Appunti di Algebra Lineare

Indice

Capitolo 1

I vettori geometrici.

1.1 Introduzione.

Siano A, B due punti del piano (o dello spazio). Un segmento orientato AB si dice anche vettore applicato in A ed é individuato da una direzione, che é la retta su cui giace il segmento AB, un verso, che é quello che si osserva percorrendo il segmento AB andando da A verso B, ed un modulo, che é il numero reale non negativo che misura la lunghezza del segmento AB. Un vettore é detto versore di una retta, se giace su tale retta ed é di modulo 1. Due segmenti orientati AB e $A'B'$ sono equipollenti se hanno la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo. Tale relazione tra segmenti é una equivalenza nell'insieme di tutti i segmenti orientati del piano (o dello spazio). Per cui tutti i segmenti orientati sono ripartiti in classi di equivalenza. Un classe di equivalenza é del tipo $[AB]$, composta da tutti i segmenti orientati equipollenti al segmento AB. Identifichiamo tra loro tutti i segmenti appartenenti ad una stessa classe di equivalenza. Ciascuna classe é detta vettore geometrico o vettore libero e puó essere rappresentata da un qualsiasi segmento ad essa appartenente. Ció vuol dire che, fissato un punto del piano (o dello spazio) O , ciascuna classe di equivalenza possiede un rappresentante che sia applicato in O.

Si noti che da ora in avanti, fissato un punto O, ciascun vettore geometrico puó essere applicato in O, mantenedo la sua direzione ed il suo verso.

1.2 Somma e prodotto per uno scalare.

Siano OP e OP_1 due vettori aventi la stessa direzione e stesso verso. Definiamo somma dei vettori $OP + OP_1$, il vettore avente per direzione e verso quelli dei vettori addendi, e per modulo $|OP + OP_1|$ la somma dei moduli $|OP| + |OP_1|$.

Siano ora OP e OP_1 due vettori aventi stessa direzione ma verso opposto. Definiamo somma dei vettori $OP + OP_1$ il vettore avente direzione dei vettori addendi, verso coincidente con quello del vettore addendo di modulo maggiore, e modulo pari al valore assoluto della differenza dei moduli dei vettori addendi.

Siano infine OP e OP_1 due vettori con direzioni differenti. Si costruisca il parallelogramma di lati OP e OP_1 e si indichi con Q il quarto vertice del parallelogramma. Definiamo somma $OP+OP_1$ il vettore avente per direzione quella della retta su cui giace la diagonale OQ, per verso quello di percorrenza da O a Q e per modulo la lunghezza della diagonale OQ del parallelogramma (Figura 1).

Notiamo anche che dalla definizione di somma $OP + OP_1 = OQ$ si ricava al contrario anche quella di differenza tra due vettori $OQ - OP = OP_1$, come lato del parallelogramma avente per diagonale OQ e per secondo lato OP (Figura 1).

Indichiamo piú semplicemente v, v_1, v_2, v_3 vettori del piano (o dello spazio). La somma tra vettori gode delle seguenti proprietá:

1) Commutativa: $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$;

2) Associativa : $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$;

3) Esistenza dell'elemento neutro : $v + 0 = 0 + v = v$, dove per vettore 0 si intende il segmento OO;

4) Esistenza dell'elemento opposto : $v + (-v) = 0$.

Le proprietá 1)-2)-3)-4) rendono l'insieme dei vettori geometrici del piano (o dello spazio), rispetto all'operazione di somma, un gruppo commutativo.

Siano v un vettore e $\alpha \in \Re$. Definiamo il vettore αv come quello avente la direzione del vettore v, il modulo pari a $|\alpha||v|$ e verso coincidente con quello di v, se $\alpha > 0$, opposto a quello di v, se $\alpha < 0$.

Il prodotto cosí definito gode delle seguenti proprietá:

1) $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$, per $\alpha, \beta \in \Re$;

2) $1 \cdot v = v$, dove 1 é l'unitá in $\Re$;

3) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$;

4) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$.

L'insieme di tutti i vettori geometrici, rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare da noi definite, viene detto spazio vettoriale geometrico.

1.3 Combinazioni lineari e componenti in un riferimento ortogonale.

Siano $v_1, v_2, .., v_r$ vettori e $\alpha_1, ..., \alpha_r \in \Re$. Diciamo combinazione lineare dei vettori $v_1, .., v_r$ a coefficienti reali $\alpha_1, .., \alpha_r$ il vettore v risultante dalla seguente somma:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + ... + \alpha_r v_r.$$

Diremo anche che il vettore v é scomposto nella somma dei vettori $\alpha_1 v_1$, $\alpha_2 v_2$,...,$\alpha_r v_r$ e che $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sono le componenti del vettore v rispetto ai vettori $v_1, ..., v_r$.

Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nello spazio, di origine O e assi coordinati X, Y, Z. Un qualsiasi punto dello spazio sará individuato da un terna di numeri reali (a, b, c), che sono le sue coordinate rispetto al sistema di riferimento. Il vettore $v = OP$ ha come componenti rispetto ai tre assi coordinati, rispettivamente $v_x = a, v_y = b, v_z = c$, cioé il vettore v si puó esprimere come combinazione lineare dei tre versori i, j, k dei tre assi coordinati nel modo seguente: $v = v_x i + v_y j + v_z k$ (Figura 2).

Diremo che due vettori $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$ sono uguali se e solo se hanno le stesse componenti rispetto ai versori degli assi coordinati.

Dalla definizione di componenti appena data e applicando il Teorma di Pitagora, si puó facilmente dedurre che il modulo di un vettore v di componenti (v_x, v_y, v_z) é dato da $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Siano ora $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$ due distinti vettori. Costruiamo la loro somma $v + w = (v_x i + v_y j + v_z k) + (w_x i + w_y j + w_z k) = (v_x + w_x)i + (v_y + w_y)j + (v_z + w_z)k$ cioé $v + w$ ha componenti $(v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z)$.

In modo del tutto analogo si osservi che se $\alpha \in \Re$, allora il vettore αv ha per componenti la terna $(\alpha v_x, \alpha v_y, \alpha v_z)$.

1.4 Prodotto scalare e proiezione su una retta.

Siano $v = OP$ e $w = OQ$. Per convenzione si definisce angolo φ compreso tra i due vettori quello interno al triangolo POQ (Figura 3).

Si definisce prodotto scalare il seguente

$$v \times w = |v| \cdot |w| \cdot cos(\varphi).$$

Si noti che tale prodotto ha come risultato uno scalare (un numero reale), inoltre esso é commutativo, cioé $v \times w = w \times v$ ed infine esso é nullo solo quando uno dei due vettori é nullo oppure se i due vettori sono tra loro ortogonali.

Nel caso i due vettori siano considerati in uno spazio dotato di riferimento cartesiano, allora $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$, ed il prodotto scalare si presenta nella seguente forma:

$$v \times w = (v_x i + v_y j + v_z k) \times (w_x i + w_y j + w_z k) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z.$$

Da quest'ultima ricaviamo anche che:

$$cos(\varphi) = \frac{v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}}.$$

Applicando tale formula si ricavano anche i coseni direttori di un vettore v, cioé i coseni degli angoli che il vettore forma con i tre assi coordinati, o meglio con i tre versori dei suddetti assi:

$$cos(vX) = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, cos(vY) = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, cos(vZ) = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}.$$

Siano ora $v = OQ$ e r una retta passante per O di versore u, tale che la direzione del vettore e quella della retta formino un angolo φ (Figura 4). Diciamo componente di v rispetto alla retta r, la lunghezza del segmento OQ', dove Q' é la proiezione ortogonale di Q su r. Applicando ora le regole trigonometriche sulla risoluzione dei triangoli, si osserva facilmente che

$$|OQ'| = |OQ| \cdot cos(\varphi) = v \times u.$$

Diremo invece vettore proiezione v' di v su r, quello avente per modulo $|OQ'|$ e per direzione e verso quelli di u, cioé:

$$v' = |OQ'| \cdot u = (v \times u) \cdot u.$$

Si noti che pur non conoscendo il versore della retta r, esso si puó ricavare se é noto un vettore w parallelo a r. In tal caso $u = \frac{w}{|w|}$ ed otteniamo

$$v' = (v \times \frac{w}{|w|}) \cdot \frac{w}{|w|} = (v \times w) \cdot \frac{w}{|w|^2}.$$

1.5 Prodotto vettoriale e componente rispetto ad un piano.

Siano v, w vettori. Definiamo prodotto vettoriale $v \wedge w$ quel vettore che abbia:

1) direzione ortogonale al piano individuato dai vettori v, w;

2) modulo pari a $|v||w|sen(\varphi)$, dove φ é l'angolo compreso tra i due vettori;

3) verso tale che un osservatore posto dalla parte in cui é rivolto il vettore $v \wedge w$, veda il vettore v sovrapporsi al vettore w in senso antiorario (Figura 5).

Il prodotto vettoriale é nullo solo quando uno dei due vettori é nullo oppure i due vettori sono tra loro paralleli.

Notiamo che in base alla definizione, al contrario di quanto avviene per il prodotto scalare, il prodotto vettoriale é anticommutativo cioé: $v \wedge w = -w \wedge v$. Inoltre il prodotto vettoriale é distributivo rispetto alla somma tra vettori, cioé: $v \wedge (w_1 + w_2) = (v \wedge w_1) + (v \wedge w_2)$.

Consideriamo ora un parallelogramma che abbia come lati i vettori v, w. L'area di tale parallelogramma é $A = b \cdot h$, dove b é la base da noi scelta e h é l'altezza relativa a tale base. Scegliamo ad esempio il vettore v come base (Figura 6). L'altezza relativa a v forma con v e w un triangolo rettangolo, per cui $h = |w|sen(\varphi)$, quindi

$$A = |v||w|sen(\varphi) = |v \wedge w|$$

concludendo che l'area del parallelogramma avente per lati v, w é pari al modulo del prodotto vettoriale $v \wedge w$.

Poniamoci ora nel caso in cui i due vettori appartengano allo spazio cartesiano, per cui $v = (v_x, v_y, v_z)$ e $w = (w_x, w_y, w_z)$. Calcoliamo ora il loro prodotto vettoriale:

$$v \wedge w = (v_x i + v_y j + v_z k) \wedge (w_x i + w_y j + w_z k) =$$

$$i(v_y w_z - v_z w_y) + j(v_z w_x - v_x w_z) + k(v_x w_y - v_y w_x) =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che lo sviluppo della formula precedente dipende dall'applicazione della proprietá distributiva del prodotto vettoriale rispetto alla somma tra vettori ed anche dalle seguenti identitá che derivano direttamente dalla definizione di prodotto vettoriale:

$$i \wedge j = -j \wedge i = k, \quad j \wedge k = -k \wedge j = i, \quad i \wedge k = -k \wedge i = -j$$

$$i \wedge i = 0, \quad j \wedge j = 0, \quad k \wedge k = 0.$$

Dal controesempio che segue si deduce inoltre che per il prodotto vettoriale non vale la proprietá associativa:

$$i \wedge (i \wedge k) = i \wedge (-j) = k$$

ma

$$(i \wedge i) \wedge k = 0.$$

Sia ora $v = OP$ e π un piano passante per O, al quale appartengano i due vettori u_1, u_2. La proiezione di OP su π é il vettore $v' = OP'$, dove P' é la proiezione ortogonale del punto P sul piano. Se indichiamo w il vettore PP' allora otteniamo $v' + w = v$, da cui ovviamente $v' = v - w$ (Figura 7). Per ottenere la proiezione v' é allora sufficiente determinare il vettore w. Tale vettore non é altro che la proiezione di v lungo la retta normale al piano e passante per O. Per ottenere tale proiezione é necessario conoscere il versore u normale al piano e, poiché sappiamo che il vettore $u_1 \wedge u_2$ é normale al piano, deduciamo che $u = \frac{u_1 \wedge u_2}{|u_1 \wedge u_2|}$. Infine otteniamo:

$$w = (v \times u) \cdot u = [v \times (u_1 \wedge u_2)] \cdot \frac{u_1 \wedge u_2}{|u_1 \wedge u_2|^2}.$$

1.6 Prodotto misto.

Siano $u, , v, w$ tre vettori, definiamo prodotto misto quello scalare che si ottiene dall'esecuzione, rispettando l'associazione tramite parentesi, dei prodotti $u \times (v \wedge w)$.

Nel caso i tre vettori siano dati in uno spazio cartesiano ortogonale, allora $u = (u_x, u_y, u_z)$, $v = (v_x, v_y, v_z)$, $w = (w_x, w_y, x_z)$ e svolgendo il prodotto si ottiene:

$$u \times (v \wedge w) = u_x(v \wedge w)_x + u_y(v \wedge w)_y + u_z(v \wedge w)_z =$$

$$u_x \begin{vmatrix} v_y & v_z \\ w_y & w_z \end{vmatrix} + u_y \begin{vmatrix} v_z & v_x \\ w_z & w_x \end{vmatrix} + u_z \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ w_x & w_y \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

Si noti che il prodotto misto si annulla solo quando uno dei tre vettori é nullo oppure quando i tre vettori sono complanari, cioé quando il vettore u é ortogonale al vettore $v \wedge w$.

Consideriamo ora il parallelepipedo avente per spigoli i tre vettori u, v, w. Il volume del parallelepipedo é $V_0 = b \cdot h$, dove indichiamo con b l'area di una base e con h l'altezza relativa a tale base scelta (Figura 8).

Scegliamo come base quella avente per lati i vettori v, w e sappiamo per quanto detto in precedenza che l'area cercata é pari al modulo $|v \wedge w|$.

L'altezza h é la componente ortogonale del terzo spigolo del parallelepipedo lungo la normale al piano individuato da v e w, per cui

$$h = u \times \frac{v \wedge w}{|v \wedge w|}$$

da cui

$$V_0 = |v \wedge w| \cdot u \times \frac{v \wedge w}{|v \wedge w|} = u \times (v \wedge w).$$

Esempio 1.6.1 *Siano $u = i - 2j + 3k$ e $v = -3j$ vettori nello spazio cartesiano. Determinare:*
a) i moduli dei vettori;
b) il loro prodotto scalare;
c) il coseno dell'angolo da essi formato;
d) i coseni direttori dei due vettori.
a) $u \times v$= (-2)(-3)=6;
b) $|u| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$, $|v| = \sqrt{9} = 3$.
c) $cos(\varphi) = \frac{6}{3 \cdot \sqrt{14}} = \sqrt{\frac{2}{7}}$.
d) $u \times i = \frac{1}{\sqrt{14}}$, $u \times j = \frac{-2}{\sqrt{14}}$, $u \times k = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $v \times i = 0$, $v \times j = -1$, $v \times k = 0$.

Esempio 1.6.2 *Determinare* $a \in \Re$ *tale che i vettori* $u = (1, -2, 1)$ *e* $v = (a+1, -a, -1)$ *formino un angolo di* $\frac{\pi}{3}$.

$$\frac{1}{2} = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{u \times v}{|u| \cdot |v|} =$$

$$\frac{a+1+2a-1}{\sqrt{6}\sqrt{a^2+1+2a+a^2+1}} = \frac{3a}{\sqrt{6}\sqrt{2a^2+2a+2}}$$

da cui $2a^2 - a - 1 = 0$ *e* $a \in \{1, -\frac{1}{2}\}$.

Esempio 1.6.3 *Siano* $u = (1, 2, -2)$ *e v=(3,0,1). Determinare la proiezione ortogonale di* v *rispetto alla retta* r *contenente* u.
La proiezione di v *su* r *é data da*

$$v \times \frac{u}{|u|} = \frac{1}{3}.$$

Allora il vettore proiezione é dato da

$$\left(v \times \frac{u}{|u|}\right) \times \frac{u}{|u|} = \frac{1}{9}(i + 2j - 2k).$$

Esempio 1.6.4 *Determinare il vettore* v' *proiezione di* $v = 2i - j + 3k$ *sul piano* XY.
Proiettando v *su* XY *si avrebbe* $v = v' + w$, *dove* w *é il vettore (perpendicolare al piano* XY*) che é proiezione ortogonale di* v *rispetto alla retta contenente* $i \wedge j$, *cioé*

$$w = v \times (i \wedge j) \cdot \frac{i \wedge j}{|i \wedge j|^2} = 3k$$

e $v' = 2i - j$.

Esempio 1.6.5 *Determinare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i vettori* $i+j$, k, $-i+k$.
Il volume é dato da

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

1.7 Esercizi.

Esercizio 1.7.1 *Siano* $u = i-2j+3k$, $v = -3j$ *vettori dello spazio euclideo. Determinare i loro moduli, il loro prodotto scalare, il coseno dell'angolo da essi formato, i loro coseni direttori.*

Esercizio 1.7.2 *Ripetere l'esercizio precedente coi seguenti vettori:* $u = (1, 1, 0)$, $v = (2, 1, 1)$.

Esercizio 1.7.3 *Determinare la proiezione del vettore* $v = i - j + k$ *su una retta parallela al vettore* $w = i + 2j - k$.

Esercizio 1.7.4 *Determinare il parametro* k *tale che i vettori* $(1, -2, 1)$ *e* $(k+1, -k, -1)$ *formino un angolo di* $\frac{\pi}{3}$.

Esercizio 1.7.5 *Determinare la componente e il vettore proiezione di* $v = (3, 0, 1)$ *sulla retta contenente il vettore* $(1, 2, -2)$.

Esercizio 1.7.6 *Determinare la proiezione del vettore* $(1, 2, 1)$ *sulla retta contenente il vettore* $(1, 1, 1)$.

Esercizio 1.7.7 *Determinare la proiezione del vettore* $(1, 1, 1)$ *sul piano contenente i vettori* $(2, 1, 0)$ *e* $(1, 0, 1)$.

Esercizio 1.7.8 *Determinare la proiezione del vettore* $2i - j + 3k$ *sul piano* XY.

Esercizio 1.7.9 *Utilizzare i vettori* $(1, -2, 0)$, $(0, 3, 4)$, $(1, -1, 1)$ *per dimostrare che il prodotto vettoriale non é associativo.*

Esercizio 1.7.10 *Determinare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i vettori* $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *e* $(-1, 0, 1)$.

Esercizio 1.7.11 *I seguenti vettori* $(2, -1, 3)$ *e* $(1, 1, 0)$, *sono reciprocamente paralleli, perpendicolari o nessuna delle due?*

Esercizio 1.7.12 *Determinare se i vettori* $v = 2i - 3j + k$ *e* $w = \frac{5}{3}i - \frac{5}{2}j + \frac{5}{6}k$ *sono paralleli, perpendicolari o nessuna delle due.*

Esercizio 1.7.13 *Determinare* h_1 *e* h_2 *tali che i vettori* $v = 2i+j-3k$ *e* $w = i+h_1j+h_2k$ *risultino paralleli.*

Esercizio 1.7.14 *Determinare il valore del parametro* h *in modo tale che il vettore* $(2, h, 1-h)$ *sia complanare con i vettori* $(1, 2, 1)$ *e* $(3, 1, 5)$.

Esercizio 1.7.15 *Esprimere il vettore* $v = (2, -1, 1)$ *come somma di un vettore* v_1 *parallelo al vettore* $w_1 = (0, 1, 1)$ *e di un vettore* v_2 *complanare coi vettori* $w_2 = (1, 2, 0)$ *e* $w_3 = (2, 0, 1)$.

Esercizio 1.7.16 *Siano* $v_1 = 2i + j$ *e* $v_2 = i + 3j$ *vettori del piano euclideo. Determinare le componenti del versore di* v_1 *e del versore di* v_2 *e l'angolo compreso tra di essi.*

Esercizio 1.7.17 *Siano $v_1 = i + j$ e $v_2 = i - 2j$ vettori del piano. Determinare la componente ortogonale di v_1 secondo una retta parallela e concorde col versore di v_2 ed anche le componenti del vettore proiezione ortogonale di v_1 su tale retta.*

Esercizio 1.7.18 *Dati i vettori $v = i - j + k$ e $w = -2i + k$, determinare il loro prodotto scalare e le componenti del loro prodotto vettoriale.*

Esercizio 1.7.19 *Siano $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 2)$ vettori dello spazio. Determinare le componenti del vettore proiezione ortogonale di v_1 sul piano contenente v_2 e v_3.*

Capitolo 2

Le matrici.

