Esercizi relativi al capitolo 5

5.1 Derivate

5.1.1 Funzioni derivabili

1. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 2k & x \geq 1 \\ 2x^2 + kx & x < 1 \end{cases}$$
stabilire il valore di k per cui la funzione risulti continua ed in corrispondenza di tale valore si studi, utilizzando la definizione di derivata, la derivabilità della funzione nel punto $x_0 = 1$ di scissione della legge;

2. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \ln(x + k) & x > 1 \\ 2(\sqrt{x} - 1) & x \leq 1 \end{cases}$$
stabilire il valore di k per cui la funzione risulti continua ed in corrispondenza di tale valore si studi, utilizzando la definizione di derivata, la derivabilità della funzione nel punto $x_0 = 1$ di scissione della legge;

3. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x > 0 \\ \sqrt[3]{x + k} & x \leq 0 \end{cases}$$
stabilire il valore di k per cui la funzione risulti continua ed in corrispondenza di tale valore si studi, utilizzando la definizione di derivata, la derivabilità della funzione nel punto $x_0 = 0$ di scissione della legge;

4. Data la funzione$f(x) = \min\left\{|x|, -x^3\right\}$, si dica se essa risulta iniettiva, suriettiva, continua e, utilizzando la definizione di derivata, se ne studi la derivabilità della funzione nel punto $x_0 = -1$ di scissione della legge.

Soluzioni

1. $k = 1$,in $x_0 = 1$ la funzione ha un punto angoloso;
2. $k = 0$,in $x_0 = 1$ la funzione è derivabile e $f'(x_0) = 1$;
3. $k = 0$,in $x_0 = 0$ la funzione ha un punto di cuspide;
4. $k = 1$,in $x_0 = -1$ la funzione ha un punto angoloso;

5.1.2 Calcolo di derivate

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = e^x + \sqrt{x}$;
2. $f(x) = \ln x + 2x^3$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 2x + 4)$;

4. $f(x) = \ln x(1 - 3x^2)$;
5. $f(x) = (x + x^4)\sin x$;
6. $f(x) = (e^x + 5x)^3$;
7. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+2x}{x^2-1}$;
8. $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2}$;
9. $f(x) = \frac{2+x}{3x^2+1}$;
10. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x+1}$;
11. $f(x) = \frac{2}{x} + \sin x$;
12. $f(x) = \frac{e^x}{x} + \ln x$;
13. $f(x) = \frac{e^x+1}{\cos x}$;
14. $f(x) = \frac{4}{\sin x}$;
15. $f(x) = \frac{2}{1+\ln x}$;
16. $f(x) = \ln \frac{x}{1+x}$;
17. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$;
18. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$;
19. $f(x) = \sqrt{x + 2}(3 - 2x^3)$;
20. $f(x) = (e^x + 2x)x^2$;
21. $f(x) = \cos x(x - x^2)$;
22. $f(x) = x\sqrt{x^2 - x^4}$;
23. $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}}$;
24. $f(x) = \ln \frac{x^2}{2-x}$;
25. $f(x) = \frac{1}{x+\tan x}$;
26. $f(x) = \sqrt{\frac{3x^2-2x}{1+5x}}$;
27. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$;
28. $f(x) = 2 - \frac{1}{\sin x}$;
29. $f(x) = \ln \sqrt[3]{1 - x}$;

