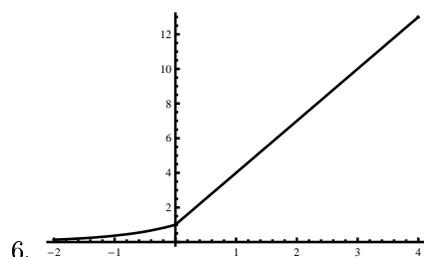
f è iniettiva, suriettiva, monotona crescente, $\text{Im } f = \mathbb{R}$;



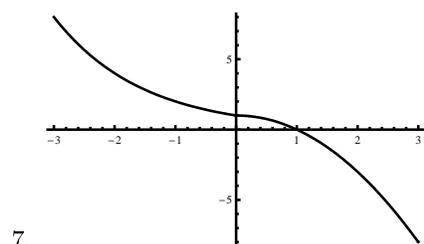
f è iniettiva, suriettiva, monotona crescente, $\text{Im } f = \mathbb{R}$;



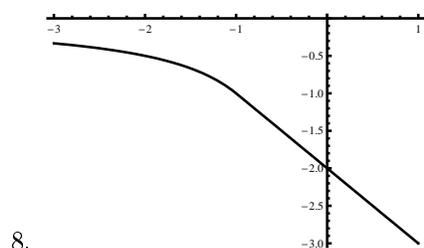
f non è iniettiva, non è suriettiva, né monotona, $\text{Im } f = [0, +\infty)$;



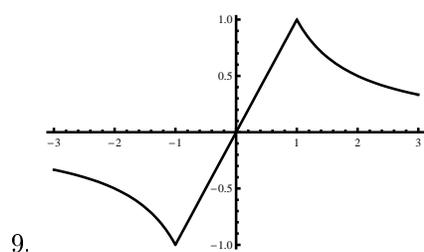
f è iniettiva, non è suriettiva, è monotona crescente, $\text{Im } f = (0, +\infty)$;



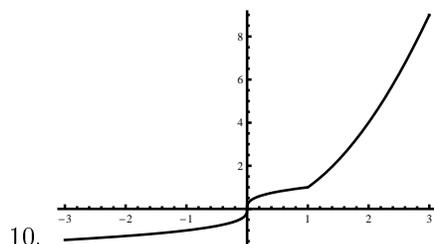
f è iniettiva, suriettiva, monotona decrescente, $\text{Im } f = \mathbb{R}$;



f è iniettiva, non è suriettiva, è monotona decrescente, $\text{Im } f = (-\infty, 0)$;



f non è iniettiva, non è suriettiva, né monotona, $\text{Im } f = [-1, 1]$;



10. f è iniettiva, suriettiva, monotona crescente, $\text{Im } f = \mathbb{R}$;

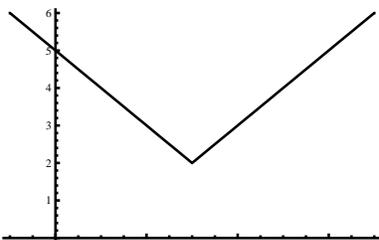
2.5 Trasformazioni di funzioni note

Dopo aver rappresentato graficamente le seguenti funzioni si stabilisca se esse risultano inettive, suriettive sull'insieme \mathbb{R} , invertibili sul loro insieme immagine.

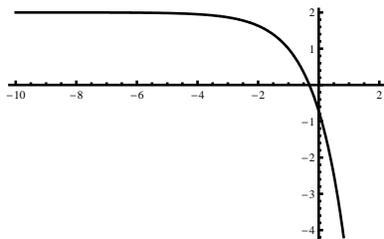
1. $f(x) = |x - 3| + 2$;
2. $f(x) = 2 - e^{x+1}$;
3. $f(x) = 1 - |x^2 - 1|$;
4. $f(x) = 2^{|x|-1}$;
5. $f(x) = (x + 2)^3$;
6. $f(x) = |\ln(1 - x)|$;
7. $f(x) = \min \{0, 1 - |x|\}$;
8. $f(x) = \max \{e^{-x}, x^3 + 1\}$;
9. $f(x) = \min \{e^x - 1, |x|\}$;
10. $f(x) = 2 - \ln(x + 3)$;
11. $f(x) = \max \{x - x^2, 0\}$;
12. $f(x) = |1 - e^{x+1}|$;
13. $f(x) = \ln(|x| - 2)$;
14. $f(x) = \ln(|x| + 2)$;
15. $f(x) = |2|x| - 4|$
16. $f(x) = |(x - 3)^3 + 1|$;
17. $f(x) = \max \{2 - \sqrt{|x|}, 3x + 2\}$;
18. $f(x) = \min \{2 - \sqrt{|x|}, 3x + 2\}$;

19. $f(x) = -2 - \frac{1}{3|x|}$;

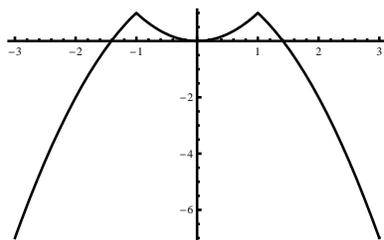
20. $f(x) = 1 + |\sin x|$;