2.1 Introduzione.

Una matrice é un simbolo, una tabella nella quale si possono individuare righe e colonne. Una matrice con m righe e n colonne é un insieme di $m \cdot n$ elementi scelti in un campo (per noi usualmente il campo dei numeri reali), che siano disposti in modo ordinato nelle righe e nelle colonne nel seguente modo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

In altre parole, l'elemento a_{ij} é quello che occupa il posto che é individuato dall'incrocio della riga i e dalla colonna j. Piú sinteticamente scriveremo una matrice col simbolo $A = [a_{ij}]$, $i = 1,..,m$, $j = 1,..n$. Chiameremo matrici quadrate quelle tabelle in cui $m = n$ e le chiameremo matrici di ordine n. In esse individueremo un particolare insieme di elementi: $\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}\}$ detta diagonale principale della matrice. Denoteremo $M_{mn}(\Re)$ l'insieme di tutte le matrici con m righe e n colonne, i cui elementi sono scelti nei reali. Introduciamo in $M_{mn}(\Re)$ una operazione, detta somma tra matrici, nel modo seguente: siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrici in $M_{mn}(\Re)$, la loro somma é ancora una matrice $C = [c_{ij}]$ di $M_{mn}(\Re)$ definita da

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & c_{m2} & ... & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & ... & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & ... & a_{2n}+b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & ... & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

quindi ogni elemento c_{ij} di C é la somma degli elementi omologhi in A e B.

Siano A, B, C matrici di $M_{mn}(\Re)$, rispetto all'operazione di somma sono soddisfatte le seguenti proprietá:

1) $(A + B) + C = A + (B + C)$, proprietá associativa;

2) Esiste l'elemento neutro della somma, cioé la matrice

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

tale che $A + 0 = 0 + A = A$;

3) ogni matrice $A = [a_{ij}]$ possiede l'opposta $B = -A = [-a_{ij}]$, tale che $A + B = 0$;

4) $A + B = B + A$, proprietá commutativa.

Siano ora $\alpha \in \Re$ e $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\Re)$. Moltiplicare lo scalare α per la matrice A vuol dire moltiplicarlo per ogni elemento di A ottenendo cosí la matrice $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$.

2.2 Prodotto righe per colonne.

Consideriamo ora due matrici $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\Re)$ e $B = [b_{ij}] \in M_{nq}(\Re)$. Si definisce prodotto righe per colonne di A e B quella operazione che abbia come risultato la matrice $C = [c_{ij}] \in M_{mq}(\Re)$, tale che l'elemento di posto (r, s) di C sia uguale a

$$c_{rs} = \sum_{k=1}^{n} a_{rk}b_{ks} = a_{r1}b_{1s} + a_{r2}b_{2s} + a_{r3}b_{3s} + ... + a_{rn}b_{ns}$$

In sostanza l'elemento c_{rs} é la somma di tutti i prodotti degli elementi della riga r della prima matrice, ciascuno con il corrispondente elemento della colonna s della seconda matrice.

Per esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tale prodotto non é definito se $A \in M_{mn}$ e $B = M_{tq}$ con $n \neq t$.

Il prodotto righe per colonne gode delle seguenti proprietá:

siano $A \in M_{mn}(\Re), B \in M_{nn}(\Re), C \in M_{nt}(\Re)$ e $\alpha \in \Re$.

1) $A(BC) = (AB)C$, associativa;
2) $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, distributiva rispetto alla somma;
3) $\alpha(AB) = A(\alpha B)$.

Inoltre sia $M_n(\Re)$ l'insieme di tutte le matrici quadrate di ordine n. Esiste una matrice $I \in M_n(\Re)$ che si comporta come elemento neutro per il prodotto righe per colonne, cioé per ogni $A \in M_n(\Re)$ si ha $AI = IA = A$. Tale matrice é quella che ha 1 su tutta la diagonale principale e zero altrove:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & 1 \end{bmatrix}.$$

Si noti infine che non vale la proprietá commutativa per il prodotto righe per colonne, cioé non é regola generale che $AB = BA$.

2.3 Determinanti.

Sia $A = [a_{ij}] \in M_n(\Re)$ una matrice quadrata di ordine n. Esiste una corrispondenza $\varphi : M_n(\Re) \longrightarrow \Re$ che associa ad ogni matrice uno ed un solo valore in $\Re$. Il valore $\varphi(A) \in \Re$ é detto determinante di A ed indicato $\varphi(A) = det(A) = |A|$. La corrispondenza φ é definita da: $det(A) = \sum_\sigma (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ al variare di σ tra le $n!$ permutazioni di $\{1, 2, 3, .., n\}$. Il segno di ogni addendo é $(-1)^\sigma$, che é $+1$ se σ é una permutazione pari, ed é -1 se σ é dispari.

A partire da tale definizione vogliamo introdurre alcuni metodi pratici per il calcolo dei determinanti, in modo induttivo, da $n = 1$ fino ad un qualsiasi n.

n=1.
$A = [a]$, $a \in \Re$ ed in questo caso si definisce $det(A) = a$.

n=2.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, e $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ cioé dapprima moltiplichiamo tra loro gli elementi della diagonale principale. Quindi moltiplichiamo tra loro gli elementi della diagonale secondaria cambiando il segno di questo ultimo prodotto. Infine sommiamo i due prodotti ottenuti.

n=3.

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Per calcolare il determinante usiamo il seguente metodo, detto 'di Sarrus'. Ricopiamo le prime due colonne a destra della terza:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Individuiamo cosí tre diagonali principali e tre secondarie. Eseguiamo i prodotti degli elementi di ciascuna diagonale, cambiando il segno al prodotto degli elementi di ogni diagonale secondaria. Infine sommiamo i prodotti ottenuti:

$$det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

n $\geq$ 4.

Per poter affrontare tali casi abbiamo bisogno di introdurre alcune definizioni:

Sia $A \in M_{mn}$, diciamo sottomatrice di A una qualsiasi matrice ottenuta utilizzando gli elementi che appartengano contemporaneamente ad un numero p di righe di A ed ad un numero q di colonne di A. Tale sottomatrice avrá ordine (p, q).

Diremo minore di ordine p di A, il determinante di una sottomatrice di ordine p di A.

Diremo complemento algebrico di un elemento $a_{ij} \in A \in M_n$, il minore di ordine $n-1$ ottenuto cancellando la riga e la colonna cui appartiene a_{ij}, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Le seguenti sono sottomatrici di A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalle prime 2 righe e dalle prime 3 colonne di A,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalle prime due righe e dalla terza e quarta colonna di A,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenuta dalla prima e terza riga e dalla terza e quarta colonna di A.

Inoltre sono minori di ordine 2 i seguenti

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Esempio. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il complemento algebrico di $a_{13} = 3$ é

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

Il complemento algebrico di $a_{21} = 0$ é

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Teorema di Laplace. *Sia A una matrice quadrata di un certo ordine n. Il determinante di A si ottiene moltiplicando gli elementi di una qualsiasi riga (o colonna) di A per i rispettivi complementi algebrici e sommando tutti i prodotti ottenuti.*

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Applicando il teorema di Laplace, rispetto alla prima riga, otteniamo:

$$det(A) = (+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + (+1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-2 + 10 - 4 + 0 = 4.$$

Come immediata conseguenza del teorema di Laplace, otteniamo che una matrice quadrata che abbia una riga o una colonna composta da elementi tutti nulli, avrá determinante nullo.

Una matrice con determinante nullo é detta matrice singolare (al contrario é detta non singolare).

Si noti che il teorema di Laplace vale per tutte le matrici quadrate di qualsiasi ordine, ovviamente per quelle di ordine 2 e 3 si preferisce usare i metodi precedentemente esposti, poiché piú veloci.

2.4 Dipendenza ed indipendenza tra righe.

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\Re).$$

Isoliamo ciascuna riga della matrice come una n-upla ordinata di scalari:

$$u_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$$

$$u_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$$

$$......................$$

$$u_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$$

$$......................$$

$$u_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}).$$

Definiamo le seguenti operazioni:

i) sommare due righe (due n-uple) vuol dire sommare ciascun elemento di una con il corrispondente dell'altra, ad esempio

$$u_1 + u_2 = (a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22}, ..., a_{1n} + a_{2n}).$$

ii) moltiplicare una riga per uno scalare $\alpha \in \Re$ vuol dire moltiplicare ciascun elemento della riga per α, ad esempio

$$\alpha u_1 = (\alpha a_{11}, \alpha a_{12}, ..., \alpha a_{1n}).$$

Siano $u_1, .., u_r$ righe di una matrice. Diremo che $u_1, .., u_r$ sono linearmente dipendenti se esistono $\alpha_1, .., \alpha_r \in \Re$ non tutti nulli, tali che $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r = (0, 0, 0, ..., 0)$ (la n-upla nulla). Supponiamo che sia $\alpha_i \neq 0$. Allora

$$\alpha_i u_i = -\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 .. - \alpha_{i-1} u_{i-1} - \alpha_{i+1} u_{i+1} - ... - \alpha_r u_r$$

da cui

$$u_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} u_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_i} u_2 - ... - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} u_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} u_{i+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i} u_n$$

cioé, se le righe $u_1, .., u_r$ sono linearmente dipendenti, allora almeno una di esse si puó esprimere come combinazione lineare delle altre.

Diremo invece che le $u_1, .., u_r$ sono linearmente indipendenti se vale la seguente:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_r u_r = (0, 0, 0, ..., 0) \quad \text{se e solo se} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_r = 0.$$

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (3,1,0)$, $u_3 = (2,-1,0)$, $u_4 = (0,0,1)$. Le righe u_1, u_2, u_3 sono linearmente dipendenti infatti:

$$(-1)u_1 + (1)u_2 + (-1)u_3 = (0,0,0)$$

da cui $u_3 = u_2 - u_1$, cioé u_3 é combinazione lineare di u_2 e u_1.

Le righe u_2, u_3, u_4 sono linearmente indipendenti, infatti se supponiamo $a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4 = (0,0,0)$, otteniamo $(3a_2 + 2a_3, a_2 - a_3, a_4) = (0,0,0)$ e quindi $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

2.5 Rango di una matrice.

Sia A una matrice con m righe e n colonne. Diciamo rango di A l'ordine della piú grande sottomatrice quadrata di A che abbia determinante non nullo. Ovviamente $rank(A) \leq min\{m, n\}$.

Esempio.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango} \quad 3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango} \quad 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango} \quad 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ha rango} \quad 1.$$

Talvolta calcolare il rango di una matrice puó non essere facile come negli esempi precedenti. Ci proponiamo ora di introdurre quelle che sono chiamate operazioni elementari sulle righe di una matrice. Tali operazioni, pur modificando la matrice di partenza, ne lasciano invariato il rango. Lo scopo é quello di trasformare una matrice in un'altra di piú facile lettura, al fine di determinare il rango della trasformata, sicuri che esso sia anche il rango della matrice di partenza.

Le operazioni elementari sulle righe sono di tre tipi:

1) Scambio di posizione tra due righe, per esempio la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si trasforma nella $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dopo lo scambio tra la prima e la terza riga. Denoteremo lo scambio tra la riga i e la riga j con il simbolo $R_i \leftrightarrow R_j$.

Nel caso di matrici quadrate, ció comporta che il valore assoluto del determinante della matrice finale é identico a quello della matrice iniziale, ma i segni dei due determinanti sono discordi.

2) Moltiplicazione di una riga per uno scalare $\alpha \neq 0$, per esempio la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si trasforma nella $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dopo aver scambiato la prima riga con essa stessa moltiplicata per 3. Denoteremo lo scambio di una riga i con la stessa riga moltiplicata per lo scalare α, con il simbolo $R_i \rightarrow \alpha R_i$.

Nel caso di matrici quadrate, ció comporta che il determinante della matrice finale é pari a quello della matrice iniziale, moltiplicato per α.

3) Scambio di una riga con la combinazione lineare di altre righe, per esempio la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ si trasforma nella $\begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dopo aver scambiato la prima riga con la somma di essa stessa e della seconda riga moltiplicata per 4. Denoteremo lo scambio della riga j con la somma della riga j e della riga i moltiplicata per uno scalare α, con il simbolo $R_j \rightarrow R_j + \alpha R_i$.

Nel caso di matrici quadrate, i determinanti della matrice finale e di quella iniziale sono esattamente identici.

Diciamo elemento speciale in una riga, ogni elemento non nullo tale che nella propria colonna, al di sotto di esso, vi siano solo elementi nulli. Per esempio nella matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ l'elemento $a_{12} = 2$ é speciale per la prima riga.

Diremo che una matrice é ridotta per righe se in ogni riga vi é almeno un elemento speciale (il controllo non va ovviamente fatto per gli elementi dell'ultima riga, poiché essi non presentano altre righe al di sotto.) Si dimostra che il rango di una matrice ridotta per righe é pari al numero di righe non nulle della matrice stessa.

Quindi per calcolare il rango di una matrice potremmo operare nel modo seguente: se la matrice é giá ridotta per righe, calcoliamo semplicemente il numero di righe non nulle (esso é il rango della matrice); altrimenti, per prima cosa riportiamo la matrice ad una forma ridotta, tramite le operazioni elementari sopra esposte, quindi calcoliamo il numero di righe non nulle della forma ridotta ottenuta.

Esempio. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ é ridotta per righe: $a_{11} = 1$ é l'elemento speciale della prima riga, $a_{23} = 2$ é l'elemento speciale della seconda riga. Il rango della matrice é tre.

Esempio. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ non é ridotta per righe. Operiamo nel modo seguente:

1) $R_3 \to R_3 - R_1$ e la matrice diventa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

2) $R_3 \to R_3 - R_2$ e la matrice diventa $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ che presenta l'elemento speciale a_{11} sulla prima riga e quello a_{22} sulla seconda. Quindi é ridotta ed il suo rango é 2.

Si noti che la possibilitá di trasformare una riga della matrice di partenza in una riga nulla, dipende esclusivamente dal fatto che tale riga sia una combinazione lineare di altre righe della matrice (in caso contrario non riusciremmo in alcun modo, attraverso le operazioni elementari, ad annullare tale riga). In tal senso possiamo dare una ulteriore definizione di rango di una matrice: esso é il numero massimo di righe tra loro linearmente indipendenti.

Esempio. La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -3 & -6 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ha rango 1, poiché ciascuno dei vettori riga dipende dagli altri.

La matrice $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ha rango 3 poiché le tre righe sono tutte tra loro indipendenti.

Queste ultime considerazioni ci fanno comprendere come, nel caso di matrici quadrate, si possa riconoscere in talune occasioni, se il determinante della matrice é nullo oppure diverso da zero. In particolare sia A una matrice quadrata di ordine n. Se una riga é tutta nulla, allora il suo determinante é nullo (il rango non potrá essere n). Se una riga é proporzionale ad un'altra il determinante é ancora nullo (con opportune trasformazioni sulle righe, una delle due tra loro proporzionali, diventa nulla). Piú in generale se una riga é combinazione lineare di altre righe, il determinante é nullo. Quanto appena detto viene anche utilizzato per dimostrare il seguente

Secondo teorema di Laplace. *In una matrice quadrata, moltiplicando gli elementi di una riga (o di una colonna) per i complementi algebrici di un'altra riga (o colonna) e sommando i prodotti ottenuti, si ottiene zero.*

Terminiamo il paragrafo enunciando il seguente risultato,utile in tutto ció che seguirá:
Teorema di Binet. *Siano A, B matrici quadrate di ordine n. Allora*

$$det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B).$$

2.6 Trasposta di una matrice, matrici invertibili e matrici simili.

Sia A una matrice con m righe e n colonne, $A \in M_{mn}(\Re)$. Diciamo matrice trasposta di A, e la indichiamo A^T, quella matrice con n righe e m colonne, $A^T \in M_{nm}(\Re)$, tale da avere come righe e come colonne, rispettivamente le colonne e le righe di A. In altre parole, se a_{ij} é l'elemento di A che occupa il posto di riga i e colonna j, esso sará anche elemento di A^T, ma occuperá il posto di riga j e colonna i.

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ allora $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Una matrice A quadrata é detta simmetrica se $A = A^T$. Inoltre, per ogni matrice quadrata A si ha che $det(A) = det(A^T)$.

Diciamo matrice aggiunta della matrice A, e la indichiamo $Agg(A)$, quella matrice che abbia come elemento di posto (i, j), il complemento algebrico dell'elemento di A di posto (j, i).

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Allora $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $Agg(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

Diremo che una matrice A, quadrata di ordine n, é invertibile se esiste una matrice quadrata B di ordine n tale che $A \cdot B = I$, dove I é la matrice identica di ordine n, avente 1 su tutta la diagonale principale e zero in ogni altra posizione. Per esempio:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 7 & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ é invertibile, infatti esiste

$B = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & -1 \\ \frac{53}{6} & -3 & \frac{10}{3} \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ tale che $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Le matrici quadrate invertibili sono tutte e sole quelle non singolari. Inoltre, sia A invertibile tale che $A \cdot B = I$. Grazie al teorema di Binet otteniamo

$$1 = det(I) = det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$$

da cui $det(B) = det(A)^{-1}$. La matrice B é detta inversa della matrice A, indicata anche con $B = A^{-1}$.

Una matrice quadrata A é detta ortogonale se $A^T = A^{-1}$. ció vuol dire che

$$1 = det(I) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A \cdot A^T) = det(A) \cdot det(A^T) = det(A)^2.$$

Quindi condizione necessaria (ma non sufficiente) affinché una matrice sia ortogonale é che il suo determinanate sia pari a $+1$ oppure -1.

Esempio. La matrice $A = \begin{bmatrix} cos(\varphi) & sen(\varphi) \\ -sen(\varphi) & cos(\varphi) \end{bmatrix}$ é ortogonale.

Proprietá. *Siano A, B matrici quadrate di ordine n. Valgono le seguenti:*
1) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
2) $(A \cdot B)^{-1} = (B)^{-1} \cdot (A)^{-1}$, nel caso entrambe A e B siano non singolari.

Calcolo dell'inversa. *Sia A una matrice quadrata non singolare di ordine n. Per ottenere l'inversa di A si costruisca dapprima la matrice aggiunta di A. Quindi si divida ciascun elemento dell'aggiunta per il determinante di A. La matrice ottenuta é esattamente A^{-1}.*

Esempio. Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Poiché $det(A) = -2$, essa é invertibile. Si ha che

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Agg(A) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Quindi

$$A^{-1} = \frac{Agg(A)}{-2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed infatti

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Relazione di Similitudine. Diciamo che due matrici quadrate A, B, entrambe di ordine n, sono simili se esiste una matrice M quadrata di ordine n, non singolare, tale che $A = M^{-1} \cdot B \cdot M$. Si noti che valgono le seguenti:

1) Ogni matrice quadrata A é simile a se stessa, infatti

$$A = I^{-1} \cdot A \cdot I = I \cdot A \cdot I.$$

2) Se la matrice A é simile alla B allora B é simile ad A, infatti

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M \Rightarrow B = (M^{-1})^{-1} \cdot A \cdot (M^{-1}).$$

3) Se A é simile a B e B é simile a C, allora A é simile a C, infatti

$$A = M^{-1} \cdot B \cdot M \quad \text{e} \quad B = N^{-1} \cdot C \cdot N$$

implica

$$A = (N \cdot M)^{-1} \cdot C \cdot (N \cdot M).$$

Quindi la relazione di similitudine tra matrici soddisfa le proprietá riflessiva (1), simmetrica (2) e transitiva (3), ed é una relazione di equivalenza.

L'insieme della matrici quadrate di ordine n é allora suddiviso in classi di equivalenza, nel senso che tutte le matrici tra loro simili costituiscono un'unica classe, avente come rappresentante una qualsiasi delle matrici che ne fanno parte. Inoltre due distinte classi di equivalena non possono aver alcuna matrice in comune.

Le proprietá piú rilevanti sono le seguenti:

i) Le matrici tra loro simili hanno lo stesso determinante.

ii) Le matrici tra loro simili hanno lo stesso rango.