30. $f(x) = \sqrt{2x + \mathrm{ln}x}$;
31. $f(x) = e^{2+\sqrt{x}}$;
32. $f(x) = \mathrm{ln}\frac{1}{2x^2+\sqrt{x}}$;
33. $f(x) = \frac{\mathrm{ln}(x-1)}{x+1}$
34. $f(x) = e^{x^2 \mathrm{cos}x}$;
35. $f(x) = e^{3+\sqrt{2+3x^2}}$;
36. $f(x) = e^{2+\frac{1}{x^2}}$;
37. $f(x) = \frac{\mathrm{sin}x+1}{\mathrm{cos}x+1}$;
38. $f(x) = \mathrm{sin}(\mathrm{sin}x)$;
39. $f(x) = (2\mathrm{x} + \mathrm{ln}x)^4$;
40. $f(x) = \sqrt{x}\mathrm{ln}(1 + x)$;
41. $f(x) = 3\sqrt{x} + 2x^3 + \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{2}$;
42. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 3x}$;
43. $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{sin}x} - 2\sqrt{\mathrm{cos}x}$;
44. $f(x) = x^2 e^{\sqrt{\mathrm{sin}x}}$;
45. $f(x) = \frac{e^{x+2}+1}{e^{1-3x}-4}$;
46. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\mathrm{ln}x}$;
47. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} e^{1-x^2}$;
48. $f(x) = \sqrt{\mathrm{sin}x + \mathrm{cos}x}$;
49. $f(x) = \mathrm{cos}x e^{-x}$;
50. $f(x) = \frac{2x+3\sqrt{x}}{e^x+x}$.

Soluzioni

1. $f'(x) = e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
2. $f'(x) = \frac{1}{x} + 6x^2$;
3. $f'(x) = \sqrt[3]{x}(2x - 2) + \frac{4-2x+x^2}{3\sqrt[3]{x^2}}$;
4. $f'(x) = \frac{1-3x^2}{x} - 6x\mathrm{ln}x$;

5. $f'(x) = \left(x + x^4\right) \cos x + \left(1 + 4x^3\right) \sin x;$

6. $f'(x) = 3\left(5 + e^x\right)\left(e^x + 5x\right)^2;$

7. $f'(x) = \frac{(4\sqrt{x}+1)}{2x^2\sqrt{x}} - \frac{2(\sqrt{x}+2x)}{x^3};$

8. $f'(x) = \frac{1+3x^2}{x^2} - \frac{2\left(x+x^3\right)}{x^3};$

9. $f'(x) = -\frac{6x(2+x)}{(1+3x^2)^2} + \frac{1}{(1+3x^2)};$

10. $f'(x) = \frac{\cos x}{\cos x+1} + \frac{\sin^2 x}{(\cos x+1)^2};$

11. $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \cos x;$

12. $f'(x) = -\frac{e^x}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{e^x}{x};$

13. $f'(x) = \frac{e^x}{\cos x} + \frac{(1+e^x)\sin x}{\cos^2 x};$

14. $f'(x) = -4\frac{\cos x}{\sin^2 x};$

15. $f'(x) = -\frac{2}{x(1+\ln x)^2};$

16. $f'(x) = \frac{1+x}{x}\left(-\frac{x}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\right);$

17. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}};$

18. $f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}};$

19. $f'(x) = -6x^2\sqrt{2+x} + \frac{3-2x^3}{2\sqrt{2+x}};$

20. $f'(x) = \left(2 + e^x\right)x^2 + 2x\left(e^x + 2x\right);$

21. $f'(x) = (1 - 2x)\cos x - (x - x^2)\sin x;$

22. $f'(x) = \frac{x\left(2x-4x^3\right)}{2\sqrt{x^2-x^4}} + \sqrt{x^2 - x^4};$

23. $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^4 x}};$

24. $f'(x) = \frac{(2-x)}{x^2}\left(\frac{2x}{2-x} + \frac{x^2}{(2-x)^2}\right);$

25. $f'(x) = -\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x(x+\tan x)^2};$

26. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+5x}{-2x+3x^2}}\left(\frac{-2+6x}{1+5x} - \frac{5\left(-2x+3x^2\right)}{(1+5x)^2}\right);$

27. $f'(x) = -\frac{3+2x}{2(3x+x^2)^{3/2}};$

28. $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x};$

29. $f'(x) = -\frac{1}{3(1-x)}$;