Soluzioni

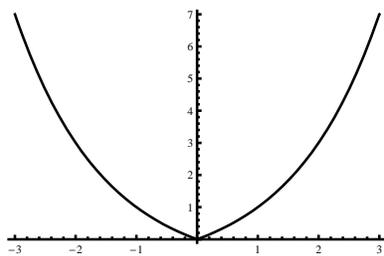
1. f non è iniettiva quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [2, +\infty)$;



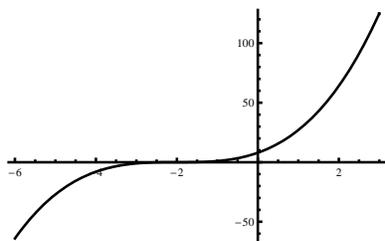
2. f è iniettiva e quindi invertibile su $\text{Im } f = (-\infty, 2)$, non è suriettiva;



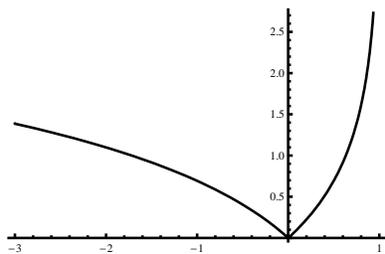
3. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = (-\infty, 1]$;



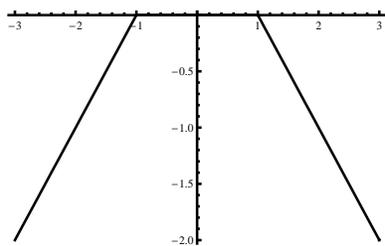
4. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [\frac{1}{2}, +\infty)$;



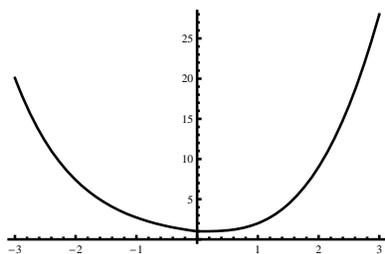
5. f è iniettiva e invertibile su $\text{Im } f = \mathbb{R}$, è quindi suriettiva;



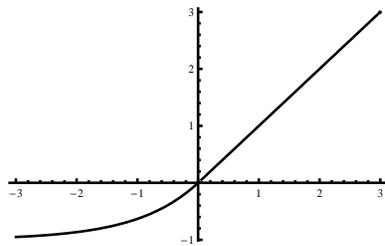
6. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [0, +\infty)$;



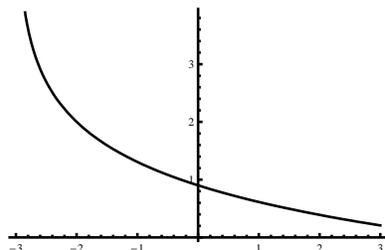
7. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = (-\infty, 0]$;



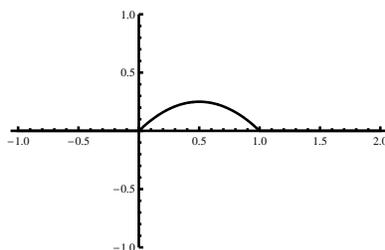
8. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [1, +\infty)$;



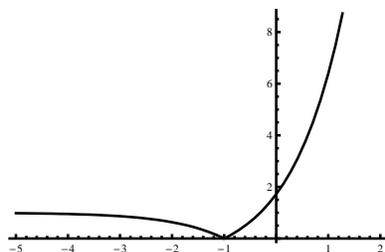
9. f è iniettiva e quindi invertibile su $\text{Im } f = (-1, +\infty)$, non è suriettiva;



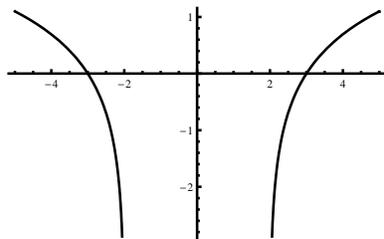
10. f è iniettiva e invertibile su $\text{Im } f = \mathbb{R}$, è quindi suriettiva;



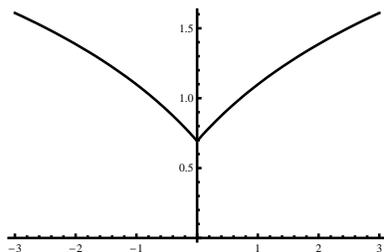
11. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [0, \frac{1}{4}]$;



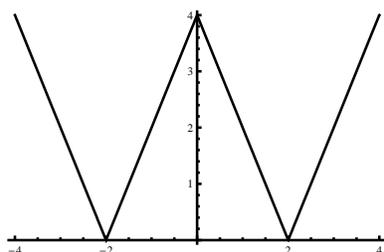
12. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [0, +\infty)$;



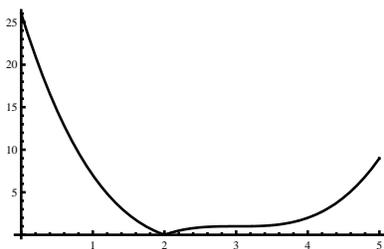
13. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, è suriettiva e $\text{Im } f = \mathbb{R}$;