2.7 Esercizi.

Esercizio 2.7.1 *Determinare i ranghi delle seguenti matrici:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.7.2 *Ridurre le seguenti matrici nella loro forma a gradini:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 2 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 7 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 7 & 5 \\ 8 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.7.3 *Determinare se le seguenti matrici sono ortogonali:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} cos(\alpha) & sen(\alpha) \\ -sen(\alpha) & cos(\alpha) \end{bmatrix};$$

Esercizio 2.7.4 *Calcolare l'inversa della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Esercizio 2.7.5 *Determinare una matrice triangolare superiore equivalente per righe alla matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.7.6 *Determinare una matrice triangolare superiore equivalente per righe alla matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.7.7 *Calcolare il determinante della matrice*

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.7.8 *Determinare i ranghi delle seguenti matrici:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2.7.9 *Determinare il rango delle seguenti matrici, al variare del parametro k:*

$$\begin{bmatrix} k & -1 & 2 \\ k & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Esercizio 2.7.10 *Determinare, se esistono, le matrici inverse delle seguenti:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

Esercizio 2.7.11 *Per quali valori del parametro reale k, le seguenti matrici sono invertibili:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & k \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} k & k & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & k \end{bmatrix};$$

Scegliere un valore di k per cui una di esse é invertibile e determinarne l'inversa.

Capitolo 3

I sistemi lineari.

3.1 Introduzione.

Una equazione del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$, con $a_1, .., a_n, b \in \Re$, si dice lineare; $x_1, .., x_n$ sono le incognite, b é il termine noto, $a_1, .., a_n$ sono i coefficienti delle incognite. Risolvere una equazione lineare vuol dire determinare una n-upla di valori in $\Re$, $(c_1, .., c_n)$, da attribuire alle incognite $x_1, .., x_n$, tali che $a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_nc_n = b$. Un sistema lineare di m equazioni in n incognite sul campo $\Re$ é un insieme di m equazioni lineari nelle stesse incognite $x_1, .., x_n$, cioé

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Una soluzione di un tale sistema é una n-upla di valori reali $(c_1, .., c_n)$ da attribuire alle incognite $x_1, .., x_n$, tali che essi verifichino ciascuna delle m equazioni, cioé:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + ... + a_{1n}c_n = b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + ... + a_{2n}c_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + ... + a_{mn}c_n = b_m \end{cases}.$$

Se consideriamo le seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ ... \\ b_m \end{bmatrix}$$

allora il sistema lineare si puó riscrivere in forma compatta nel modo seguente:

$$A \cdot X = B.$$

Chiameremo A matrice incompleta e $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ matrice completa del sistema lineare.

Siano A e C le matrici associate ad un sistema lineare. Supponiamo che la matrice C non sia ridotta per righe. Dopo aver effettuato la riduzione della matrice C, indichiamo con A' e C' le matrici trasformate e ridotte. Ad esse viene associato ancora un sistema lineare $A' \cdot X = B'$. Vale il seguente:

Teorema 3.1.1 *Le soluzioni di un sistema lineare $A \cdot X = B$ sono le stesse di ciascun sistema lineare $A' \cdot X = B'$ ottenuto da esso attraverso operazioni elementari effettuete sulle righe delle matrici caratteristiche del sistema. Tali sistemi sono detti equivalenti.*

Esempio 3.1.1

Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \end{cases}.$$

Le matrici associate sono

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Riduciamo la matrice C:

$$R_3 \to R_3 + R_2, \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - R_1, \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Il sistema associato a questa matrice é

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_3 = -1 \\ 2x_1 = 4 \end{cases}$$

la cui soluzione é $(x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{2})$. Poiché il sistema trasformato é equivalente a quello di partenza, quest'ultima é anche soluzione del primo sistema.

Ma non tutti i sistemi lineari hanno necessariamente una soluzione, per esempio basti pensare al seguente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}.$$

Diremo *compatibili* i sistemi lineari che ammettono soluzione ed *incompatibili* quelli che non ne ammettono alcuna. Parallelamente, non é detto che se un sistema lineare ha una soluzione, esso abbia solo quella, eccone un esempio:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

che ammette come soluzioni le infinite terne $(\alpha, \alpha, 2 - 2\alpha)$, per ogni $\alpha \in \Re$.

Diremo *indeterminati* i sistemi lineari che ammettono infinite soluzioni.

Teorema 3.1.2 *(di Rouché-Capelli) Sia $A \cdot X = B$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite, con matrici associate $A \in M_{mn}(\Re)$, $C \in M_{mn+1}(\Re)$. Esso é compatibile se e solo se il rango della matrice incompleta A é uguale al rango della matrice completa C. Inoltre se il sistema é compatibile, detto r il rango delle matrici, le soluzioni sono in numero di ∞^{n-r}.*

Esempio 3.1.2 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

La matrice incompleta é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *che ha rango 3. Ovviamente anche la matrice completa avrá rango 3. Il sistema é compatibile ed ammette* $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ *soluzione.*

Esempio 3.1.3 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_4 = 1 \end{cases} .$$

La matrice incompleta é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *che ha rango 2. La matrice completa é* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *che ha ancora rango 2. Il sistema é compatibile ed ammette* $\infty^{4-2} = \infty^2$ *soluzioni. Il rango 2 ci é dato dalle prime due righe, le terza é combinazione lineare di esse. Allora un sistema equivalente a quello dato é quello associato alla seguente matrice:* $C' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e si scrive*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4 \\ 3x_1 + x_2 = 1 + x_3 \end{cases} .$$

Dalla prima otteniamo $x_1 = -x_2 + x_3 - x_4$ *e sostituendo nella seconda:*

$$-3x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_2 = 1 + x_3 \quad cio\acute{e} \quad -2x_2 = 1 - 2x_3 + 3x_4$$

$$x_2 = -\frac{1 - 2x_3 + 3x_4}{2}$$

ed ancora sostituendo il valore di x_2 *nella espressione di* x_1*:*

$$x_1 = \frac{1 - 2x_3 + 3x_4}{2} + x_3 - x_4.$$

Allora la generica soluzione del sistema lineare é

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \alpha - \frac{3}{2}\beta \quad x_3 = \alpha \quad x_4 = \beta$$

per ogni valore reale dei parametri α *e* β*.*

Esempio 3.1.4 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} .$$

La matrice incompleta é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ *che ha rango* 2. *La matrice completa é* $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ *che ha rango* 3. *Il sistema é incompatibile.*

3.2 Sistemi omogenei.

Sia $A \in M_{mn}(\Re)$, matrice con m righe e n colonne. Il sistema lineare $A \cdot X = B$ é detto omogeneo se $B = 0$ cioé se $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$ é il vettore nullo di m componenti. Tali sistemi hanno sempre la soluzione banale, $(x_1 = 0, .., x_n = 0)$. Poiché in tale caso la matrice completa e quella incompleta hanno sempre lo stesso rango, la soluzione banale é anche l'unica soluzione se e solo se il rango della matrice A é pari al numero n di incognite. Al contrario, se il rango di A é $r < n$ allora le soluzioni sono in numero di ∞^{n-r}.

Esempio 3.2.1 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

La matrice associata é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ *che ha rango* 3. *Allora vi é la sola soluzione banale.*

Esempio 3.2.2 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

La matrice associata é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *che ha rango* 2. *Allora vi sono* ∞^2 *soluzioni. Il rango é* 2 *poiché l'ultima riga é combinazione lineare delle precedenti due. Quindi* *un sistema equivalente al precedente é quello che ha come matrice associata la seguente:* $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Tale sistema si scrive:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -x_2 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2x_2 - 2x_4 \end{cases}.$$

Dalla prima otteniamo $x_1 = -x_2 - 2x_3 - x_4$. *Sostituendo nella seconda otteniamo*

$$-2x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_3 = -2x_2 - 2x_4 \quad \text{cioé} \quad x_3 = 0.$$

Un generica soluzione del sistema é allora

$$x_1 = -\alpha - \beta \quad x_2 = \alpha \quad x_3 = 0 \quad x_4 = \beta$$

al variare dei parametri α *e* β *in* $\Re$.

Caso particolare é quello in cui $r = n - 1$. Quando si verifica ció, le soluzioni non banali del sistema lineare omogeneo sono date dalle n-uple proporzionali ai complementi algebrici di ordine $n - 1$ della matrice A.

Esempio 3.2.3 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

La matrice associata é $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ *che ha rango* 3. *In particolare il rango é dato dalle prime tre righe della matrice, quindi le* ∞^1 *soluzioni del sistema sono proporzionali ai complementi algebrici degli elementi* $a_{41} = 0, a_{42} = 2, a_{43} = 2, a_{44} = 0$, *cioé*

$$\alpha \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right)$$

al variare di α *parametro reale.*

3.3 Metodo di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare.

Supponiamo di aver un sistema al quale venga associata un matrice incompleta A quadrata di ordine n e non singolare:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ ... \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Il sistema sia $A \cdot X = B$.

Sappiamo dal teorema di Rouché-Capelli che in tal caso il sistema ammette un'unica soluzione. Essa puó essere determinata nel modo seguente:

$$A \cdot X = B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

da cui

$$x_1 = (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n) \cdot \frac{1}{det(A)} = \frac{\Delta_1}{det(A)}$$
$$x_2 = (A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + ... + A_{n2}b_n) \cdot \frac{1}{det(A)} = \frac{\Delta_2}{det(A)}$$
$$x_3 = (A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + ... + A_{n3}b_n) \cdot \frac{1}{det(A)} = \frac{\Delta_3}{det(A)}$$
$$............................$$
$$x_n = (A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + ... + A_{nn}b_n) \cdot \frac{1}{det(A)} = \frac{\Delta_n}{det(A)}$$

dove A_{ij} é il complemento algebrico dell'elemento $a_{ij} \in A$.

In sostanza, il termine al numeratore $\Delta_1 = (A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + ... + A_{n1}b_n)$ é il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ottenuta scambiando la prima colonna di A con la colonna dei termini noti.

In generale, il termine $\Delta_i = (A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + ... + A_{ni}b_n)$ é il determinante della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & b_j & ... & ... \\ a_{1n} & a_{n2} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ottenuta scambiando la colonna i di A con la colonna dei termini noti.

Supponiamo ora che la matrice A incompleta non sia quadrata e che il sistema sia compatibile, diciamo r il rango del sistema. Consideriamo A' la matrice di ordine r che fornisce il rango al sistema, essa é ovviamente quadrata e non singolare.

Il sistema relativo alla matrice A'

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_m - a_{r(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases}$$

é equivalente a quello di partenza, inoltre é risolvibile col metodo di Cramer. Le soluzioni $(x_1, .., x_r)$ saranno date in funzione dei parametri reali $x_{r+1}, .., x_n$.

Esempio 3.3.1 *Ripetiamo un esempio precedentemente esposto, ma applichiamo ora il metodo di Cramer. Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

La matrice associata é $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *che ha rango* 2*. Allora vi sono* ∞^2 *soluzioni. Il rango é* 2 *poiché l'ultima riga é combinazione lineare delle precedenti due. Quindi un sistema equivalente al precedente é quello che ha come matrice associata la seguente:* $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*. Tale sistema si scrive:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = -x_2 - x_4 \\ 2x_1 + 3x_3 = -2x_2 - 2x_4 \end{cases} .$$

Applichiamo ora il metodo di Cramer. La matrice incompleta del nuovo sistema é $A'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$*, con* $det(A'') = -1$*. Le variabili* x_2, x_4 *diventano parametri reali, ai quali* *possiamo attribuire un qualsiasi valore in $\Re$. Calcoliamo*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -x_2 - x_4 & 2 \\ -2x_2 - 2x_4 & 3 \end{vmatrix} = x_2 + x_4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -x_2 - x_4 \\ 2 & -2x_2 - 2x_4 \end{vmatrix} = 0$$

e quindi

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{-1} = -x_2 - x_4 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{-1} = 0$$

con x_2 e x_4 parametri reali liberi.

3.4 Metodo di eliminazione di Gauss.

Concludiamo ora facendo vedere come un qualsiasi sistema compatibile si possa risolvere utilizzando le operazioni elementari sulle righe della matrice completa, associata ad esso, per riportarla in forma ridotta.

Siano $A \in M_{mn}(\Re)$, $B \in M_{m1}(\Re)$, rispettivamente la matrice incompleta e la colonna dei termini noti del sistema. Al solito indichiamo con $C = [A|B]$ la matrice completa del sistema.

Se operiamo sulle righe della matrice C, riportandola nella forma ridotta C', automaticamente avremo ridotto anche la matrice A nella forma A'. Il sistema associato alle matrici A' e C' é equivalente a quello iniziale, ma viene espresso in una forma ridotta, quindi piú facilmente risolvibile, con il metodo della sostituzione.

Esempio 3.4.1

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_4 = 16 \\ 4x_1 + 10x_2 - 9x_3 + x_4 = 33 \end{cases}.$$

La matrice completa associata é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -5 & -1 & 9 \\ 2 & 4 & -4 & 1 & 16 \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{bmatrix}.$$

Cominciamo con le operazioni elementari sulle righe per rendere speciale l'elemento di posto $(1,1)$:

$$R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_3 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 1 & 16 \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_4 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & 10 & -9 & 1 & 33 \end{bmatrix}$$

$$R_4 \to R_4 - 4R_1 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -5 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passiamo ora a determinare un elemento speciale sulla seconda riga, e come in precedenza, scegliamo l'elemento sulla diagonale principale (quello di posto $(2,2)$):

$$R_3 \to R_3 + R_2, R_4 \to R_4 - 2R_2, \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Infine passiamo alla terza riga:

$$R_4 \to R_4 + \frac{2}{5}R_3 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

La matrice é ora ridotta. Si noti che tanto il rango della incompleta che della completa é 4, quindi il sistema é compatibile ed ammette una sola soluzione. Inoltre il sistema é ora riscrivibile come segue:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 8 \\ & 3x_2 & -3x_3 & -\frac{3}{2}x_4 & = 1 \\ & & -\frac{5}{2}x_3 & -x_4 & = \frac{1}{2} \\ & & & -\frac{2}{5}x_4 & = -\frac{4}{5} \end{cases}.$$

Dall'ultima equazione si ha $x_4 = 2$. Sostituendo nella terza otteniamo $x_3 = -1$, e continuando a sostituire nelle prime due, $x_2 = 1$, $x_1 = 3$.

Esempio 3.4.2

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 13x_3 = 7 \end{cases}.$$

La matrice completa associata é $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 \\ 3 & -3 & 10 & 0 \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{bmatrix}$. Cominciamo con la prima riga:

$$R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_1 \quad C' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 4 & -5 & 13 & 7 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_1 \quad C' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_2 \quad C' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

La matrice é ora ridotta. Si noti che il rango della incompleta é 2, mentre quello della matrice completa é 3. Pertanto il sistema é incompatibile.

Esempio 3.4.3

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

La matrice completa associata é $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

$$R_2 \to R_2 - R_1 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + R_1 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \to R_3 + 3R_2 \quad C' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

La matrice é ora ridotta. Si noti che tanto il rango della incompleta che della completa é 3, quindi il sistema é compatibile ed ammette ∞^1 soluzioni. Inoltre il sistema é ora riscrivibile come segue:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = -3 \\ & & x_3 & +2x_4 & = -6 \end{cases}.$$

Dall'ultima equazione si ha

$$x_3 = -2x_4 - 6.$$

Sostituendo nella seconda otteniamo

$$x_2 = x_3 - x_4 - 3 = -2x_4 - 6 - x_4 - 3 = -3x_4 - 9$$

ed infine dalla prima equazione:

$$x_1 = 4 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 + 4x_4.$$

Quindi le soluzioni sono date dalle quaterne

$$(4 + 4\alpha, -9 - 3\alpha, -6 - 2\alpha, \alpha)$$

al variare del parametro α in $\Re$.

3.5 Esercizi.

Determinare, quando possibile, le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

Esercizio 3.5.1

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.2

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + z = 0 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.3

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ 3x + y = 1 \\ 5x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.4

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 7 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.5

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 4y + 3t = 5 \\ 2x + 5t = 4 \\ -3z - 2t = 1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.6

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -6 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 = -12 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.7

$$\begin{cases} 2x - 3y - 4z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.8

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Utilizzare il metodo di Gauss per determinare, quando possibile, le soluzioni dei seguenti sistemi lineari:

Esercizio 3.5.9

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 8 \\ x + 3y - 5z - w = 9 \\ 2x + 4y - 4z + w = 16 \\ 4x + 10y - 9z + w = 33 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.10

$$\begin{cases} 2x - y + 7z = 1 \\ 3x - 3y + 10z = 0 \\ 4x - 5y + 13z = 7 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.11

$$\begin{cases} x-2y+3z-4w=4 \\ x-y+2z-3w=1 \\ -x-y+z+3w=-1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.12

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 4x+5y+6z=2 \\ 7x+8y+9z=3 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.13

$$\begin{cases} x-y+3z=0 \\ -3x-y-7z=4 \\ 5x+2y+9z=-10 \\ 2x+y+2z=-6 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.14

$$\begin{cases} x+2y-z+5w=7 \\ 2x-4y-z-2w=-1 \\ 5x-6y-3z+w=0 \end{cases}$$

Determinare, al variare del parametro k nei reali, quante soluzioni possiedono i seguenti sistemi lineari:

Esercizio 3.5.15

$$\begin{cases} x+2y+3z=k+1 \\ 4x+5y+6z=k \\ 7x+8y+9z=k+1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.16

$$\begin{cases} 5x-3y=1 \\ 2x+y=7 \\ 8x+3y=k^2 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.17

$$\begin{cases} x+2y-z=-1 \\ kx+2z=1 \\ -x+3z=1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.18

$$\begin{cases} kx+3y+z=k+4 \\ 4kx+y+2z=2k+2 \\ kx+kz=k-1 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.19

$$\begin{cases} 2kx + 3y - z = 4 - k \\ 4kx + y + 2z = 2k \\ (k-1)y = 2 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.20

$$\begin{cases} x - z = 3 \\ (k+2)y + z = -1 \\ x + (k-1)z = 5 \\ (k+4)z = k \end{cases}$$

Determinare i valori reali del parametro k per i quali i seguenti sistemi lineari omogenei ammettono soluzioni non banali:

Esercizio 3.5.21

$$\begin{cases} 2x + ky - z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \\ kx - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3.5.22

$$\begin{cases} kx - y + 3z = 0 \\ x + y - kz = 0 \\ 2x + 2y + kz = 0 \end{cases}$$

3.6 Gli spazi vettoriali.

Siano $\Re$ il campo dei numeri reali e V un insieme non vuoto in cui sono definite le seguenti operazioni:

$$+ \quad : \quad V \times V \to V$$
$$\cdot \quad : \quad \Re \times V \to V.$$

Diremo che $(V, +, \cdot)$ é uno spazio vettoriale sul campo dei reali se valgono le seguenti:

1) $(V, +)$ é un gruppo commutativo, cioé
i) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$, per ogni $v_1, v_2, v_3 \in V$;
ii) esiste $e \in V$ tale che $v + e = e + v = v$, per ogni $v \in V$;
iii) per ogni $v \in V$, esiste $w \in V$, tale che $v + w = w + v = e$;
iv) per ogni $v_1, v_2 \in V$, $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.

2) $(a + b)v = av + bv$, per ogni $a, b \in \Re$, $v \in V$.
3) $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2$, per ogni $a \in \Re$, $v_1, v_2 \in V$.
4) $a(bv) = (ab)v = (ba)v = b(av)$, per ogni $a, b \in \Re$, $v \in V$.
5) $1_{\Re} \cdot v = v$, per ogni $v \in V$.

Chiameremo *vettori* gli elementi di uno spazio vettoriale e *scalari* gli elementi del campo $\Re$.

Esempio 3.6.1 *L'insieme delle matrici $M_{mn}(\Re)$ é uno spazio vettoriale su $\Re$, rispetto alle operazioni di somma tra matrici e prodotto per uno scalare.*

Esempio 3.6.2 *L'insieme dei vettori geometrici in $\Re^3$ (o in $\Re^2$) é uno spazio vettoriale su $\Re$, rispetto alle operazioni di somma tra vettori e prodotto per uno scalare.*

Esempio 3.6.3 *$\Re$ é uno spazio vettoriale su se stesso.*

Esempio 3.6.4 *L'insieme dei polinomi di grado minore o uguale ad un fissato n,*

$$\Re[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n \quad a_0, ..., a_n \in \Re\}$$

a coefficienti reali, é uno spazio vettoriale su $\Re$, rispetto alle operazioni di somma tra polinomi e di prodotto di un polinomio per uno scalare.

Esempio 3.6.5 *Sia*

$$\Re^n = \{(x_1, x_2, .., x_n), \quad /x_1, x_2, x_3, .., x_n \in \Re\}.$$

Definiamo le seguenti operazioni

$$(x_1, .., x_n) + (y_1, .., y_n) = (x_1 + y_1, .., x_n + y_n)$$
$$\alpha(x_1, .., x_n) = (\alpha x_1, .., \alpha x_n).$$

Allora $\Re^n$ é uno spazio vettoriale sul campo dei reali. Ogni vettore é una n-upla del tipo $(x_1, .., x_n)$.