30. $f'(x) = \frac{2x+1}{2x\sqrt{2x+\ln x}}$;

31. $f'(x) = \frac{e^{2+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$;

32. $f'(x) = \frac{1+2x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+x^2)}$;

33. $f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)} - \frac{\ln(x-1)}{(1+x)^2}$;

34. $f'(x) = e^{x^2\cos x}\left(2x\cos x - x^2\sin x\right)$;

35. $f'(x) = \frac{3e^{3+\sqrt{2+3x^2}}x}{\sqrt{2+3x^2}}$;

36. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{2+\frac{1}{x^2}}$;

37. $f'(x) = \frac{\cos x}{1+\cos x} + \frac{\sin x(1+\sin x)}{(1+\cos x)^2}$;

38. $f'(x) = \cos x\cos(\sin x)$;

39. $f'(x) = 4\left(2+\frac{1}{x}\right)(2x+\ln x)^3$;

40. $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}}$;

41. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{e^{1+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} + 6x^2$;

42. $f'(x) = \frac{-3+2x}{3\sqrt[3]{(-3x+x^2)^2}}$;

43. $f'(x) = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}} + 2\sin x$;

44. $f'(x) = 2xe^{\sqrt{\sin x}} + x^2\frac{e^{\sqrt{\sin x}}\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$;

45. $f'(x) = \frac{e^{2+x}}{-4+e^{1-3x}} + \frac{3e^{1-3x}\left(1+e^{2+x}\right)}{(-4+e^{1-3x})^2}$;

46. $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}\ln^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}\ln x}$;

47. $f'(x) = \frac{3e^{1-x^2}x^2}{4\sqrt[4]{x^3}} - 2x\sqrt[4]{x^3}e^{1-x^2}$;

48. $f'(x) = \frac{\cos x-\sin x}{2\sqrt{\cos x+\sin x}}$;

49. $f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$;

50. $f'(x) = \left(2+\frac{3}{2\sqrt{x}}\right)(e^x+x) + (1+e^x)(3\sqrt{x}+2x)$.

5.1.3 Retta tangente

Si determini l'equazione della retta tangente in x_0 al grafico delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = 2x^3 + x$ in $x_0 = -1$;
2. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ in $x_0 = 1$;
3. $f(x) = 1 + e^{-x}$ in $x_0 = 0$;
4. $f(x) = \frac{\ln(x+4)}{3}$ in $x_0 = -3$;
5. $f(x) = \sqrt{2x}$ in $x_0 = \frac{1}{2}$;
6. $f(x) = 2cosx$ in $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Soluzioni

1. $y = 7x + 4$;
2. $y = 6 - 4x$;
3. $y = 2 - x$;
4. $y = \frac{x}{3} + 1$;
5. $y = x + \frac{1}{2}$;
6. $y = \pi - 2x$.

5.1.4 Punti di non derivabilità

Si stabilisca se le seguenti funzioni siano derivabili su tutto il dominio e si classifichino gli eventuali punti di non derivabilità:

1. $f(x) = \sqrt{|1-x|}$;
2. $f(x) = |\mathrm{sin}x|$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{ln}x}$;
4. $f(x) = |\frac{x^2-1}{x^2}|$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{|x+4|}$;
6. $f(x) = |x-2|\ln(x-1)$;
7. $f(x) = \begin{cases} x^2\mathrm{sin}\frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$;
8. $f(x) = \begin{cases} e^{3x} + 1 & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$;
9. $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sinx} & x > 0 \\ \ln(x+1) & x \leq 0 \end{cases}$.

Soluzioni

1. $x_0 = 1$ è un punto di cuspide;
2. $x_0 = k\pi$con $k \in \mathbb{Z}$ è un punto angoloso;
3. $x_0 = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale;
4. $x_0 = 1$ e $x_0 = -1$ sono punti angolosi;
5. $x_0 = -4$ è un punto di cuspide;
6. f è derivabile ovunque nel dominio;
7. f è derivabile ovunque nel dominio;
8. $x_0 = 0$ è un punto angoloso;
9. f è derivabile ovunque nel dominio.