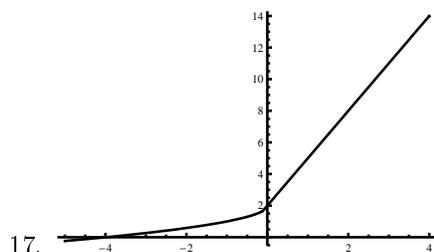
14. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [\ln 2, +\infty)$;



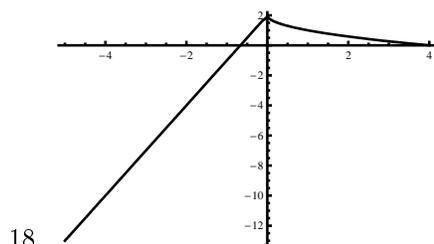
15. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [0, +\infty)$;



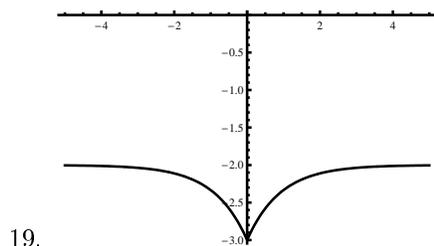
16. f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [0, +\infty)$;



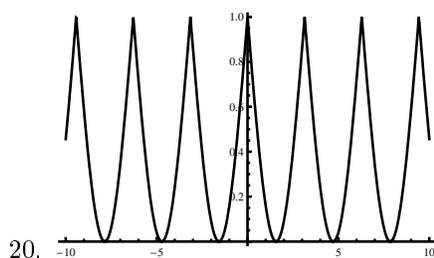
f è iniettiva e invertibile su $\text{Im } f = \mathbb{R}$, è quindi suriettiva;



f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = (-\infty, 2)$;



f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [-3, -2)$;



f non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e $\text{Im } f = [1, 2)$;

2.6 Dominio di una funzione

Si determini il dominio delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$;

2. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$;
3. $f(x) = \frac{x^2}{|x+4|}$;
4. $f(x) = \sqrt{3-x^2}$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$;
6. $f(x) = \sqrt{1+|x|}$;
7. $f(x) = \sqrt{|x|-2}$;
8. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$;
9. $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$;
10. $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$;
11. $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$;
12. $f(x) = \frac{3+2x}{e^x-2}$;
13. $f(x) = (x^2+x)e^{\frac{1}{x^2}}$;
14. $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$;
15. $f(x) = \ln|2x-5|$;
16. $f(x) = \frac{\ln x}{2\ln x-1}$;
17. $f(x) = \frac{x^2}{\ln^2 x + \ln x}$;
18. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$;
19. $f(x) = \sqrt{\cos x}$;
20. $f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$;
21. $f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$;
22. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;
23. $f(x) = \ln(x-x^2)$;
24. $f(x) = e^{\sqrt[3]{1-3x}}$;
25. $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{|x|}}$;
26. $f(x) = \sqrt{\ln x}$;
27. $f(x) = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^x$;

28. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$

29. $f(x) = \ln(x - \sqrt{4 + 3x});$

30. $f(x) = \sqrt{1 - \sin x};$

31. $f(x) = \ln(1 - |\cos x|);$

Soluzioni

1. $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty);$

2. $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty);$

3. $D_f = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty);$

4. $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}];$

5. $D_f = \mathbb{R};$

6. $D_f = \mathbb{R};$

7. $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty);$

8. $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty);$

9. $D_f = \mathbb{R};$

10. $D_f = [1, +\infty);$

11. $D_f = \mathbb{R};$

12. $D_f = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty);$

13. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$

14. $D_f = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty);$

15. $D_f = (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty);$

16. $D_f = (-\infty, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty);$

17. $D_f = (-\infty, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 1) \cup (1, +\infty);$

18. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi);$

19. $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}];$

20. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}];$

21. $D_f = \mathbb{R};$

22. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
23. $D_f = (0, 1)$;
24. $D_f = \mathbb{R}$;
25. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$;
26. $D_f = (1, +\infty)$;
27. $D_f = (-1, 0) \cup (0, 1)$;
28. $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
29. $D_f = (4, +\infty)$;
30. $D_f = \mathbb{R}$;
31. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$;

Date le funzioni $f(x) = \sqrt{x} - 1$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = \ln x$ e $z(x) = e^{x+1}$.
Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1. $\frac{h(x)}{f(x)}$;
2. $\frac{z(x)}{h(x)}$;
3. $z \circ f(x)$;
4. $f \circ z(x)$;
5. $h \circ f(x)$;
6. $f \circ h(x)$;
7. $f \circ g(x)$;

Soluzioni

1. $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$;
2. $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$;
3. $D_f = [0, +\infty)$;
4. $D_f = \mathbb{R}$;
5. $D_f = (1, +\infty)$;
6. $D_f = [1, +\infty)$;
7. $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$;