Sia $W \subseteq V$, sottoinsieme dello spazio vettoriale V. Diremo che W é un sottospazio vettoriale di V, se é uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni definite in V, sul medesimo campo dei reali. Da tale definizione deriva che, condizione necessaria e sufficiente affinché W sia sottospazio di V é che valgano le due seguenti :

$$w_1 + w_2 \in W$$

$$aw \in W$$

per ogni $a \in \Re$, $w, w_1, w_2 \in W$, e queste si possono compattare nell'unica condizione

$$aw_1 + bw_2 \in W$$

per ogni $a, b \in \Re$, $w_1, w_2 \in W$.

Esempio 3.6.6 $W = \{\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x, y \in \Re\}$ *é un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine* 2 *su* $\Re$, $M_2(\Re)$.

Esempio 3.6.7 $W = \{(x, 0, z) \quad x, z \in \Re\}$ *é un sottospazio vettoriale di* $\Re^3$.

Esempio 3.6.8 $\Re$ *é un sottospazio banale di se stesso.*

Esempio 3.6.9 $W = \{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_mx^m, \quad a_0, .., a_m \in \Re\}$, *insieme dei polinomi di grado minore o uguale a* m, *con* $m \leq n$, *é sottospazio vettoriale di* $V = \{a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \quad a_0, .., a_n \in \Re\}$.

3.7 Intersezione, unione e somma di sottospazi.

Siano U, W sottospazi dello spazio vettoriale V. Consideriamo l'intersezione di U e W

$$U \cap W = \{v \in V : \quad v \in U \quad \text{e} \quad v \in W\}$$

esso é ancora un sottospazio di V.

Esempio 3.7.1 *Siano* $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \Re\}$ *e* $W = \{(x, 0, z), \quad x, z \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Allora un generico vettore che appartenga ad entrambi é dato dalle componenti* $(x, 0, 0)$, *quindi scriveremo*

$$U \cap W = \{v \in V : \quad v = (x, 0, 0), \quad x \in \Re\}.$$

Esempio 3.7.2 *Siano* $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \Re\}$ *e* $W = \{(x, x, x), \quad x \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Allora l'unico vettore che appartenga ad entrambi é dato dalle componenti* $(0, 0, 0)$, *quindi scriveremo*

$$U \cap W = \{(0, 0, 0)\}.$$

Al contrario definiamo l'unione di dei due sottospazi U e W

$$U \cup W = \{v \in V : \quad v \in U \quad \text{oppure} \quad v \in W\}.$$

non é detto che tale unione sia un sottospazio di V, e per dimostrarlo portiamo il seguente controesempio: consideriamo

$$U = \{(x, 0), \quad x \in \Re\}$$
$$W = \{(0, y), \quad y \in \Re\}$$

sottospazi di $\Re^2$. Consideriamo il vettore $(1, 0) \in U$ ed il vettore $(0, 1) \in W$, ovviamente entrambi appartengono a $U \cup W$ ma

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W.$$

Definiamo ora il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale V:

$$U + W = \{v \in V : \quad v = u + w, \quad u \in U \quad \text{e} \quad w \in W\}.$$

Esso é un sottospazio di V, detto somma di U e W, piú precisamente é il piú piccolo sottospazio di V contenente $U \cup W$.

Diremo che $U + W$ é somma diretta se $U \cap W = \{0\}$, il solo vettore nullo.

Esempio 3.7.3 *Siano* $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \Re\}$ *e* $W = \{(x, 0, z), \quad x, z \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Allora*

$$U + W = \{(x, y, z), \quad x, y, z \in \Re\} = \Re^3$$

inoltre $U \cap W = \{(x, 0, 0)\}$, *quindi la somma non é diretta.*

Esempio 3.7.4 *Siano* $U = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \Re\}$ *e* $W = \{(z, z, z), \quad z \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Allora*

$$U + W = \{(x + z, y + z, z), \quad x, y, z \in \Re\} = \Re^3$$

inoltre $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$, *quindi la somma é diretta.*

Esempio 3.7.5 *Siano* $U = \{(x, 0, z), \quad x, z \in \Re\}$ *e* $W = \{(y, 0, y), \quad y \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Allora*

$$U + W = \{(x + y, 0, y + z), \quad x, y, z \in \Re\}$$

inoltre $U \cap W = \{(x, 0, x)\}$, *quindi la somma non é diretta.*

Proposizione 3.7.1 *Siano U e W sottospazi vettoriali dello spazio V. La loro somma é diretta se e solo se ogni vettore di essa si puó esprimere in modo unico come somma di un vettore di U e di uno di W.*

Ricordiamo che una combinazione lineare di vettori $\{v_1, .., v_n\}$ di V é una scrittura del tipo

$$a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_nv_n$$

per qualsiasi $a_1, .., a_n$ scalari in $\Re$.

Sia $S \subseteq V$, un sottoinsieme dello spazio V. Definiamo $Span(S) =< S >$, e lo chiamiamo sottospazio generato da S, il sottospazio di V composto da tutte le possibili combinazioni lineari di vettori di S e scalari in $\Re$.

Esempio 3.7.6 *Sia $V = \Re^3$, $S = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$. Allora $Span(S) =< S >= \{(x,y,0), \quad x,y \in \Re\}$.*

Definizione. *Siano $v_1, .., v_n$ vettori in V. Diremo che $v_1, .., v_n$ sono linearmente dipendenti se esistono $a_1, .., a_n \in \Re$, non tutti nulli tali che $a_1v_1 + a_2v_2 + .. + a_nv_n = 0$.*

Al contrario sono detti linearmente indipendenti se $a_1v_1 + a_2v_2 + .. + a_nv_n = 0$ implica che $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

Esempio 3.7.7 *$v_1 = (-1,2,3)$, $v_2 = (0,-1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ vettori di $\Re^3$ sono linearmente indipendenti.*

Esempio 3.7.8 *$v_1 = (1,2,1,0)$, $v_2 = (1,-1,0,1)$, $v_3 = (-1,2,-1,0)$, $v_4 = (-1,1,0,-1)$, $v_5 = (1,1,0,1)$ vettori di $\Re^4$ sono linearmente dipendenti.*

Esempio 3.7.9 *$v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,a)$, $v_3 = (1,a,-1)$ vettori di $\Re^3$, con a parametro reale, sono indipendenti per $a \neq 1$ e sono dipendenti per $a = 1$.*

3.8 Basi e dimensione di uno spazio vettoriale.

Sia V uno spazio vettoriale su $\Re$. Un insieme B di vettori é detta base di V se:

1) i vettori di B sono linearmente indipendenti;

2) $Span(B) = V$.

Esempio 3.8.1 *Se $V = \Re$, allora per ogni $a \in \Re$, $B = \{a\}$.*

Esempio 3.8.2 *Sia* $V = \{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Re\}$. *Allora una base per* V *é data da*

$$B = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$

Esempio 3.8.3 *Sia* $V = \Re^3$, *allora una base é data da*

$$B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Esempio 3.8.4 *Sia*

$$V = \Re[X] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n \quad a_0, ..., a_n \in \Re\}$$

allora una base é data da

$$B = \{1, x, x^2, x^3, .., x^n\}$$

Teorema 3.8.1 *Sia* V *uno spazio vettoriale e* $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ *una sua base. Siano* $v_1, v_2, .., v_r$ r *vettori linearmente indipendenti di* V, *con* $r \leq n$. *Allora esistono* $n-r$ *vettori* $e_{j_1}, e_{j_2}, .., e_{j_{n-r}}$ *di* B *tali che l'insieme* $B' = \{v_1, v_2, .., v_r, e_{j_1}, e_{j_2}, .., e_{j_{n-r}}\}$ *costituisca una base per* V.

Teorema 3.8.2 *Due distinte basi di uno spazio vettoriale contengono lo stesso numero di elementi.*

Definiamo **dimensione di uno spazio vettoriale** V, e la indichiamo con $dim(V)$, il numero di elementi di una qualsiasi base di V.

Esempio 3.8.5

Sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 \quad x_1 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}.$$

Il generico vettore di W é $(x_1, x_2, -x_2, x_1)$, quindi

$$dim(W) = 2 \quad \text{e} \quad W =< (1,0,0,1), (0,1,-1,0) > .$$

Esempio 3.8.6

Sia

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \Re^4 \quad x_4 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

Il generico vettore di W é $(x_1, x_2, x_3, x_2 - x_3)$, quindi

$$dim(W) = 3 \quad \text{e} \quad W =< (1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,-1) > .$$

Supponiamo ora che lo spazio vettoriale V abbia dimensione n, indichiamo con $B = \{e_1, .., e_n\}$ una sua base. Diciamo componenti di un vettore $v \in V$ rispetto alla base B, gli scalari $a_1, .., a_n$ tali che $v = a_1e_1 + a_2e_2 + .. + a_ne_n$.

Esempio 3.8.7 *Sia $V = \Re^2$ e consideriamo due distinte basi di V :*

$$B_1 = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$B_2 = \{(1,-2), (4,1)\}.$$

Sia $v \in V$ un vettore che abbia componenti $(0,-1)$ rispetto alla base B_1, cioé $v = (0)(1,0) + (-1)(0,1) = (0,-1)$. Calcoliamo le sue componenti (a_1, a_2) rispetto alla base B_2:

$$v = a_1(1,-2) + a_2(4,1)$$

cioé

$$(0,-1) = (a_1 + 4a_2, -2a_1 + a_2)$$

da cui $a_1 = \frac{4}{9}$ e $a_2 = -\frac{1}{9}$.

3.9 Formula di Grassmann.

Siano A, B sottospazi vettoriali dello spazio V. Vogliamo considerare ora la relazione che intercorre tra le dimensioni di A, B, $A + B$ e $A \cap B$. Vale la seguente (formula di Grassmann):

Proposizione 3.9.1 *$dim(A + B) = dim(A) + dim(B) - dim(A \cap B)$.*

Si noti che nel caso $A+B$ sia una somma diretta, la formula di Grassmann si riduce al piú semplice caso $dim(A+B) = dim(A)+dim(B)$, poiché $A\cap B = \{0\}$, quindi $dim(A\cap B) = 0$ (in tale caso si indica $A + B = A \oplus B$).

Proposizione 3.9.2 *Siano A e B sottospazi vettoriali dello spazio V, e siano C_A e C_B rispettivamente una base di A ed una di B. Allora l'unione dei vettori delle due basi, cioé $C_A \cup C_B$, costituisce un insieme di generatori per il sottospazio $A + B$. Inoltre i vettori di $C_A \cup C_B$ che sono tra loro linearmente indipendenti costituiscono una base per $A + B$.*

Esempio 3.9.1 *Siano* $V = \Re^4$,

$$A = \{(x, y, z, t) \in \Re^4, \quad y = 0, 2z - t = 0\}$$

$$B = \{(x, y, z, t) \in \Re^4, \quad x - t = 0, y + z = 0\}$$

e calcoliamo $dim(A + B)$.
Il primo passo é quello di calcolare basi e dimensioni di A *e* B. *Il generico vettore di* A *si esprime* $(x, 0, z, 2z)$, *al variare di* $x, z \in \Re$. *Allora* $dim(A) = 2$ *ed una sua base é la seguente*

$$(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 2).$$

Il generico vettore di B *si esprime* $(x, y, -y, x)$, *al variare di* $x, y \in \Re$. *Allora* $dim(B) = 2$ *ed una sua base é*

$$(1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0).$$

Quindi se $v \in A \cap B$, *esso deve essere esprimibile contemporaneamente in due modi, cioé*

$$v = (a, 0, b, 2b) = (c, d, -d, c) \quad con \quad a, b, c, d \in \Re.$$

Uguagliando le due quaterne si ottiene

$$a = b = c = d = 0$$

che significa $A \cap B = \{0\}$ *e* $dim(A \cap B) = 0$, *da cui*

$$dim(A + B) = dim(A) + dim(B) - dim(A \cap B) = 2 + 2 - 0 = 4.$$

Concludiamo allora che $A + B = \Re^4$, *come somma diretta.*

Esempio 3.9.2 *Siano* $V = \Re^3$,

$$A = \{(a + b, b, a), \quad a, b \in \Re\}$$

$$B = \{(x, y, z), \quad x - y = 0\}.$$

Si ha che $dim(A) = 2$ *ed una sua base é data da*

$$(1, 0, 1), (1, 1, 0).$$

Inoltre il generico vettore di B *si esprime* (x, x, z), *quindi* $dim(B) = 2$ *ed una sua base é*

$$(1, 1, 0), (0, 0, 1).$$

Quindi se $v \in A \cap B$, *esso deve essere esprimibile contemporaneamente in due modi, cioé*

$$v = (a + b, b, a) = (c, c, d) \quad con \quad a, b, c, d \in \Re.$$

Uguagliando le due terne si ottiene

$$a = d = 0 \quad e \quad b = c \quad da\ cui \quad v = (b, b, 0).$$

Ció vuol dire che $dim(A \cap B) = 1$ *ed una sua base é data dal vettore* $(1, 1, 0)$. *Applicando la formula di Grassmann otteniamo:*

$$dim(A + B) = 2 + 2 - 1 = 3$$

quindi $A + B = \Re^3$ *ma non come somma diretta.*

Esempio 3.9.3 *Siano* $U =< (0, 1, 1), (2, 0, 1) >$ *e* $W =< (1, 1, 2) >$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Determiniamo* $dim(U + W)$.
Il generico vettore $v \in U \cap W$ *si deve esprimere nei due seguenti modi*

$$v = a(0, 1, 1) + b(2, 0, 1) = (2b, a, a + b) \in U$$

$$v = c(1, 1, 2) = (c, c, 2c) \in W.$$

Uguagliando le due terne otteniamo $a = b = c = 0$, *cioé* $U \cap W = \{0\}$, *quindi in base alla formula di Grassmann* $dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$, *e* $U + W = \Re^3$ *come somma diretta.*

Esempio 3.9.4 *Siano*

$$A =< (2, 0, 0, 1), (0, 0, -2, 0), (0, 0, 1, -1) >$$

$$B =< (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0) >$$

sottospazi di $\Re^4$. *Un generico vettore* $v \in A \cap B$ *si esprime nei due seguenti modi*

$$v = a(2, 0, 0, 1) + b(0, 0, -2, 0) + c(0, 0, 1, -1) = (2a, 0, -2b + c, a - c) \in A$$

$$v = d(0, 1, 0, 0) + e(1, 1, 0, 0) = (e, d + e, 0, 0) \in B.$$

Uguagliando le due quaterne si ottiene

$$a = 2b = c = -\frac{d}{2} = \frac{e}{2}$$

quindi $v = (e, 0, 0, 0)$, *al variare di* $e \in \Re$. *Per cui* $dim(A \cap B) = 1$ *e* $dim(A + B) = 3 + 2 - 1 = 4$, *cioé* $A + B = \Re^4$, *ma non come somma diretta.*

Esempio 3.9.5 *Siano*

$$A =< (2, -1, 0, 1), (1, 3, 1, -1), (0, 1, -1, -1) >$$

$$B =< (2, 0, 1, 0), (1, 2, 2, 0) >$$

sottospazi di $\Re^4$. *Determiniamo* $dim(A+B)$.
Un generico vettore $v \in A \cap B$ *si esprime nei due seguenti modi*

$$v = a(2,-1,0,1)+b(1,3,1,-1)+c(0,1,-1,-1) = (2a+b,-a+3b+c,b-c,a-b-c) \in A$$

$$v = d(2,0,1,0)+e(1,2,2,0) = (2d+e,2e,d+2e,0) \in B.$$

Uguagliando le due quaterne si ottiene

$$a = d = 0 \quad b = -c = e$$

quindi $v = (e,2e,2e,0)$, *al variare di* $e \in \Re$. *Per cui* $dim(A \cap B) = 1$ *e* $dim(A+B) = 3+2-1 = 4$, *cioé* $A+B = \Re^4$, *ma non come somma diretta.*

3.10 Cambiamento di base in uno spazio vettoriale.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo $\Re$ e siano $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ e $B' = \{e'_1, e'_2, .., e'_n\}$ due distinte basi di V. Per ogni vettore $v \in V$ avremo:

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \quad x_1, .., x_n \in \Re$$

$$v = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + ... + x'_ne'_n \quad x'_1, .., x'_n \in \Re.$$

Indichiamo allora $X = [x_1, .., x_n]^T$ il vettore contenente le componenti di v rispetto alla base B e $X' = [x'_1, .., x'_n]^T$ quello contenente le componenti di v rispetto alla base B'.

In particolare anche i vettori $e_1, .., e_n$ possono esprimersi come combinazione dei vettori della base B':

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{n1}e'_n \\ e_2 = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{n2}e'_n \\ .... \\ e_n = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{nn}e'_n \end{cases}.$$

Da queste otteniamo:

$$v = x_1e_1+x_2e_2+...+x_ne_n = x_1(a_{11}e'_1+a_{21}e'_2+...+a_{n1}e'_n)+x_2(a_{12}e'_1+a_{22}e'_2+...+a_{n2}e'_n)+$$

$$+........................ + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{nn}e'_n) =$$

$$e'_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + e'_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)+$$

$$+......................... + e'_n(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n)$$

che deve essere uguale a $v = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + ... + x'_ne'_n$, cioé

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \\ \qquad .... \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \end{cases} .$$

Indichiamo con A la matrice dei coefficienti di queto sistema lineare, $A = [a_{ij}]$, quindi possiamo riscrivere il sistema nel seguente modo:

$$X' = A \cdot X$$

che costituiscono le formule di passaggio dalle componenti di un vettore in base B a quelle del medesimo vettore in base B'.

La matrice A é detta matrice del cambiamento di base ed é costruita come segue:

- nella prima colonna vi sono le componenti del vettore e_1 rispetto alla base B';

- nella seconnda colonna vi sono le componenti del vettore e_2 rispetto alla base B';

- In generale, nella colonna j vi sono le componenti del vettore e_j della base B, calcolate rispetto alla base B'.

Poiché gli n vettori di una base sono sempre linearmente indipendenti, il sistema sopra citato ha rango massimo, cioé n, quindi la matrice A é invertibile, da cui otteniamo le formule inverse per il cambiamento di base:

$$X = A^{-1} \cdot X'$$

che costituiscono le formule di passaggio dalle componenti di un vettore in base B' a quelle del medesimo vettore in base B.

La matrice A^{-1} é costruita come segue:

- nella prima colonna vi sono le componenti del vettore e'_1 rispetto alla base B;

- nella seconnda colonna vi sono le componenti del vettore e'_2 rispetto alla base B;

- In generale, nella colonna j vi sono le componenti del vettore e'_j della base B', calcolate rispetto alla base B.

Esempio 3.10.1

Siano $V = \Re^2$ e $B = \{e_1 = (1,1), e_2 = (0,1)\}$, $B' = \{e'_1 = (1,0), e'_2 = (2,1)\}$ due basi di V. Determiniamo le formule di cambiamento di base in entrambi i versi.

Calcoliamo le componenti dei vettori della prima base rispetto alla seconda.

Le componenti di $e_1 = (1,1)$ rispetto a B' sono $(e_1)_{B'} = (-1,1)$ infatti

$$(1,1) = (-1)(1,0) + (1)(2,1)$$

analogamente le componenti di $e_2 = (0,1)$ rispetto a B' sono $(e_2)_{B'} = (-2,1)$.

Per cui, la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é quella che determina il passaggio balla base B a quella B', cioé

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e le formule di passaggio sono

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 2x_2 \\ x_2' = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Le formule inverse sono date da

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1' + 2x_2' \\ x_2 = -x_1' - x_2' \end{cases}$$

in cui la matrice di passaggio é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Per esempio consideriamo il vettore $v \in V$ che abbia componenti $X = (x_1, x_2) = (2, -3)$ rispetto alla base B. Determiniamo le sue componenti $X' = (x_1', x_2')$ rispetto alla base B':

$$\begin{cases} x_1' = -2 + 6 = 4 \\ x_2' = 2 - 3 = -1 \end{cases}.$$

Esempio 3.10.2

Siano $V = \Re^3$, $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (2,0,1)\}$ e $B' = \{(0,1,1), (2,-1,0), (1,0,2)\}$ due basi di V. Determiniamo le formule di cambiamento di base.