5.1.5 Differenziale

Si determini, facendo uso del differenziale, il valore approssimato delle seguenti espressioni:

1. $\sqrt{48}$;
2. $\sqrt[4]{e}$;
3. $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$;
4. $e^{0.1}$;
5. $\ln(1.019)$;
6. $\ln(0.8)$.

Soluzioni

1. 6.92;
2. 1.2;
3. 0.8;
4. 1.10;
5. 0.01;
6. -0.2.

5.1.6 Polinomio di Taylor e di McLaurin

Determinare il polinomio di Taylor o di McLaurin di ordine 3 delle seguenti funzioni:

1. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ in $x_0=1$;
2. $f(x)=x\sin x$ in $x_0=0$;
3. $f(x)=e^{\sin x}$ in $x_0=0$;

Soluzioni

1. $T_3(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{4}(x-1)^2$;
2. $T_3(x)=x^2$;
3. $T_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$.

Calcolare, utilizzando la formula di McLaurin arrestata all'ordine 5 il valore approssimato delle seguenti espressioni:

1. $\sqrt{e}$;
2. $\ln\frac{2}{3}$.

Soluzioni

1. 1.6487;
2. -0.4051.

5.2.1 Teoremi del valor medio

1. Si stabilisca se la funzione $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1,1]$ e, in caso affermativo, si determinino i punti per cui è verificata la tesi;
2. Si stabilisca se la funzione $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[2,3]$ e, in caso affermativo, si determinino i punti per cui è verificata la tesi;
3. Si stabilisca se la funzione $f(x)=x^4-x^3$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[0,1]$ e, in caso affermativo, si determinino i punti per cui è verificata la tesi;
4. Si stabilisca se la funzione $f(x)=|1-\ln x|$ verifica le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[1,3]$ e, in caso affermativo, si determinino i punti per cui è verificata la tesi.

Soluzioni

1. La funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle e la tesi è verificata per $c=0$;
2. La funzione verifica le ipotesi del teorema di Lagrange e la tesi è verificata per $c=\frac{35}{27}$;

3. La funzione verifica le ipotesi del teorema di Rolle e la tesi è verificata per $c = \frac{3}{4}$;

4. La funzione non verifica le ipotesi del teorema di Lagrange.

5.2.2 Massimi e minimi relativi

Determinare gli eventuali punti di massimo o minimo relativo dopo aver individuato gli intervalli di monotonia delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = x^3 - 3x$;
2. $f(x) = \frac{2}{x-3}$;
3. $f(x) = x\ln x$;
4. $f(x) = 2|x| - |x-1|$;
5. $f(x) = e^{\frac{x^2}{x+1}}$;
6. $f(x) = x - \sqrt{x-1}$;
7. $f(x) = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$;
8. $f(x) = \left(x^2 - 8\right) e^x$;
9. $f(x) = \ln(\sqrt{x} - x)$;
10. $f(x) = x^2(2 - \ln x)$.

Soluzioni

1. $x = -1$ è un punto di massimo relativo, $x = 1$ è un punto di minimo relativo;
2. f è decrescente su ogni intervallo nel suo dominio;
3. $x = \frac{1}{e}$ è un punto di minimo relativo;
4. $x = 0$ è un punto di minimo relativo;
5. $x = -2$ è un punto di massimo relativo, $x = 0$ è un punto di minimo relativo;
6. $x = \frac{5}{4}$ è un punto di minimo relativo;
7. $x = -1$ è un punto di massimo relativo, $x = -\frac{3}{5}$ è un punto di minimo relativo;
8. $x = -4$ è un punto di massimo relativo, $x = 2$ è un punto di minimo relativo;
9. $x = \frac{1}{4}$ è un punto di massimo relativo;

10. $x=\sqrt{e^3}$ è un punto di massimo relativo.