Calcoliamo le componenti dei vettori della prima base B rispetto alla seconda B':

$$(1,1,0) \to (0,-1,3)_{B'}$$

$$(1,0,1) \to (1,1,-1)_{B'}$$

$$(2,0,1) \to (1,1,0)_{B'}$$

per cui

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 \\ x_2' = -x_1 + x_2 + x_3 \\ x_3' = 3x_1 - x_2 \end{cases}.$$

Per esempio il vettore v di componenti $(1, 2, 3)$ rispetto alla base B avrá componenti $(5, 4, 1)$ rispetto alla base B'.

Esempio 3.10.3

Siano $V = \Re^3$ e $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ due basi di V tali che

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + 3e_2 + 2e_3 \\ e_2' = e_1 + e_3 \\ e_3' = e_2 \end{cases}.$$

In tale caso le formule di passaggio dalla base B' alla base B sono

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

e calcolando l'inversa della matrice che compare nel sistema precedente:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Esempio 3.10.4

Siano $V = \Re^3$, $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (2, 0, 1)\}$ e $B' = \{(1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 2)\}$ due basi di V. Sia $v \in V$ un vettore di componenti $(1, 1, 2)$ rispetto alla base B. Indichiamo (a, b, c) le componenti di v rispetto alla base B'. Per determinare (a, b, c) applichiamo ora esattamente la definizione di componente:

$$(1)(1, 1, 0) + (1)(1, 0, 1) + (2)(2, 0, 1) = a(1, 1, 1) + b(0, 0, 1) + c(1, 0, 2)$$

cioé

$$(6, 1, 3) = (a + c, a, a + b + 2c)$$

da cui $a = 1$, $b = -8$, $c = 5$.

3.11 Esercizi.

Esercizio 3.11.1 *Siano* $U = \{(x,y,0); x,y \in \Re\}$, $V = \{(x,0,z); x,z \in \Re\}$ *e* $W = \{(x,x,x); x \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Determinare i sottospazi* $U \cap V$, $U \cap W$, $V \cap W$.

Esercizio 3.11.2 *Siano* $U = \{(x,y,0); x,y \in \Re\}$, $V = \{(x,0,z); x,z \in \Re\}$ *e* $W = \{(x,x,x); x \in \Re\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Determinare i sottospazi* $U + V$, $U + W$, $V + W$.

Esercizio 3.11.3 *Siano* $v_1 = (-1,2,3)$, $v_2 = (0,-1,0)$, $v_3 = (1,0,1)$ *vettori di* $\Re^3$. *Determinare la dimensione del sottospazio generato da* v_1, v_2, v_3.

Esercizio 3.11.4 *Ripetere l'esercizio precedente in* $\Re^4$ *con i vettori* $v_1 = (1,2,1,0)$, $v_2 = (1,-1,0,1)$, $v_3 = (-1,2,-1,0)$, $v_4 = (-1,1,0,-1)$, $v_5 = (1,1,0,1)$.

Esercizio 3.11.5 *Determinare per quali valori di* $\alpha \in \Re$ *i seguenti vettori formano una base di* $\Re^3$: $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (0,1,\alpha)$, $(1,\alpha,-1)$.

Esercizio 3.11.6 *Siano* $v_1 = (1,2,0,0)$, $v_2 = (3,1,0,1)$ *vettori indipendenti in* $\Re^4$. *Determinare due vettori che uniti ai precedenti li completino ad una base di* $\Re^4$.

Esercizio 3.11.7 *Siano* $B_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $B_2 = \{(1,-2),(4,1)\}$ *due basi di* $\Re^2$ *e* v *un vettore di componenti* $(0,-1)$ *rispetto a* B_1. *Determinare le componenti di* v *rispetto alla base* B_2.

Esercizio 3.11.8 *Siano* $U = \{(x,y,z,t) \in \Re^4; y = 0, 2z - t = 0\}$ *e* $V = \{(x,y,z,t) \in \Re^4; x - t = 0, y + z = 0\}$. *Determinare una base per* $U \cap V$ *ed una per* $U + V$.

Esercizio 3.11.9 *Siano* $U = \{(h+k,k,h); h,k \in \Re\}$, $V = \{(x,y,z); x-y = 0\}$ *sottospazi di* $\Re^3$. *Determinare una base per* $U \cap V$ *ed una per* $U + V$.

Esercizio 3.11.10 *Siano* $B_1 = \{(1,1),(0,1)\}$ *e* $B_2 = \{(1,0),(2,1)\}$ *due basi di* $\Re^2$ *e* v *un vettore di componenti* $(1,1)$ *rispetto a* B_1. *Determinare le componenti di* v *rispetto alla base* B_2.

Esercizio 3.11.11 *Siano*

$$B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(2,0,1)\} \quad e \quad B_2 = \{(0,1,1),(2,-1,0),(1,0,0)\}$$

due basi di $\Re^3$ *e* v *un vettore di componenti* $(1,2,3)$ *rispetto a* B_1. *Determinare le componenti di* v *rispetto alla base* B_2.

Esercizio 3.11.12 *Siano* $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ *e* $B_2 = \{e'_1, e'_2 e'_3\}$ *due basi di* $\Re^3$ *e* v *un vettore di componenti* $(1,2,3)$ *rispetto a* B_1. *Determinare le componenti di* v *rispetto alla base* B_2 *sapendo che valgono le seguenti relazioni tra i vettori delle due basi:*

$$e'_1 = e_1 + 3e_2 + 2e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_3, \quad e'_3 = e_2.$$

Esercizio 3.11.13 *Siano*

$$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \quad e \quad B_2 = \{(1,4,0),(1,5,0),(0,0,-1)\}$$

due basi di $\Re^3$ *e* v *un vettore di componenti* $(-1,0,5)$ *rispetto a* B_1*. Determinare le componenti di* v *rispetto alla base* B_2*.*

Esercizio 3.11.14 *Determinare la dimensione e la base del sottospazio:* $W = \{(x,y,z,t) \in \Re^4; 2x - t = 0, y + 3z = 0\}$*.*

Esercizio 3.11.15 *Determinare la dimensione e la base del sottospazio:* $W = \{(x,y,z,t) \in \Re^4; 2x - t + 2z = 0\}$*.*

Esercizio 3.11.16 *Determinare la dimensione e la base del sottospazio:* $W = \{(x,y,z,t) \in \Re^4; x - y = 0, y + 3z + t = 0\}$*.*

Esercizio 3.11.17 *Siano* $U =< \{(0,1,1),(2,0,1)\} >$ *e* $V =< \{(1,1,2)\} >$ *sottospazi di* $\Re^3$*. Determinare la dimensione di* $U + V$*.*

Esercizio 3.11.18 *Siano* $U =< \{(2,0,0,1),(0,0,-2,0),(0,0,1,-1)\} >$ *e* $V =< \{(0,1,0,0),(1,1,0,0)\}$ *sottospazi di* $\Re^4$*. Determinare la dimensione di* $U + V$*.*

Esercizio 3.11.19 *Determinare la dimensione della somma dei sottospazi*

$$A =< \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} >$$

$$B =< \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} > .$$

Capitolo 4

Le applicazioni lineari.

4.1 Introduzione.

Siano U e V due spazi vettoriali sul campo dei reali e sia $f : U \to V$ una corrispondenza tra i vettori di U e quelli di V. Diremo che f é una applicazione lineare se, per ogni $a, b \in \Re$, $u_1, u_2 \in U$ si ha:

$$f(au_1 + bu_2) = af(u_1) + bf(u_2).$$

Lo spazio vettoriale U é detto dominio di f, V é detto codominio di f.

Esempio 4.1.1 *$f : U \to U$, tale che $f(u) = u$, per ogni $u \in U$, é una applicazione lineare, detta identitá di U.*

Esempio 4.1.2 *$f : U \to U$, tale che $f(u) = 0$, vettore nullo di U, per ogni $u \in U$, é una applicazione lineare, detta applicazione nulla in U.*

Esempio 4.1.3 *Sia $a \in \Re$, $f : U \to U$, tale che $f(u) = au$, per ogni $u \in U$, é una applicazione lineare, detta omotetia in U di rapporto a.*

Esempio 4.1.4 *$f : \Re^2 \to \Re^3$, tale che, per ogni $X = (x_1, x_2) \in \Re$, $f(X) = f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2) \in \Re^3$, é una applicazione lineare.*

Definizione. Sia $f : U \to V$ una applicazione lineare. Diciamo Immagine di f il seguente sottoinsieme di V:

$$Im(f) = \{v \in V \quad : \quad \exists u \in U, \quad f(u) = v\}.$$

É facile osservare che $Im(f)$ é un sottospazio vettoriale di V.

Esempio 4.1.5 *$f : \Re^3 \to \Re^4$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3, 0)$. Allora si ha*

$$Im(f) = \{(a, 0, b, 0) \quad : \quad a, b \in \Re\} =< (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0) >$$

sottospazio di dimensione 2 di $\Re^4$.

Esempio 4.1.6 *$f : \Re^4 \to \Re^3$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$. Sia $w \in Im(f)$, allora $w = (a_1, a_2, a_3)$ tali che*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ x_1 + x_3 = a_3 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $a_1 = a_2 + a_3$, per cui $w = (a_2 + a_3, a_2, a_3)$, per ogni $a_1, a_2, a_3 \in \Re$.

$$Im(f) = \{(a_2 + a_3, a_2, a_3) \quad : \quad a_1, a_2, a_3 \in \Re\} =< (1, 1, 0), (1, 0, 1) >$$

sottospazio di dimensione 2 di $\Re^3$.

Esempio 4.1.7

$f : \Re^3 \to \Re^4$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$. Sia $w \in Im(f)$, allora $w = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ tali che

$$\begin{cases} x_1 = a_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = a_2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = a_3 \\ x_2 - x_3 = a_4 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $a_2 = a_1 + a_4$ e $a_3 = 2a_1 + a_4$ per cui $w = (a_1, a_1 + a_4, 2a_1 + a_4, a_4)$, per ogni $a_1, a_4 \in \Re$.

$$Im(f) = \{(a_1, a_1 + a_4, 2a_1 + a_4, a_4) \quad : \quad a_1, a_4 \in \Re\} =< (1, 1, 2, 0), (0, 1, 1, 1) >$$

sottospazio di dimensione 2 di $\Re^4$.

Esempio 4.1.8

$f : \Re^4 \to \Re^3$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4)$. Sia $w \in Im(f)$, allora $w = (a_1, a_2, a_3)$ tali che

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = a_2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = a_3 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $a_2 = a_1 + x_1 + x_4$ e $a_3 = -a_1 + x_4$ per cui, detti $x_1 = b_1$ e $x_4 = b_2$, $w = (a_1, a_1 + b_1 + b_2, -a_1 + b_2)$, per ogni $a_1, b_1, b_2 \in \Re$.

$Im(f) = \{(a_1, a_1+b_1+b_2, -a_1+b_2) \quad : \quad a_1, b_1, b_2 \in \Re\} =< (1,1,1), (0,1,0), (0,1,1) >= \Re^3$.

Definizione. Una applicazione lineare f é detta suriettiva quando l'immagine di f coincide con tutto il codominio di f.

Definizione. Diciamo Nucleo di una applicazione lineare $f : U \to V$, il seguente sottoinsieme del dominio:

$$N(f) = \{u \in U \quad : \quad f(u) = 0_V\}$$

cioé l'insieme dei vettori di U che hanno come immagine in V il vettore nullo. Si dimostra facilmente che $N(f)$ é un sottospazio vettoriale di U.

Esempio 4.1.9 *$f : \Re^3 \to \Re^4$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3, 0)$. Sia $u \in N(f)$, allora $f(u) = (0, 0, 0, 0)$ quindi*

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui $u = (0, x_2, 0)$

$$N(f) = \{(0, a, 0) \quad : \quad a \in \Re\} =< (0, 1, 0) >$$

sottospazio di dimensione 1 di $\Re^3$.

Esempio 4.1.10 *$f : \Re^4 \to \Re^3$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2, x_2-x_3, x_1+x_3)$. Sia $u \in N(f)$, allora $f(u) = (0, 0, 0)$ quindi*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui $x_1 = -x_2 = -x_3$ e $u = (x_1, -x_1, -x_1, x_4)$

$$N(f) = \{(a, -a, -a, b) \quad : \quad a, b \in \Re\} =< (1, -1, -1, 0), (0, 0, 0, 1) >$$

sottospazio di dimensione 2 di $\Re^4$.

Esempio 4.1.11 *$f : \Re^3 \to \Re^4$ sia definita da $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$. Sia $u \in N(f)$, allora $f(u) = (0, 0, 0, 0)$ quindi*

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui $u = (0, x_2, x_2)$

$$N(f) = \{(0, a, a) \quad : \quad a \in \Re\} =< (0,1,1) >$$

sottospazio di dimensione 1 *di* $\Re^3$.

Esempio 4.1.12 $f : \Re^4 \to \Re^3$ *sia definita da* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4)$. *Sia* $u \in N(f)$, *allora* $f(u) = (0,0,0,0)$ *quindi*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ *e* $u = (0, 0, x_3, 0)$

$$N(f) = \{(0, 0, a, 0) \quad : \quad a \in \Re\} =< (0,0,1,0) >$$

sottospazio di dimensione 1 *di* $\Re^4$.

Definizione. Una applicazione lineare $f : U \to V$ é detta iniettiva quando per ogni $u_1 \neq u_2$ in U si ha: $f(u_1) \neq f(u_2)$ in V.

Teorema 4.1.1 *Una applicazione lineare* $f : U \to V$ *é iniettiva se e solo se* $N(f) = \{0\}$, *cioé se il nucleo di* f *é il sottospazio banale di* U.

Teorema 4.1.2 *Sia data una applicazione lineare* $f : U \to V$. *Allora* $dim(U) = dim(N(f)) + dim(Im(f))$.

Esempio 4.1.13 $f : \Re^3 \to \Re^4$ *sia definita da* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$. *Abbiamo visto in un esempio precedente che*

$$Im(f) = \{(a_1, a_1 + a_4, 2a_1 + a_4, a_4) \quad : \quad a_1, a_4 \in \Re\} =< (1,1,2,0), (0,1,1,1) >$$

sottospazio di dimensione 2 *di* $\Re^4$. *Ma anche*

$$N(f) = \{(0, a, a) \quad : \quad a \in \Re\} =< (0,1,1) >$$

é sottospazio di dimensione 1 *di* $\Re^3$.

Teorema 4.1.3 *Sia data una applicazione lineare* $f : U \to V$ *e sia* $S = \{v_1, .., v_r\} \subseteq S$ *un sottoinsieme di* S *formato da vettori linearmente dipendenti. Allora l'insieme* $f(S) = \{f(v_1), .., f(v_r)\} \subseteq V$ *é anche esso formato da vettori linearmente dipendenti.*

Teorema 4.1.4 *Sia data una applicazione lineare* $f : U \to V$ *e sia* $S = \{v_1, .., v_r\} \subseteq S$ *un sottoinsieme di* S *formato da vettori linearmente indipendenti. Allora l'insieme* $f(S) = \{f(v_1), .., f(v_r)\} \subseteq V$ *é anche esso formato da vettori linearmente indipendenti se e solo se* f *é iniettiva.*

4.2 Applicazioni lineari e matrici.

Siano U e V spazi vettoriali su $\Re$, tali da avere $dim(U) = n$ e $dim(V) = m$ e

$$B = \{e_1, .., e_n\} \quad \text{una base per U}$$

$$B' = \{e'_1, .., e'_m\} \quad \text{una base per V.}$$

Sia $f : U \to V$ una applicazione lineare. Ogni vettore $X \in U$ ha delle componenti $(x_1, .., x_n)$ rispetto alla base B, cioé $X = x_1e_1 + ... + x_ne_n$, ed ogni vettore $Y \in V$ ha delle componenti $(y_1, .., y_m)$ rispetto alla base B', cioé $Y = y_1e'_1 + ... + y_me'_m$.

In particolare sia $Y = f(X) \in V$, quindi

$$Y = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + .. + x_nf(e_n).$$

Poiché i vettori $f(e_1), .., f(e_n)$ sono in V, essi sono esprimibili per componenti rispetto alla base B':

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{m2}e'_m$$

$$...........$$

$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m$$

da cui

$$Y = x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + ... + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + ... + a_{m2}e'_m)+$$

$$+............................ + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + ... + a_{mn}e'_m) =$$

$$e'_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n) + e'_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n)+$$

$$+.............................. + e'_n(a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n).$$

Se indichiamo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ ... \\ y_m \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

allora $f(X) = Y$ si puó scrivere nel modo seguente:

$$A \cdot X = Y$$

e la matrice A é la matrice associata all'applicazione lineare f rispetto alle basi B e B'. Tale matrice é ottenuta nel seguente modo: la sua colonna j é formata dalle componenti rispetto alla base B' dell'immagine $f(e_j)$ del vettore e_j della base B. Concludiamo allora che ad ogni applicazione lineare f é associata una matrice che dipende dalle basi scelte per il dominio e codominio di f.

Viceversa sia data una qualsiasi matrice $A \in M_{mn}(\Re)$ e siano al solito U e V spazi vettoriali rispettivamente di dimensioni n e m. Costruiamo la seguente corrispondenza tra i due spazi vettoriali:

$$f(X) = A \cdot X \in V, \quad \text{per ogni} \quad X \in U.$$

Essa é ovviamente una applicazione lineare. Quindi ad ogni matrice é associata una applicazione lineare.

Quanto detto fin'ora si puó riassumere nel modo seguente: esiste una corrispondenza che associa ad ogni matrice una applicazione lineare e viceversa.

Osservazione importante. Si noti che se $Y \in f(U)$, allora esso é generato dall'insieme $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$, che quindi é un generatore per l'immagine della f. Ció vuol dire che le colonne della matrice associata ad una applicazione lineare costituiscono un insieme di generatori per $Im(f)$. Allora una base dell'immagine si puó ricavare facilmente, considerando i vettori colonna della matrice associata, che siano tra loro indipendenti.

Esempio 4.2.1

Sia $f : \Re^2 \to \Re^3$ definita da

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2, x_1).$$

Determiniamo la matrice associata alla f rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.

$$f(1, 0) = (1, 0, 1)$$

$$f(0, 1) = (2, 3, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il rango della matrice é 2, quindi $dim(Im(f)) = 2$ e $Im(f) =< (1, 0, 1), (2, 3, 0) >$. Perció $dim(N(f)) = 0$ e $N(f) = \{0\}$. L'applicazione é iniettiva ma non suriettiva.

Esempio 4.2.2

Ripetiamo l'esempio precedente ma ora esprimiamo la matrice associata a due basi differenti da quelle canoniche:

$$B_2 = \{(1,1),(2,1)\} \quad \text{base nel dominio}$$

$$B_3 = \{(1,1,0),(1,0,0),(1,2,1)\} \quad \text{base nel codominio.}$$

Per costruire tale matrice dobbiamo calcolare le immagini dei vettori della base B_2. Tali immagini si possono calcolare sfruttando la matrice A associata alla f rispetto alle basi canoniche:

$$f(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$f(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ora conosciamo le immagini,ma esse sono espresse rispetto alla base canonica di $\Re^3$, dobbiamo quindi convertirle rispetto alla base B_3:

$$(3,3,1) = (1,1,1)_{B_3}$$

$$(4,3,2) = (-1,3,2)_{B_3}$$

quindi la matrice associata alla f rispetto alle basi B_2 e B_3 é

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

da cui

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

é l'espressione dell'applicazione lineare rispetto a tali basi. Si noti che le dimensioni di Nucleo e Immagine sono invarianti rispetto ad un cambiamento di basi nel dominio e nel codominio.

Esempio 4.2.3

Siano $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^4$ una applicazione lineare tale che

$$f(e_1) = (1, 1, 1, 0)$$
$$f(e_2) = (1, 0, 1, 0)$$
$$f(e_3) = (0, 0, 0, 1).$$

La matrice associata a f rispetto alla base canonica in $\Re^4$ é allora

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3, quindi $dim(Im(f)) = 3$ (f non é suriettiva) e $dim(N(f)) = 0$ (f é iniettiva), inoltre l'espressione di f rispetto alle basi canoniche sia nel doimnio che nel codominio é

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.2.4

Sia $f : \Re^5 \to \Re^3$ definito da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3).$$

La matrice associata rispetto alle basi canoniche in $\Re^5$ e $\Re^3$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3. Quindi $dim(Im(f)) = 3$ (f é suriettiva) e $dim(N(f)) = 2$ (f non é iniettiva).

Una base dell'immagine é data da

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1).$$

Il generico vettore del Nucleo, $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ é dato da $x_3 = 0, x_1 = x_2 = x_4$, per cui

$$N(f) = \{(x_1, x_1, 0, x_1, x_5), \quad x_1, x_5 \in \Re\} =< (1, 1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) > .$$

Esempio 4.2.5

Sia $f : \Re^3 \to \Re^4$ definito da

$$f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 4x_2 - 9x_3, 4x_1 + 5x_2 - 9x_3, -9x_1 - 9x_2 + 9x_3, x_1 + x_2 + x_3).$$

La matrice associata rispetto alle basi canoniche in $\Re^3$ e $\Re^4$ é

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo la matrice associata a f rispetto alla base

$$B = \{(1,1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\} \quad \text{di} \quad \Re^3$$

ed alla base canonica in $\Re^4$.

Si devono calcolare le immagini dei vettori di B:

$$f(1,1,0) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -9 \\ 4 & 5 & -9 \\ -9 & -9 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -18 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ed in modo analogo

$$f(1,0,-1) = (14, 13, -18, 0) \quad f(0,1,-1) = (13, 14, -18, 0).$$

Allora la matrice associata a f rispetto a tali basi é

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & 14 & 13 \\ 9 & 13 & 14 \\ -18 & -18 & -18 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.2.6

Sia $f : \Re^4 \to \Re^2$ con matrice associata

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi

$$B_4 = \{(1,1,0,0),(1,0,0,0),(2,0,0,1),(0,0,1,0)\} \quad \text{in} \quad \Re^4$$

$$B_2 = \{(1,1),(1,0)\} \quad \text{in} \quad \Re^2.$$

Determiniamo la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.

Per prima cosa esprimiamo i vettori della base canonica di $\Re^4$ per componenti rispetto alla base B_4:

$$(1,0,0,0) = (0,1,0,0)_{B_4}$$

$$(0,1,0,0) = (1,-1,0,0)_{B_4}$$

$$(0,0,1,0) = (0,0,0,1)_{B_4}$$

$$(0,0,0,1) = (0,-2,1,0)_{B_4}.$$

Quindi calcoliamo le immagini di tali vettori utilizzando la matrice A:

$$f(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ed analogamente

$$f(1,-1,0,0) = (1,-2)$$

$$f(0,0,0,1) = (1,-1)$$

$$f(0,-2,1,0) = (0,0).$$

Tali immagini sono espresse per componenti rispetto alla base B_2 e quindi dobbiamo ora convertirle per componenti rispetto alla base canonica C_2 di $\Re^2$:

$$(0,1)_{B_2} = (1,0)_{C_2}$$

$$(1,-2)_{B_2} = (-1,1)_{C_2}$$

$$(1,-1)_{B_2} = (0,1)_{C_2}$$

$$(0,0)_{B_2} = (0,0)_{C_2}.$$

La matrice associata rispetto alle basi canoniche é allora

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e l'espressione dell'applicazione lineare nelle basi canoniche di dominio e codomino é

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\x_2+x_3\end{bmatrix}.$$

Esempio 4.2.7

Siano $f:\Re^4\to\Re^4$ e

$$B=\{(1,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0)\}$$

un base di $\Re^4$, tali che

$$f(1,0,0,-1)=(2,0,0,-1)$$
$$f(1,0,0,0)=(-1,0,1,0)$$
$$f(0,1,1,0)=(1,0,1,-1)$$
$$f(0,0,1,0)=(1,1,2,0).$$

La matrice associata a f rispetto alla base B nel dominio e alla base canonica nel codominio é

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&1&1\\0&0&0&1\\0&1&1&2\\-1&0&-1&0\end{bmatrix}.$$

Determiniamo la matrice associata a f rispetto alla base B anche nel codominio. Si devono esprimere le immagini dei vettori di B per componenti rispetto alla base B stessa, per cui, detta C la base canonica di $\Re^4$, si ha:

$$(2,0,0,-1)_C=(1,1,0,0)_B$$
$$(-1,0,1,0)_C=(0,-1,0,1)_B$$
$$(1,0,1,-1)_C=(1,0,0,1)_B$$
$$(1,1,2,0)_C=(0,1,1,1)_B$$

e la matrice associata é

$$A'=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&-1&0&1\\0&0&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

Infine determiniamo la matrice relativa ad f rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio:

Per prima cosa esprimiamo i vettori della base canonica C per componenti rispetto alla base B:

$$(1,0,0,0) = (0,1,0,0)_B$$
$$(0,1,0,0) = (0,0,1,-1)_B$$
$$(0,0,1,0) = (0,0,0,1)_B$$
$$(0,0,0,1) = (-1,1,0,0)_B$$

quindi calcoliamo le immagini di tali vettori tramite la matrice A:

$$f(0,1,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ed analogamente

$$f(0,0,1,-1) = (0,-1,-1,-1)$$
$$f(0,0,0,1) = (1,1,2,0)$$
$$f(-1,1,0,0) = (-3,0,1,1)$$

ed é chiaro che, avendo usato la matrice A, i risultati sono giá espressi per componenti rispetto alla base canonica. Quindi la matrice associata a f rispetto alla base canonica sia nel dominio che nel codominio é

$$A'' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed esprimiamo f come segue:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_3 - 3x_4 \\ -x_2 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ -x_2 + x_4 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.2.8

Sia $f : \Re^3 \to \Re^3$ associato alla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi

$$B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\} \quad \text{nel dominio}$$

$$C = \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\} \quad \text{nel codominio.}$$

Determiniamo una base per l'immagine in base canonica.

Poiché il rango dela matrice A é 2, la dimensione dell'immagine é appunto 2.

Le colonne $(1,2,3)$ e $(1,1,1)$ sono indipendenti, quindi esse rappresentano i 2 vettori che generano l'immagine.

Per definizione, essi compaiono nella matrice espressi per componenti rispetto alla base C, quindi per ottenere i vettori che generano l'immagine dobbiamo esprimerli rispetto alla base canonica:

$$(1,2,3)_C = 1(1,0,-1) + 2(1,0,1) + 3(0,1,0) = (3,3,1)$$

$$(1,1,1)_C = 1(1,0,-1) + 1(1,0,1) + 1(0,1,0) = (2,1,0).$$

Allora $Im(f) =< (3,3,1),(2,1,0) >$.

4.3 Endomorfismi e cambiamento di base.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n. Una applicazione lineare $f : V \to V$, in cui dominio e codominio coincidono é detta endomorfismo dello spazio V. Sia B una base di V. Relativamente ad essa, viene associata all'endomorfismo una matrice quadrata di ordine n. Al variare della base B, varia la matrice che rappresenta f. Ci proponiamo di osservare in quale modo tali matrici sono tra loro correlate.

Siano allora B e B' due distinte basi di V e A la matrice associata alla base B, A' quella associata a B'. Siano inoltre $v, w \in V$, tali che $f(v) = w$. Il vettore v avrá componenti $X = (x_1, .., x_n)$ rispetto alla base B e $X' = (x'_1, .., x'_n)$ rispetto a B'. Analogamente diciamo che il vettore w avrá componenti $Y = (y_1, .., y_n)$ rispetto a B e $Y' = (y'_1, .., y'_n)$ rispetto a B'. Per quanto detto nel capitolo dedicato agli spazi vettoriali, esiste una matrice C di cambiamento di base che ci permette di esprimere le componenti di un vettore in base B' in funzione di quelle in base B. In particolare abbiamo che

$$X' = C \cdot X \quad \text{e} \quad Y' = C \cdot Y.$$

Inoltre il fatto che $w = f(v)$ significa

$$Y = A \cdot X \quad \text{e} \quad Y' = A' \cdot X'.$$

Da $X = C^{-1} \cdot X'$ e $Y = C^{-1} \cdot Y'$ ne segue che

$$C^{-1} \cdot Y' = A \cdot C^{-1} \cdot X' \quad \text{e} \quad Y' = (C \cdot A \cdot C^{-1}) \cdot X'$$

cioé

$$A' = C \cdot A \cdot C^{-1}.$$

Ció vuol dire che le matrici associate ad uno stesso endomorfismo, relativamente a basi differenti, sono tra loro tutte simili.

Esempio 4.3.1

Siano $V = \Re^3$,

$$B = \{(1,1,0),(0,0,1),(1,0,1)\}$$

$$B' = \{(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$$

due basi di $\Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ un endomorfismo con matrice associata rispetto alla base B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rispetto a tale base l'endomorfismo si esprime:

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo la matrice associata a f rispetto alla base B', utilizzando sia il metodo esposto nei paragrafi precedenti, che quello appena illustrato.

Metodo 1. Per prima cosa esprimiamo i vettori di B' per componenti rispetto alla base B:

$$(0,1,0) = (1,1,-1)_B$$

$$(0,1,1) = (1,2,-1)_B$$

$$(1,0,0) = (0,-1,1)_B$$

quindi calcoliamo le immagini di tali vettori tramite la matrice A:

$$w_1 = f(1,1,-1) = (0,1,0)$$

$$w_2 = f(1,2,-1) = (0,1,1)$$

$$w_3 = f(0,-1,1) = (1,0,0).$$

Ricordiamo che per definizione della matrice A, tali immagini sono espresse per componenti rispetto alla base B, quindi

$$w_1 = (0,1,0)_B = (0,0,1)$$

$$w_2 = (0,1,1)_B = (1,0,2)$$

$$w_3 = (1,0,0)_B = (1,1,0)$$

e per ottenere la matrice A' non resta altro che esprimere tali vettori per componenti rispetto alla base B':

$$w_1 = (0,0,1) = (-1,1,0)_{B'}$$

$$w_2 = (1,0,2) = (-2,2,1)_{B'}$$

$$w_3 = (1,1,0) = (1,0,1)_{B'}.$$

La matrice A' associata a f in base B' é allora

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Metodo 2. Calcoliamo la matrice C di cambiamento di base da B a B'. Essa ha per colonne le componenti dei vettori di B rispetto alla base B':

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$A' = C \cdot A \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ci chiediamo allora se e quando esiste una base di V tale che un endomorfismo $f : V \to V$ sia rappresentabile nel modo piú semplice possibile, cioé tramite una matrice nella quale compaia il numero piú elevato possibile di elementi nulli. La condizione ideale sarebbe quella in cui la matrice associata a f si presenti in forma diagonale cioé

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

in modo tale che

$$f(X) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Per cui il problema che ci proponiamo di risolvere é il seguente : in quali casi esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata ad un endomorfismo di V sia diagonale? Osserviamo che nel caso ció sia possibile, la forma diagonale della matrice é rappresentativa di ogni altra matrice associata a f in ogni altra base, e tali matrici sono tra di esse tutte simili.

Esempio 4.3.2

Siano $V = \Re^3$,

$$B = \{(0,1,0),(1,-1,-1),(0,1,1)\}$$
$$B' = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,1,1)\}$$

due basi di $\Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ un endomorfismo con matrice associata rispetto alla base B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rispetto a tale base l'endomorfismo si esprime:

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Determiniamo la matrice associata a f rispetto alla base B'.

Calcoliamo la matrice C di cambiamento di base da B a B'. Essa ha per colonne le componenti dei vettori di B rispetto alla base B':

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$A' = C \cdot A \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e l'endomorfismo rispetto alla base B' si esprime:

$$f(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

In quanto segue, dapprima esporremo un metodo per determinare in quali casi é possibile ottenere una forma diagonale della matrice associata ad un endomorfismo ed infine osserveremo quale sia tale forma.

4.4 Autovalori ed autovettori di un endomorfismo.

Siano $V = \Re^n$ e $f : V \to V$ un endomorfismo di V e $A = [a_{ij}]$ la matrice quadrata di ordine n associata a f in una certa base B. Indichiamo con $X \in \Re^n$ un generico vettore di V, $f(X) = A \cdot X$.

Ci chiediamo se possano esistere vettori $X \in V$, la cui immagine $f(X)$ sia un vettore proporzionale a X, cioé $f(X) = A \cdot X = hX$, per qualche opportuno $h \in \Re$. Chiaramente il vettore nullo $0 \in V$ soddisfa tale proprietá, $f(0) = h \cdot 0$, per cui ci poniamo nel caso in cui la ricerca é fatta per vettori $X \neq 0$. La determinazione di tali vettori si riduce alla risoluzione del sistema lineare $A \cdot X = h \cdot X$ che si puó scrivere come segue:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = hx_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = hx_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = hx_n \end{cases}$$

o meglio ancora, come sistema lineare omogeneo $(A - hI)X = 0$:

$$\begin{cases} (a_{11} - h)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - h)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - h)x_n = 0 \end{cases}.$$

Tale sistema ammette soluzioni non banali solo quando $p(h) = det(A - hI) = 0$. Il polinomio $p(h) = det(A - hI)$ é detto polinomio caratteristico di f (o di A) ed ha grado n. Analogamente l'equazione $p(h) = 0$ é detta equazione caratteristica di f (o di A) ed ha n soluzioni (reali o non reali, distinte o coincidenti).

Si osservi che da ora in poi ci riferiremo al polinomio caratteristico di un endomorfismo o di una matrice ad esso associata senza alcuna distinzione.

Le radici reali del polinomio caratteristico sono dette autovalori di f. In corrispondenza di ciascun autovalore h_0, il sistema lineare omogeneo $(A - h_0 I)X = 0$ ammette sempre soluzioni non banali. I vettori X che ricoprono l'insieme V_0 di tali soluzioni sono detti autovettori di f relativi all'autovalore h_0

$$V_0 = \{0 \neq X \in V, \quad (A - h_0 I)X = 0\}.$$

Il sottospazio vettoriale $V_0 \cup \{0\}$ ricoperto da tali autovettori é detto autospazio di f relativo all'autovalore h_0.

Esempio 4.4.1

Siano $V = \Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ con matrice associata rispetto alla base canonica di $\Re^3$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1-h & 2 & 2 \\ 1 & 3-h & 1 \\ 2 & 2 & 1-h \end{vmatrix} = 0$$

cioé

$$(h+1)(-h^2+6h-5) = 0.$$

Tali soluzioni sono: $h_1 = -1$, $h_2 = 5$, $h_3 = 1$, ciascuna con molteplicitá algebrica 1 come radici del polinomio caratteristico.

Determiniamo gli autospazi relativi a ciascun autovalore:

Per $h_1 = -1$,

$$A - h_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_1 = -1$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$. Per cui il generico autovettore relativo a h_1 é $X = (-a, 0, a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_1 é

$$V_1 = \{(-a, 0, a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_1) = 1$.

Per $h_2 = 5$,

$$A - h_2 I = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_2 = 5$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$. Per cui il generico autovettore relativo a h_2 é $X = (a, a, a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_2 é

$$V_2 = \{(a, a, a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_2) = 1$.

Per $h_3 = 1$**,**

$$A - h_3 I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} .$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_3 = 1$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = x_3$, $x_2 = -x_3$. Per cui il generico autovettore relativo a h_3 é $X = (a, -a, a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_3 é

$$V_3 = \{(a, -a, a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_3) = 1$.

Definizione. Chiameremo molteplicitá algebrica di un autovalore, la sua molteplicitá come radice del polinomio caratteristico e molteplicitá geometrica di un autovalore, la dimensione dell'autospazio associato ad esso.

Osservazione. Una matrice diagonale ha come autovalori gli elementi presenti sulla sua diagonale principale, infatti se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

allora

$$A - hI = \begin{bmatrix} a_{11} - h & 0 & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & a_{22} - h & 0 & ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} - h & ... & ... & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & ... & a_{nn} - h \end{bmatrix}$$

e $det(A - hI) = (a_{11} - h)(a_{22} - h) \cdots (a_{nn} - h)$, le cui radici sono

$$h_1 = a_{11}, \quad h_2 = a_{22}, \quad ..., \quad ..., \quad h_n = a_{nn}.$$

Teorema 4.4.1 *Siano $A, B \in M_n(\Re)$ due matrici simili, cioé esista una matrice non singolare $C \in M_n(\Re)$ tale che $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$. Siano Y_i autovettori di B. Allora A e B hanno gli stessi autovalori $h_1, ..., h_m$ ed inoltre $X_i = C \cdot Y_i$ sono autovettori di A, per ogni autovettore Y_i di B.*

4.5 Endomorfismi diagonalizzabili.

Sia $f : \Re^n \to \Re^n$ un endomorfismo di $V = \Re^n$ e siano B e B' due distinte basi di $\Re^n$. Indichiamo con A la matrice associata a f rispetto alla base B e con A' quella associata a f rispetto a B'. Come visto in precedenza, le matrici A e A' sono simili e quindi esse hanno gli stessi autovalori. Quindi, piú in generale, diciamo che tutte le matrici relative ad uno stesso endomorfismo possiedono gli stessi autovalori, indipendentemente dalla base rispetto alla quale sono costruite.

Diremo che l'endomorfismo f é diagonalizzabile se esiste una base di $\Re^n$, rispetto alla quale la matrice associata a f sia diagonale.

Analogamente diremo che una matrice A é diagonalizzabile se é simile ad una matrice diagonale, cioé se esiste una matrice non singolare P tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia diagonale. La matrice P sará detta matrice diagonalizzante di A.

Teorema 4.5.1 *Siano $h_1, .., h_m$ autovalori distinti di f e $x_1, .., x_m$ autovettori d f tali che ogni x_i sia autovettore relativo a h_i, per ogni $i = 1, ..., m$. Allora i vettori $x_1, .., x_m$ sono linearmente indipendenti.*

Da questo teorema segue che se V_i e V_j sono autospazi relativi a due autovalori distinti $h_i \neq h_j$, allora $V_i \cap V_j = \{0\}$ e quindi la somma $V_i \oplus V_j$ é diretta.

Siano ora $a_1, a_2, .., a_m$ le molteplicitá algebriche rispettivamente degli autovalori $h_1, h_2, .., h_m$, come radici del polinomio caratteristico. Allora $a_1 + a_2 + ... + a_m = n$.

Supponiamo che per ogni autovalore h_i, la sua molteplicitá algebrica a_i coincida con la sua molteplicitá geometrica $g_i = dim(V_i)$ (la dimensione dell'autospazio relativo a h_i). Allora si ha che

$$dim(V_1) + dim(V_2) + ... + dim(V_m) = n = dim(V)$$

cioé

$$V_1 \oplus V_2 \oplus ..... \oplus V_m = V = \Re^n$$

ed inoltre l'unione delle basi di tutti gli autospazi costituisce una base di $V = \Re^n$.

Rispetto a tale base, la matrice associata all'endomorfismo é diagonale. Le colonne della matrice diagonalizzante sono costituite dagli autovettori di f che costituiscono una base per $\Re^n$. Vale il seguente:

Teorema 4.5.2 *Sia dato l'endomorfismo $f : \Re^n \to \Re^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*
i) f é diagonalizzabile;
ii) ogni autovalore di f possiede una molteplicitá algebrica ed una geometrica coincidenti;
iii) esiste una base dello spazio $\Re^n$ che é costituita da n autovettori di f.

Esempio 4.5.1

Siano $V = \Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_1 + 4x_3)$. La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\Re^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1-h & 0 & 0 \\ 0 & 1-h & 0 \\ 1 & 0 & 4-h \end{vmatrix} = 0$$

cioé

$$(1-h)^2(4-h) = 0.$$

Tali soluzioni sono: $h_1 = 4$, con molteplicitá algebrica $a_1 = 1$ e $h_2 = 1$, con molteplicitá algebrica $a_2 = 2$.

Determiniamo gli autospazi relativi a ciascun autovalore:

Per $h_1 = 4$**,**

$$A - h_1 I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} -3x_1 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_1 = 4$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = x_2 = 0$. Per cui il generico autovettore relativo a h_1 é $X = (0, 0, a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_1 é

$$V_1 = \{(0, 0, a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_1) = 1$ e $V_1 =< (0, 0, 1) >$.

Per $h_2 = 1$**,**

$$A - h_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\left\{ \; x_1 + 3x_3 = 0 \; . \right.$$

Il rango di tale sistema é 1, quindi vi sono ∞^2 soluzioni, cioé ∞^2 autovettori relativi a $h_2 = 1$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = -3x_3$. Per cui il generico autovettore relativo a h_2 é $X = (-3a, b, a)$, al variare di $a, b \in \Re$, e l'autospazio associato a h_2 é

$$V_2 = \{(-3a, b, a) \in \Re^3, \quad a, b \in \Re\}$$

con $dim(V_2) = 2$ e $V_2 =< (-3, 0, 1), (0, 1, 0) >$.