5.2.3 Concavità, convessità e punti di flesso

Dopo aver studiato la concavità delle seguenti funzioni, se ne determinino gli eventuali punti di flesso:

1. $f(x)=\frac{x^3+8}{x}$;
2. $f(x)=(x-2)e^x$;
3. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$;
4. $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Soluzioni

1. $x=-2$;
2. $x=0$;
3. $x=\frac{1}{e^2}$;
4. f è sempre concava quindi non ammette punti di flesso.

5.2.3 Studio di funzione

Studiare le seguenti funzioni e rappresentarle graficamente:

1. $f(x)=x^2(x^2-2)$;
2. $f(x)=\frac{x^2-3}{x-2}$;
3. $f(x)=x^3e^{-x^2}$;
4. $f(x)=\frac{x}{\ln x}$;
5. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x}}$;
6. $f(x)=\frac{|x+1|}{x-1}$;
7. $f(x)=e^{\frac{x^2}{x+2}}$;
8. $f(x)=\sqrt{x}\ln x$;
9. $f(x)=\ln\frac{2+x}{2-x}$;
10. $f(x)=e^x\sqrt{2-x}$;
11. $f(x)=\frac{x^2-1}{e^x}$;
12. $f(x)=\frac{x^2}{|x+1|}$;

13. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$;

14. $f(x) = \frac{1}{e^x |x+1|}$;

15. $f(x) = \frac{2+\ln x}{\ln x}$;

16. $f(x) = x(1 + 2\ln x)$;

17. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}|2 + x|$;

18. $f(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{x}}$;

19. $f(x) = x + \sqrt{2 - x}$;

20. $f(x) = \cos^2 x - \cos x$;

21. $f(x) = 2^x - |x|$;

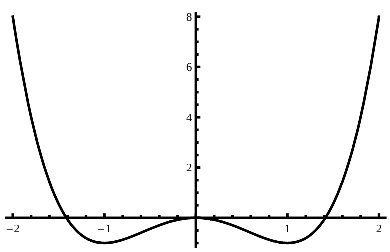
22. $f(x) = (1 + \frac{2}{x})^x$;

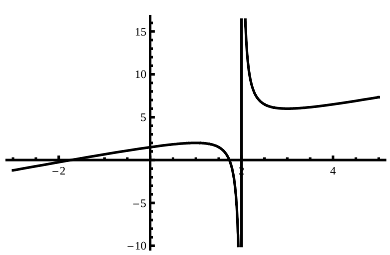
23. $f(x) = e^{2x-|x^2-1|}$;

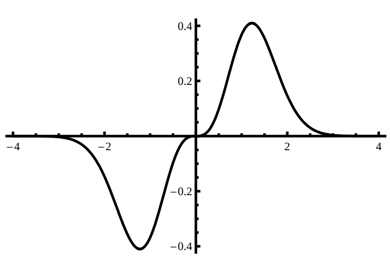
24. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$;

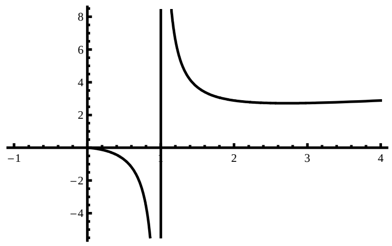
25. $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$;

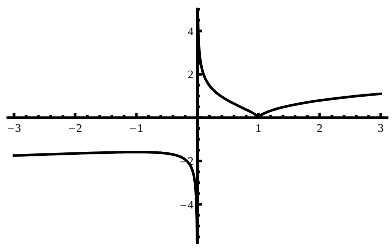
Soluzioni

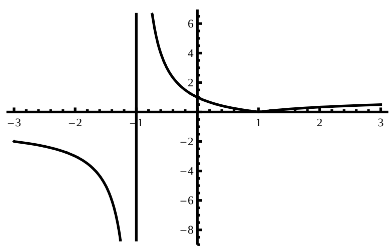
1. 