Per ogni autovalore le molteplicitá algebrica e geometrica coincidono, quindi la matrice é diagonalizzabile, l'unione delle basi degli autospazi é una base per $\Re^3$

$$B = \{(0, 0, 1), (-3, 0, 1), (0, 1, 0)\}$$

e la matrice associata a f rispetto a tale base é diagonale.

La matrice diagonalizzante é formata dagli autovettori che costituiscono la base per $\Re^3$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-1} \cdot A \cdot P =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.5.2

Siano $V = \Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2 + x_3, x_3)$. La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\Re^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1-h & 0 & 1 \\ 0 & 1-h & 1 \\ 0 & 0 & 1-h \end{vmatrix} = 0$$

cioé

$$(1-h)^3 = 0.$$

Tali soluzioni sono: $h_1 = 1$, con molteplicitá algebrica $a_1 = 3$.

Determiniamo l'autospazio relativo all'unico autovalore:

$$A - h_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\left\{ x_3 = 0 \right. .$$

Il rango di tale sistema é 1, quindi vi sono ∞^2 soluzioni, cioé ∞^2 autovettori relativi a $h_1 = 1$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_3 = 0$. Per cui il generico autovettore relativo a h_1 é $X = (a, b, 0)$, al variare di $a, b \in \Re$, e l'autospazio associato a h_1 é

$$V_1 = \{(a, b, 0) \in \Re^3, \quad a, b \in \Re\}$$

con $dim(V_1) = 2$ e $V_1 =< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >$. Le molteplicitá algebrica e geometrica non coincidono, quindi la matrice non é diagonalizzabile, cioé non esiste alcuna base rispetto alla quale l'endomorfismo sia rappresentabile attraverso una matrice diagonale.

Esempio 4.5.3

Siano $V = \Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\Re^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 2-h & 0 & 1 \\ 0 & 2-h & -1 \\ 1 & -1 & 1-h \end{vmatrix} = 0$$

cioé

$$(2-h)(h^2-3h)=0.$$

Tali soluzioni sono: $h_1=2$, con molteplicitá algebrica $a_1=1$, $h_2=0$, con molteplicitá algebrica $a_2=1$, $h_3=3$, con molteplicitá algebrica $a_3=1$.

Determiniamo gli autospazi relativi a ciascun autovalore:

Per $h_1 = 2$**,**

$$A-h_1I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} x_3=0 \\ x_1-x_2-x_3=0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_1=2$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1=x_2$, $x_3=0$. Per cui il generico autovettore relativo a h_1 é $X=(a,a,0)$, al variare di $a\in\Re$, e l'autospazio associato a h_1 é

$$V_1=\{(a,a,0)\in\Re^3, \quad a\in\Re\}$$

con $dim(V_1)=1$ e $V_1=<(1,1,0)>$.

Per $h_2 = 0$**,**

$$A-h_2I=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} 2x_1+x_3=0 \\ 2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+x_3=0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_2=0$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1=-x_2=-\frac{x_3}{2}$. Per cui il generico autovettore relativo a h_2 é $X=(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)$, al variare di $a\in\Re$, e l'autospazio associato a h_2 é

$$V_2=\{(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},a)\in\Re^3, \quad a\in\Re\}$$

con $dim(V_2)=1$ e $V_2=<(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)>$.

Per $h_3 = 3$**,**

$$A-h_3I=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_3 = 3$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = -x_2 = x_3$. Per cui il generico autovettore relativo a h_3 é $X = (a, -a, a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_3 é

$$V_3 = \{(a, -a, a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_3) = 1$ e $V_3 =< (1, -1, 1) >$.

Per ogni autovalore le molteplicitá algebrica e geometrica coincidono, quindi la matrice é diagonalizzabile, l'unione delle basi degli autospazi é una base per $\Re^3$

$$B = \{(1, 1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), (1, -1, 1)\}$$

e la matrice associata a f rispetto a tale base é diagonale:

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

La matrice diagonalizzante é formata dagli autovettori che costituiscono la base per $\Re^3$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio 4.5.4

Siano $V = \Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, 3x_2, 3x_1)$. La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\Re^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 3-h & 1 & 1 \\ 0 & 3-h & 0 \\ 3 & 0 & -h \end{vmatrix} = 0$$

cioé

$$-h(3-h)^2 = 0.$$

Tali soluzioni sono: $h_1 = 0$, con molteplicitá algebrica $a_1 = 1$, $h_2 = 3$, con molteplicitá algebrica $a_2 = 2$,

Determiniamo gli autospazi relativi a ciascun autovalore:

Per $h_1 = 0$,

$$A - h_1 I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 = 0 \\ 3x_1 = 0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_1 = 0$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_1 = x_2 = 0$. Per cui il generico autovettore relativo a h_1 é $X = (0,0,a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_1 é

$$V_1 = \{(0,0,a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_1) = 1$ e $V_1 =< (0,0,1) >$.

Per $h_2 = 3$,

$$A - h_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ed il sistema lineare omogeneo associato é:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}.$$

Il rango di tale sistema é 2, quindi vi sono ∞^1 soluzioni, cioé ∞^1 autovettori relativi a $h_2 = 3$. Essi si ottengono risolvendo il sistema omogeneo: $x_2 = 0$, $x_1 = x_3$. Per cui il generico autovettore relativo a h_2 é $X = (a,0,a)$, al variare di $a \in \Re$, e l'autospazio associato a h_2 é

$$V_2 = \{(a,0,a) \in \Re^3, \quad a \in \Re\}$$

con $dim(V_2) = 1$ e $V_2 =< (1,0,1) >$. L'autovalore $h_2 = 3$ ha le molteplicitá differenti, quindi la matrice non é diagonalizzabile.

Corollario.*Se gli autovalori di un endomorfismo f sono tutti distinti tra loro, cioé ciascuno di essi ha molteplicitá algebrica 1, allora f é certamente diagonalizzabile.*

Osservazione. Esiste una classe di matrici (e quindi di endomorfismi) per le quali siamo certi della loro diagonalizzabilitá: sono le matrici simmetriche (gli endomorfismi rappresentati da matrici simmetriche). Vale il seguente:

Teorema 4.5.3 *Sia $A \in M_n(\Re)$ una matrice simmetrica. Esiste una matrice non singolare $P \in M_n(\Re)$ tale che $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sia una matrice diagonale. Inoltre la matrice diagonalizzante P é costituita da vettori colonna tra loro ortogonali.*
Parallelamente, per ogni endomorfismo f di $\Re^n$, che sia rappresentato da una matrice simmetrica, esiste una base di $\Re^n$, composta da autovettori di f tra loro ortogonali (si dice base ortogonale), rispetto alla quale f é rappresentabile tramite una matrice diagonale.

Esempio 4.5.5

Siano $V = \Re^3$ e $f : \Re^3 \to \Re^3$ tale che $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1, x_1)$. La matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\Re^3$ é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che é simmetrica. Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} 1-h & 1 & 1 \\ 1 & -h & 0 \\ 1 & 0 & -h \end{vmatrix} = 0$$

cioé

$$h(h-2)(h+1) = 0.$$

Tali soluzioni sono: $h_1 = 0$, con molteplicitá algebrica $a_1 = 1$, $h_2 = 2$, con molteplicitá algebrica $a_2 = 1$, $h_3 = -1$ con molteplicitá algebrica $a_3 = 1$. La matrice é diagonalizzabile ed una sua forma diagonale é

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per ottenere la quale si utilizza la matrice diagonalizzante

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

le cui colonne sono gli autovettori, tra loro ortogonali, che costituiscono una base di $\Re^3$ rispetto alla quale A' é la matrice associata a f.

4.6 Esercizi.

Esercizio 4.6.1 *Sia* $f : \Re^3 \longrightarrow \Re^4$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, x_3, 0)$. *Determinare nucleo, immagine ed una loro base.*

Esercizio 4.6.2 *Sia* $f : \Re^4 \longrightarrow \Re^3$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_1 + x_3)$. *Determinare nucleo, immagine ed una loro base.*

Esercizio 4.6.3 *Sia* $f : \Re^3 \longrightarrow \Re^4$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_2 - x_3, x_2 - x_3)$. *Determinare nucleo, immagine ed una loro base.*

Esercizio 4.6.4 *Sia* $f : \Re^4 \longrightarrow \Re^3$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, 2x_1 - x_2 + x_4, -x_1 + x_2 + x_4)$. *Determinare nucleo, immagine ed una loro base.*

Esercizio 4.6.5 *Sia* $f : \Re^2 \longrightarrow \Re^3$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_2, x_1)$. *Determinare la matrice associata alla* f *rispetto alle seguenti basi:*

$$B_1 = \{(1,1), (2,1)\} \quad di \quad \Re^2$$

$$B_2 = \{(1,1,0), (1,0,0), (1,2,1)\} \quad di \quad \Re^3.$$

Esercizio 4.6.6 *Sia* $f : \Re^3 \longrightarrow \Re^4$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, x_1 + x_2, x_3)$. *Determinare la matrice associata alla* f *rispetto alle basi canoniche in* $\Re^3$ *e* $\Re^4$.

Esercizio 4.6.7 *Sia* $f : \Re^5 \longrightarrow \Re^3$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3)$. *Determinare la matrice associata alla* f *rispetto alle basi canoniche in* $\Re^3$ *e* $\Re^5$.

Esercizio 4.6.8 *Sia* $f : \Re^3 \longrightarrow \Re^4$ *una applicazione lineare cosí definita:* $f(x_1, x_2, x_3) = (5x_1 + 4x_2 - 9x_3, 4x_1 + 5x_2 - 9x_3, -9x_1 - 9x_2 + 9x_3, x_1 + x_2 + x_3)$. *Determinare la matrice associata alla* f *rispetto alla base canonica in* $\Re^4$ *e* $B = \{(1,1,0), (1,0,-1), (0,1,-1)\}$ *in* $\Re^3$.

Esercizio 4.6.9 *Sia* $f : \Re^4 \longrightarrow \Re^2$ *una applicazione lineare avente matrice associata*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi

$$B_1 = \{(1,1), (1,0)\} \quad di \quad \Re^2$$

$$B_2 = \{(1,1,1,0), (1,0,0,0), (2,0,0,1), (0,0,1,0)\} \quad di \quad \Re^4.$$

Determinare la matrice associata a f *rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.*

Esercizio 4.6.10 *Sia* $f : \Re^4 \longrightarrow \Re^4$ *l'endomorfismo avente matrice associata*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

rispetto alla base

$$B = \{(1,0,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,0)\} \quad di \quad \Re^4$$

sia nel dominio che nel codominio. Determinare la matrice associata a f *rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.*

Esercizio 4.6.11 *Sia* $f : \Re^3 \longrightarrow \Re^3$ *l'endomorfismo avente matrice associata*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

rispetto alle basi

$$B_1 = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\} \quad \textit{nel dominio}$$

$$B_2 = \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,0)\} \quad \textit{nel codominio.}$$

Determinare la matrice associata a f *rispetto alle basi canoniche sia nel dominio che nel codominio.*

Esercizio 4.6.12 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.6.13 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.6.14 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.6.15 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.6.16 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.6.17 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.6.18 *Determinare gli autovalori, una base per gli autospazi e, quando possibile, la matrice diagonalizzante della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 5

La forma canonica di Jordan.

5.1 La forma canonica di Jordan.

Sia $f : \Re^n \longrightarrow \Re^n$ un endomorfismo. Abbiamo in precedenza analizzato in quali casi tale endomorfismo sia diagonalizzabile, cioé quando esista una base di $\Re^n$ composta da autovettori di f, rispetto alla quale la matrice associata all'endomorfismo si presenti in forma diagonale. In sostanza abbiamo visto che, quando f é diagonalizzabile, tutte le matrici che si possono ad esso associare, in una qualsiasi base di $\Re^n$, sono tra loro simili e tutte simili ad una matrice diagonale. Abbiamo concluso che non tutti gli endomorfismi, e quindi non tutte le matrici, sono diagonalizzabili. Ci proponiamo ora di affrontare l'analisi di una classe di matrici sufficientemente semplici, in modo tale che ogni matrice quadrata sui reali sia simile ad una di esse, e di conseguenza ogni endomorfismo possa essere rappresentato, in una qualche base, da una di queste matrici, dette forme canoniche. Fra tutte tali forme, certamente la piú semplice é la forma canonica di Jordan.

Diciamo Blocco di Jordan di ordine p e relativo allo scalare $\alpha \in \Re$, la matrice

$$J_p(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

cioé gli elementi a_{ij} della matrice sono

$$a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad i = j \\ 1 & \text{se} \quad j = i + 1 \\ 0 & \text{negli altri casi} \end{cases}$$

Diremo che una matrice $A \in M_n(\Re)$ é in forma canonica di Jordan se essa presenta la seguente forma diagonale a blocchi di Jordan

$$A = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{n_3}(\alpha_3) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{n_4}(\alpha_4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{n_{r-1}}(\alpha_{r-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{n_r}(\alpha_r) \end{bmatrix}$$

dove ogni $J_{n_i}(\alpha_i)$ é un blocco di Jordan di ordine n_i relativo ad un qualche scalare α_i ed ovviamente $\sum_i n_i = n$.

Esempio 1 ***.**

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(3) & 0 \\ 0 & J_2(2) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_3(2) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(4) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(3) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1(2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1(4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(5) \end{bmatrix}.$$

Notiamo allora che le matrici diagonali sono delle particolari matrici di Jordan, con un numero di blocchi pari all'ordine della matrice stessa ed ogni blocco ha ordine 1.

Teorema. *Sia $A \in M_n(\Re)$ una matrice il cui polinomio caratteristico abbia tutte radici reali. Allora esiste una matrice non singolare $C \in M_n(\Re)$ tale che la matrice $C^{-1}AC$ sia in forma canonica di Jordan. In altre parole, per ogni endomorfismo f di $\Re^n$ avente tutti gli autovalori nel campo reale, esiste una base di $\Re^n$, rispetto alla quale, la matrice associata a tale endomorfismo sia in forma canonica di Jordan.*

Sia A la matrice e indichiamo con

$$P(X) = (X - \lambda_1)^{r_1} \cdot (X - \lambda_2)^{r_2} \cdot \cdots \cdot (X - \lambda_h)^{r_h}$$

il suo polinomio caratteristico, in cui $\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3, ..., \lambda_h$ sono tutti gli autovalori di A, tra loro distinti e tali che l'autovalore λ_i abbia molteplicitá algebrica, come radice del polinomio caratteristico, pari a r_i, con $\sum_i r_i = n$. Indichiamo con A' la forma canonica di Jordan simile alla A. Gli scalari rispetto ai quali i blocchi di Jordan della A' vengono costruiti sono proprio gli autovalori della matrice A, cioé per ogni autovalore di A esiste almeno un blocco di Jordan in A'.

A questo punto, per poter effettivamente costruire la matrice nella sua forma canonica di Jordan, é necessario rispondere alle due seguenti domande:
1) Quanti sono i blocchi di Jordan relativi a ciascun autovalore?
2) Quale deve essere l'ordine di ciascun blocco?

5.2 Numero totale di blocchi relativi ad uno stesso autovalore.

Sia λ un autovalore di A con molteplicitá geometrica pari a m, cioé sia $dim(V_\lambda) = m$, dove V_λ é l'autospazio associato a λ. Supponiamo che tutti gli autovalori di A siano reali, quindi esiste una forma canonica di Jordan A' di A. Allora il numero di blocchi di Jordan in A' relativi all'autovalore λ é proprio m.

In particolare, per ogni autovalore per il quale le molteplicitá algebrica e geometrica coincidano (diciamo m per entrambi i valori), allora nella A' compaiono m blocchi relativi all'autovalore e tutti con ordine 1.

Esempio 2 *.
Sia $A \in M_2(\Re)$ con autovalori λ_1, λ_2.

Se i due autovalori sono distinti, allora sappiamo che la dimensione geometrica di entrambi é 1, per cui esiste un blocco di Jordan per ognuno dei due autovalori e ciascun blocco ha ordine 1, cioé la matrice é diagonalizzabile, la forma di Jordan coincide con quella diagonale ed essa é $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

Se i due autovalori coincidono ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) e la dimensione dell'autospazio associato é 2, allora esitono due blocchi di Jordan relativi all'autovalore, ciascuno con ordine 1. Anche in questo caso la matrice é diagonalizzabile e la forma canonica di Jordan si riduce alla semplice forma diagonale $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Se i due autovalori coincidono ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) ma la dimensione dell'autosazio associato é 1, allora esiste un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore, ed esso deve avere necessariamente ordine 2. La forma canonica di Jordan é in tale caso $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Esempio 3 *.

Sia $A \in M_3(\Re)$ e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Re$ gli autovalori di A.

Se i tre autovalori sono tutti distinti allora la matrice é diagonalizzabile. Infatti ogni autospazio ha dimensione 1 e quindi esiste un solo blocco relativo ad ogni autovalore ed ogni blocco ha ordine 1. La forma canonica di Jordan si riduce a quella diagonale ed é $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Supponiamo ora che $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e λ_3 sia distinto dai primi due.

Se la molteplicitá geometrica di λ é 2, allora vi sono due blocchi di Jordan relativi a λ ed ovviamente uno relativo a λ_3, per cui ciascun blocco dovrá avere ordine 1, e la matrice é diagonalizzabile, con forma canonica $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Al contrario, se la molteplicitá geometrica di λ é 1, allora esiste un solo blocco di Jordan relativo a λ. Poiché il blocco relativo a λ_3 deve necessariamente avere ordine 1, allora il blocco relativo a λ ha ordine due, e la forma canonica é $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

Infine consideriamo il caso in cui i tre autovalori siano tutti coincidenti col valore λ.

Se la molteplicitá geometrica dell'autovalore é anche 3, allora la forma canonica di Jordan si riduce a forma diagonale $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Se la molteplicitá geometrica dell'autovalore é 2 allora esistono due blocchi di Jordan relativi ad esso, quindi uno di questi avrá ordine 2 e l'altro avrá ordine 1. La forma canonica sará $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$. Se la molteplicitá geometrica dell'autovalore é 1, esiste un solo blocco di Jordan relativo ad esso e la forma canonica é $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Esempio 4 *.

Sia $A \in M_6(\Re)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico é $det(A - \lambda I) = \lambda^3(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$, cioé $\lambda_1 = 2$ é autovalore con molteplicitá algebrica 1, quindi esisterá un solo blocco relativo ad esso ed avrá ordine 1.

$\lambda_2 = 0$ é autovalore con molteplicitá algebrica 3, mentre l'autospazio ad esso associato ha dimensione 1. Esiste allora un solo blocco di Jordan ad esso relativo.

Infine l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 1$ ha dimensione 2, quindi vi sono due blocchi di Jordan ad esso relativi, necessariamente entrambi di ordine 1.

La forma canonica sará:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_3(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_1(2) \end{bmatrix}.$$

Esempio 5 *.
Sia $A \in M_3(\Re)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 39 \\ 0 & -5 & -14 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico é $(\lambda - 1)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$. Quindi un autovalore é $\lambda_1 = -1$ con molteplicitá algebrica e geometrica pari ad 1, per cui ad esso é associato un solo blocco di Jordan di ordine 1.

L'altro autovalore é $\lambda_2 = 1$ con molteplicitá algebrica 2. La dimensione dell'autospazio ad esso associato é 1, quindi vi é un solo blocco ad esso corrispondente, ed ovviamente deve avere ordine 2. La forma canonica della matrice é allora

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.3 Ordine massimo di un blocco in matrici con un unico autovalore.

Quanto detto fino ad ora é sufficiente per determinare una eventuale forma canonica di una matrice con un ordine due o tre. Occupiamoci ora di come determinare gli ordini dei blocchi in matrici che presentino un unico autovalore, nel caso in cui la matrice $A \in M_n(\Re)$ da riportare in forma canonica A' abbia un ordine superiore o uguale a 4.

Sia λ l'autovalore della matrice A, ossia il polinomio caratteristico sia $det(A-\lambda I)^n$ e si consideri $B = A-\lambda I$, dove I sia la matrice identica di ordine n. Supponiamo che $B^m = 0$ per qualche intero m (si dice in tal caso che la matrice B é nilpotente). Indichiamo con

$$r = min\{t \in N \quad : \quad B^t = 0\}$$

dove indichiamo con 0 la matrice nulla (con ogni elemento nullo). Chiamiamo r indice di nilpotenza di B.

Allora esisterá certamente almeno un blocco di Jordan relativo a λ che abbia ordine r ed ogni altro eventuale blocco di Jordan relativo a λ avrá un ordine minore o al piú uguale a r.