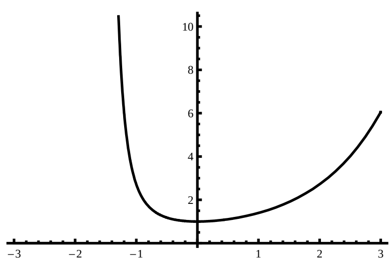
2. 

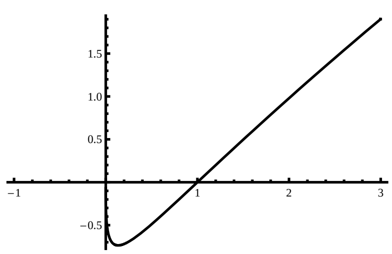
3. 

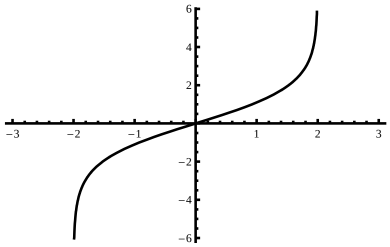
4. 
8
6
4
2
−2
−4
−1
2
3
4

5. 
4
2
−2
−4
−3
−2
−1
1
2
3

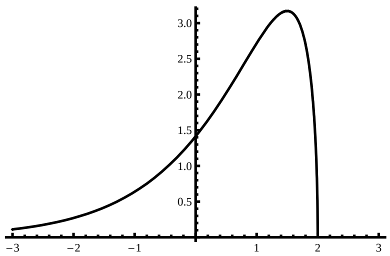
6. 
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−3
−2
−1
1
2
3

7. 
10
8
6
4
2
−3
−2
−1
1
2
3

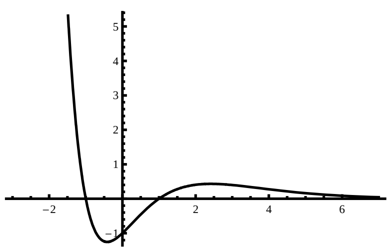
8. 
1.5
1.0
0.5
−0.5
−1
1
2
3


6
4
2
−3 −2 −1 1 2 3
−2
−4
−6

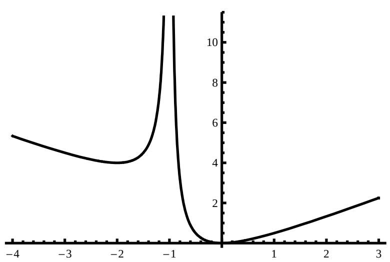
9.


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−3 −2 −1 1 2 3

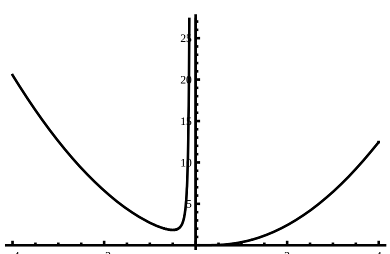
10.


5
4
3
2
1
−2 2 4 6
−1

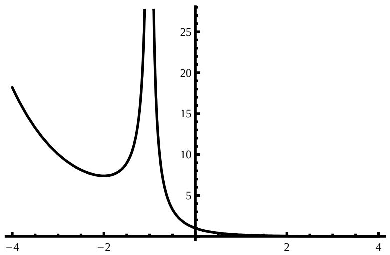
11.

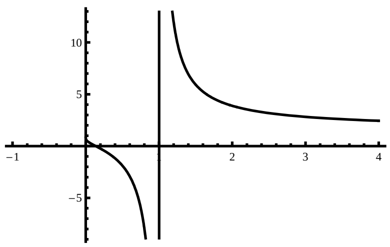

10
8
6
4
2
−4 −3 −2 −1 1 2 3

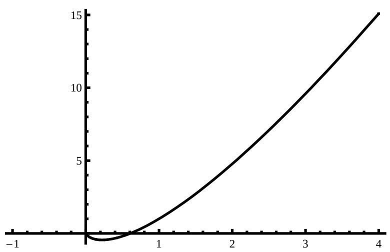
12.

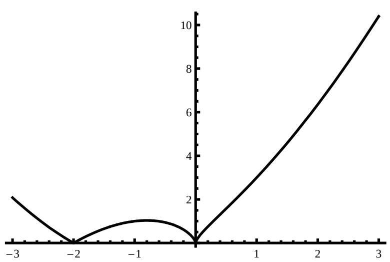

−4 −2 2 4

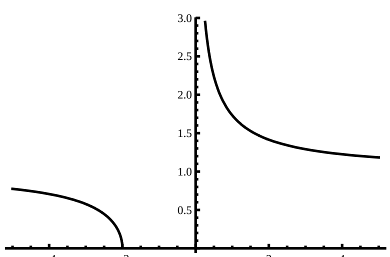
13.

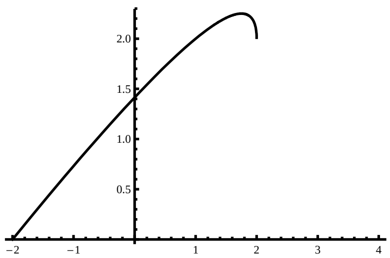
14. 
25
20
15
10
5
−4
−2
2
4

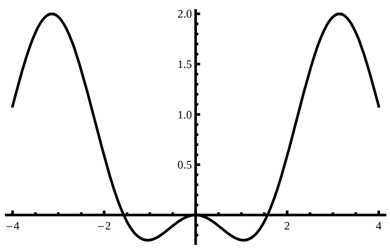
15. 
10
5
−5
−1
2
3
4

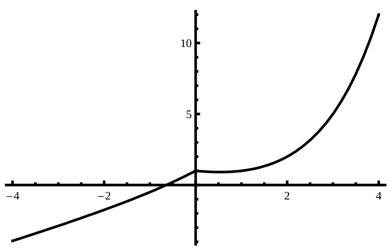
16. 
15
10
5
−1
1
2
3
4

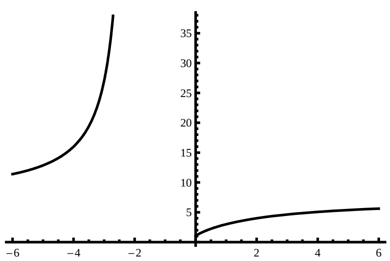
17. 
10
8
6
4
2
−3
−2
−1
1
2
3

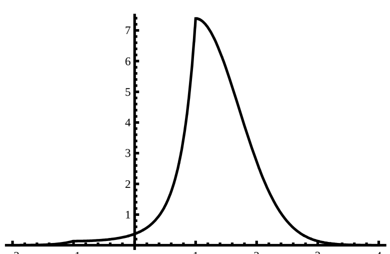
18. 
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
−4
−2
2
4

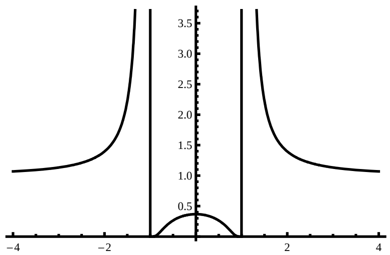
19.

2.0
1.5
1.0
0.5
−2
−1
1
2
3
4

20.

2.0
1.5
1.0
0.5
−4
−2
2
4

21.

10
5
−4
−2
2
4

22.

35
30
25
20
15
10
5
−6
−4
−2
2
4
6

23.

7
6
5
4
3
2
1
−2
−1
1
2
3
4

24. 

25.