Esempio 6 *.
Sia $A \in M_6(\Re)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico é $det(A-\lambda I) = (\lambda-1)^6$, cioé $\lambda = 1$ é autovalore con molteplicitá algebrica 6.

L'autospazio associato é

$$V = \{(a-b, -b, a, 0, b, b), \quad a, b \in \Re\}$$

che ha quindi dimensione 2. Vi sono allora due blocchi relativi all'autovalore $\lambda = 1$.

Calcolando l'indice di nilpotenza della matrice $B = A - \lambda I = A - I$, si avrá $B^5 = 0$, cioé uno dei due blocchi ha ordine 5, quindi l'altro deve avere necessariamente ordine 1. La forma canonica della matrice é

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_5(1) & 0 \\ 0 & J_1(1) \end{bmatrix}.$$

5.4 Numero di blocchi di uno certo ordine relativi ad uno stesso autovalore.

Sia al solito $A \in M_n(\Re)$ con autovalori $h_1, ..., h_m$. Fissiamo un h_0 autovalore di A. Abbiamo precedentemente visto che il numero totale di blocchi di Jordan relativi a h_0 é pari alla dimensione dell'autospazio associato a h_0, cioé la molteplicitá geometrica di h_0. Inoltre l'ordine massimo di questi blocchi é dato dall'indice t di nilpotenza della matrice $A - h_0 I$.

Ci proponiamo ora di risolvere l'ultimo problema nella costruzione della forma canonica di Jordan di una matrice: fissiamo l'intero $k \leq t$. Ci chiediamo quanti blocchi di ordine k sono associati all'autovalore h_0.

Useremo la seguente notazione:

$$r_i = rango(A - h_0 I)^i, \quad \text{per ogni} \quad i = 1, 2, 3, ..., t.$$

Se $k = 1$ allora il numero di blocchi di ordine 1 relativi a h_0 é pari a

$$n - 2r_1 + r_2.$$

Per $k \geq 2$ vale la seguente tabella, in cui sono riportati a sinistra gli ordini di tutti i blocchi che eventualmente si possono presentare, e a destra il numero di tali blocchi:

ORDINE DEI BLOCCHI	NUMERO DEI BLOCCHI
2	$r_1 - 2r_2 + r_3$
3	$r_2 - 2r_3 + r_4$
4	$r_3 - 2r_4 + r_5$
5	$r_4 - 2r_5 + r_6$
6	$r_5 - 2r_6 + r_7$
...	....
...	....
...	....
k	$r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$

Esempio. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'equazione caratteristica é $det(A - hI) = (1-h)^5(2-h)^3 = 0$, da cui otteniamo gli autovalori $h_1 = 1$ con molteplicitá algebrica 5, $h_2 = 2$ con molteplicitá algebrica 3.

L'autospazio relativo all'autovalore $h_1 = 1$ ha dimensione 2, quindi vi sono 2 blocchi di Jordan relativi a tale autovalore. Inoltre:

$$A - h_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 6, quindi $r_1 = 6$.

$$(A - h_1 I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 4, quindi $r_2 = 4$.

$$(A - h_1 I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3, quindi $r_3 = 3$.

$$(A - h_1 I)^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 3, quindi $r_4 = 3$. Quindi

ORDINE DEI BLOCCHI	NUMERO DEI BLOCCHI
1	0
2	1
3	1

c'é un blocco di ordine 2 ed uno di ordine 3 relativi all'autovalore $h_1 = 1$.

Passiamo all'autovalore $h_2 = 2$.

$$A - h_2 I = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 6, quindi $r_1 = 6$ e vi sono in totale 2 blocchi relativi a tale autovalore.

$$(A - h_2 I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & -8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5, quindi $r_2 = 5$.

$$(A - h_2 I)^3 = \begin{bmatrix} -1 & 12 & -21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 5, quindi $r_3 = 5$. Quindi

ORDINE DEI BLOCCHI	NUMERO DEI BLOCCHI
1	1
2	1

c'é un blocco di ordine 1 ed uno di ordine 2 relativi all'autovalore $h_2 = 2$.
Quindi una forma canonica di Jordan della matrice di partenza é la seguente:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Osservazione finale. L'ordine con cui i blocchi compaiono nella forma canonica di Jordan non é fondamentale per l'individuazione della forma canonica stessa. Si dice infatti che la forma canonica ottenuta é unica a meno di permutazioni dei blocchi di Jordan di cui é composta. Permutando tali blocchi si ottiene comunque una forma canonica che sia simile a quella precedente. Tale permutazione corrisponde di fatto alla scelta di una differente base di $\Re^n$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta l'endomorfismo é ancora espressa in forma canonica di Jordan.

(*) Tutti gli esempi sono tratti da
Edoardo Sernesi, Geometria 1, Bollati Boringhieri.

5.5 Esercizi.

Esercizio 5.5.1 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.5.2 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.5.3 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.5.4 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 14 & 39 \\ 0 & -5 & -14 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.5.5 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.5.6 *Determinare la forma canonica di Jordan della seguente matrice:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Capitolo 6

Le forme bilineari e le forme quadratiche reali.

6.1 Introduzione.

Siano K un campo e V, W due spazi vettoriali su K, rispettivamente di dimensione n e m. La applicazione $f : V \times W \longrightarrow K$ che fa corrispondere ad una coppia di vettori $(v, w) \in V \times W$ uno scalare $f(v, w) \in K$, é detta forma bilineare se valgono le seguenti proprietá: per ogni $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$, $\alpha, \beta \in K$

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha f(v_1, w) + \beta f(v_2, w)$$

$$f(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha f(v, w_1) + \beta f(v, w_2).$$

In sostanza la f é lineare sia in V che in W.

Esempio. La applicazione $f : \Re^2 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$, definita da $f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_3)$, é una forma bilineare. Per dimostrarlo é sufficiente verificare che per ogni $a, b \in \Re$, $(x_1, x_2), (x_1', x_2') \in \Re^2$, $(y_1, y_2, y_3), (y_1', y_2', y_3') \in \Re^3$, si abbia

$$f(a(x_1, x_2) + b(x_1', x_2'), (y_1, y_2, y_3)) = af((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) + bf((x_1', x_2'), (y_1, y_2, y_3))$$

e

$$f((x_1, x_2), a(y_1, y_2, y_3) + b(y_1', y_2', y_3')) = af((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) + bf((x_1, x_2), (y_1', y_2', y_3')).$$

Proprietá. Siano 0_V e 0_W rispettivamente il vettore nullo in V e quello nullo in W. Allora $f(0_V, w) = 0$ e $f(v, 0_W) = 0$, per ogni $v \in V$, $w \in W$.

6.2 Forme bilineari e matrici.

Sia $f : V \times W \longrightarrow K$ una forma bilineare e siano rispettivamente $B = \{b_1, b_2, .., b_n\}$ e $C = \{c_1, c_2, .., c_m\}$ una base di V ed una di W entrambe su K. Allora per ogni coppia di vettori $v \in V$ e $w \in W$, essi si possono esprimere come combinazione lineare dei vettori base tramite le proprie componenti:

$$v = v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 + ... + v_n b_n$$

$$w = w_1 c_1 + w_2 c_2 + w_3 c_3 + ... + w_m c_m.$$

Allora, sfruttando le proprietá di bilinearitá della f si ha:

$$f(v, w) = f(v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 + ... + v_n b_n, w_1 c_1 + w_2 c_2 + w_3 c_3 + ... + w_m c_m) =$$

$$v_1 w_1 f(b_1, c_1) + v_1 w_2 f(b_1, c_2) + v_1 w_3 f(b_1, c_3) + ... + v_1 w_m f(b_1, c_m) +$$

$$v_2 w_1 f(b_2, c_1) + v_2 w_2 f(b_2, c_2) + v_2 w_3 f(b_2, c_3) + ... + v_2 w_m f(b_2, c_m) + ...$$

$$........ + v_n w_1 f(b_n, c_1) + v_n w_2 f(b_n, c_2) + v_n w_3 f(b_n, c_3) + ... + v_n w_m f(b_n, c_m).$$

Indichiamo con $a_{ij} = f(b_i, c_j)$, al variare di tutti gli elementi b_i e c_j delle due basi. Con tali scalari costruiamo una matrice $A = (a_{ij})$ che viene detta la matrice associata alla f rispetto alle basi B e C. Se denotiamo

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ v_n \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ ... \\ ... \\ ... \\ w_m \end{bmatrix}$$

allora possiamo osservare che $f(v, w) = v^T A w$. Quindi ad ogni forma bilineare é associata una matrice relativa ad una scelta di basi.

Viceversa per ogni matrice $A \in M_{nm}(K)$ esiste una forma bilineare $f : V \times W \longrightarrow K$, definita da $f(X, Y) = X^T A Y$, per ogni vettore $X \in V$ espresso per componenti in una certa base B di V e per ogni vettore $Y \in W$ espresso per componenti in una certa base C di W.

In definitiva, la scelta delle basi é determinante al fine di definire una qualsiasi forma bilineare associata ad una matrice.

Esempio. Sia $f : \Re^2 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$, definita da $f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_3)$, determiniamo la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche $B = \{b_1, b_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$ di $\Re^2$ e $C = \{c_1, c_2, c_3\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ di $\Re^3$.

$$f(b_1, c_1) = 1, \quad f(b_1, c_2) = 1, \quad f(b_1, c_3) = 0$$

$$f(b_2, c_1) = 1, \quad f(b_2, c_2) = 0, \quad f(b_2, c_3) = -1$$

allora la f si puó rappresentare, rispetto alle basi canoniche, nel modo seguente:

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo ora due basi diverse da quelle canoniche: $D = \{d_1, d_2\} = \{(1,1), (2,1)\}$ di $\Re^2$ e $E = \{e_1, e_2, e_3\} = \{(1,1,0), (0,0,1), (2,0,1)\}$. Calcoliamo gli elementi della matrice associata in tali basi:
$f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_1 - y_3)$,

$$f(d_1, e_1) = 3, \quad f(d_1, e_2) = -1, \quad f(d_1, e_3) = 3$$

$$f(d_2, e_1) = 5, \quad f(d_2, e_2) = -1, \quad f(d_2, e_3) = 5$$

allora la f si puó rappresentare, rispetto alle basi C e D, nel modo seguente:

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1(3y_1 - y_2 + 3y_3) + x_2(5y_1 - y_2 + 5y_3).$$

Esempio. Sia $f : \Re^3 \times \Re^2 \longrightarrow \Re$ una forma bilineare, alla quale sia associata la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto alle basi $B = \{b_1, b_2, b_3\} = \{(1,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$ di $\Re^3$ e $C = \{c_1, c_2\} = \{(1,1), (0,1)\}$ di $\Re^2$. Determiniamo la matrice associata a f rispetto alle basi $D = \{d_1, d_2, d_3\} = \{(0,1,0), (0,1,1), (2,0,1)\}$ di $\Re^3$ e $E = \{e_1, e_2\} = \{(1,1), (2,1)\}$ di $\Re^2$.

L'espressione della f rispetto alle basi B e C é data da:

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1(y_1 + y_2) + x_2 y_1 + x_3(2y_1 + y_2).$$

Per poter determinare la matrice rispetto alle nuove basi, dovremmo calcolare i coefficienti $f(d_i, e_j)$. Poiché l'unico strumento che abbiamo é la matrice data rispetto alle basi B e C, siamo costretti inizialmente ad esprimere tutti i vettori d_i e e_j per componenti rispetto alle basi B e C, e solo allora potremo effettuare il calcolo degli $f(d_i, e_j)$.

$$d_1 = (0,1,0) = (0,-1,1)_B, \quad d_2 = (0,1,1) = (0,0,1)_B, \quad d_3 = (2,0,1) = (2,3,-2)_B$$

$$e_1 = (1,1) = (1,0)_C, \quad e_2 = (2,1) = (2,-1)_C.$$

$$f(d_1, e_1) = 1, \quad f(d_1, e_2) = 1$$
$$f(d_2, e_1) = 2, \quad f(d_2, e_2) = 3$$
$$f(d_3, e_1) = 1, \quad f(d_3, e_2) = 2$$

allora la f si puó rappresentare, rispetto alle basi D e E, nel modo seguente:

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1(y_1 + y_2) + x_2(2y_1 + 3y_2) + x_3(y_1 + 2y_2).$$

6.3 Forme bilineari simmetriche e forme quadratiche.

Sia $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineare definita in $V \times V$, dove V sia uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K. Sia $B = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ una base di V e sia A la matrice associata a f rispetto a B. Per quanto detto fin'ora, una rappresentazione della f é la seguente: $f(X,Y) = X^T AY$, per ogni X, Y vettori di V.

Diciamo che la forma bilineare é simmetrica se accade che $f(X,Y) = f(Y,X)$ per ogni $X, Y \in V$. Poiché, da tale definizione, in particolare dovrá essere $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i)$, per ogni e_i, e_j vettori differenti della base B, allora la matrice A associata alla f, sará una matrice simmetrica.

Viceversa, data una matrice A simmetrica di ordine n, si puó definire la forma bilineare $f(X,Y) = X^T AY$, definita in $V \times V$, dove V sia uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K. Si osserva facilmente che tale f é una forma bilineare simmetrica.

In definitiva tutte le forme bilineari simmetriche sono rappresentate da matrici simmetriche ed inoltre, per ogni matrice simmetrica si puó definire una forma bilineare simmetrica, relativamente ad una base B dello spazio vettoriale.

Esempio. Sia $f : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ una forma bilineare, alla quale sia associata la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ rispetto alla base canonica di $\Re^3$. La rappresentazione della f é allora la seguente

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3.$$

Essa é simmetrica, poiché associata ad una matrice simmetrica. Si noti che per determinare la simmetricitá della f é sufficiente constatare che le coppie dei termini misti x_iy_j e x_jy_i abbiano lo stesso coefficiente, per ogni scelta di i e j.

Introduciamo ora il concetto di **forma quadratica** associata ad una forma bilineare simmetrica. Sia quindi $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineare simmetrica definita in $V \times V$, dove V sia uno spazio vettoriale di dimensione n sul campo K e sia A la matrice associata alla f. Definiamo $q : V \longrightarrow K$ la applicazione che agisce nel modo seguente: per ogni $X \in V$, $q(X) = f(X, X) = X^T AX$. La q é detta forma quadratica (associata o polare alla forma f).

Esempio.
Come nell'esempio precedente, sia $f : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ la forma bilineare simmetrica definita da

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3$$

rispetto alla base canonica di $\Re^3$. Allora la forma quadratica associata a f é la $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ definita da

$$q(X) = f(X,X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2.$$

Notiamo che, pur rimanendo invariata la matrice associata ad f e q , essa si ottiene in modo differente se ricavata dai coefficienti dei monomi presenti nella espressione di f oppure da quelli presenti nella espressione di q.

Infatti se volessimo costruire tale matrice, rispetto alle basi canoniche, a partire dalla f, sarebbe sufficiente considerare il coefficiente del termine x_iy_j come l'elemento di posto (i, j) della matrice stessa.

Se invece volessimo la matrice, a partire dalla q, dovremmo notare che il termine misto x_ix_j scaturisce dalla somma dei due termini misti x_iy_j e x_jy_i presenti nella f. Per cui, se b_{ij} é il coefficiente di x_ix_j allora $\frac{b_{ij}}{2}$ é l'elemento di posto (i, j) nella matrice.

Per quanto riguarda gli elementi della diagonale principale della matrice, essi sono i coefficienti dei termini x_iy_i in f oppure, indifferentemente, dei termini x_i^2 in q.

Esempio. Sia $f : \Re^3 \longrightarrow \Re$ la forma quadratica definita da $q(X) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 7x_2^2 - x_3^2$ cioé

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 7x_2^2 - x_3^2$$

rispetto alla base canonica di $\Re^3$.

Allora la forma bilineare simmetrica associata a q é la $f : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ definita da

$$f(X,Y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$3x_1y_1 + x_1y_2 + 7x_2y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_3 - x_3y_3 - 2x_3y_2.$$

Per quanto visto fin'ora, potremo da ora in poi confondere le proprietá relative ad una forma bilineare simmetrica con quelle della forma quadratica ad essa associata. Infatti tali proprietá sono semplicemente caratteristiche della matrice che rappresenta entrambe le f e q.

6.4 Cambiamento di base in una forma quadratica.

Sia $q : \Re^n \longrightarrow \Re$ una forma quadratica reale. Siano A_1 la matrice associata alla q rispetto alla base B_1 di $\Re^n$ e A_2 la matrice associata rispetto alla base B_2 di $\Re^n$. Indichiamo con C la matrice del cambiamento di base da B_1 a B_2. Quindi, se $X \in \Re^n$ é un vettore, di componenti X_1 rispetto alla base B_1 e componenti X_2 rispetto alla base B_2, allora la legge che lega tra loro tali componenti é $X_2 = CX_1$.

Calcolando la $q(X)$ rispetto alle due differenti basi otteniamo

$$q(X) = X_1^T A_1 X_1 \quad \text{e} \quad q(X) = X_2^T A_2 X_2$$

da cui

$$X_1^T A_1 X_1 = X_2^T A_2 X_2 = (CX_1)^T A_2 (CX_1) = X_1^T C^T A_2 C X_1$$

con

$$A_1 = C^T A_2 C.$$

Questa é la relazione che lega tra loro le due matrici associate alla stessa forma quadratica, ma rispetto a due basi differenti. Essa non é una relazione di similitudine, eccetto quando la matrice di cambiamento di base C sia ortogonale. Diremo che le matrici A_1 e A_2 sono congruenti. La congruenza garantisce che, se una delle due é simmetrica, allora lo é anche l'altra, ma in generale esse hanno autovalori differenti. Quindi due matrici rappresentano la stessa forma quadratica rispetto a due basi diverse se e solo se esse sono congruenti. Poiché esse sono tutte matrici simmetriche, esiste una base di $\Re^n$ rispetto alla quale la matrice associata a q é una matrice diagonale.

Teorema 6.4.1 *Sia $q : V \longrightarrow K$ una forma quadratica, con $dim(V) = n$ e K un campo. Esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a q sia diagonale, cioé rispetto alla quale $q(X) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + ... + a_nx_n^2$, con $a_1, .., a_n \in K$. Analogamente,* *sia $f : V \times V \longrightarrow K$ una forma bilineare simmetrica. Esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata a f sia diagonale, cioé rispetto alla quale $f(X,Y) = b_1x_1y_1 + b_2x_2y_2 + b_3x_3y_3 + ... + b_nx_ny_n$, con $b_1,..,b_n \in K$.*

6.5 Metodo per la diagonalizzazione.

Sia $f(X,Y) = \sum a_{ij}x_iy_j$ la forma bilineare associata alla base $B = \{e_1,e_2,..,e_n\}$ e supponiamo che la matrice $A = (a_{ij})$ non sia diagonale.

Passo 1. Sia $f(e_1,e_1) = a_{11} \neq 0$. Calcoliamo i seguenti coefficienti:

$$c_2 = \frac{f(e_1,e_2)}{f(e_1,e_1)} \quad c_3 = \frac{f(e_1,e_3)}{f(e_1,e_1)}..... \quad ..... \quad c_i = \frac{f(e_1,e_i)}{f(e_1,e_1)}.$$

Determiniamo il seguente cambiamento di base

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_2 - c_2e_1, \quad e'_3 = e_3 - c_3e_1.... \quad ...e'_n = e_n - c_ne_1.$$

Diciamo C la matrice di cambiamento di base e determiniamo $X' = CX$, $Y' = CY$. A questo punto sostituiamo X', Y' nell'espressione della forma bilineare. La matrice associata a f dopo aver effettuato tali sostituzioni, avrá la prima riga e la prima colonna tutte nulle, eccetto eventualmente l'elemento a_{11}.

Passo 2. Per evitare di introdurre ulteriori simboli, indichiamo la base in cui ora ci troviamo nuovamente $\{e_1,e_2,..,e_n\}$ (ma sappiamo bene che non é quella di partenza).

Sia ora $f(e_2,e_2) = a_{22} \neq 0$. Calcoliamo i seguenti coefficienti:

$$c_3 = \frac{f(e_2,e_3)}{f(e_2,e_2)} \quad c_4 = \frac{f(e_2,e_4)}{f(e_2,e_2)}..... \quad ..... \quad c_i = \frac{f(e_2,e_i)}{f(e_2,e_2)}.$$

Determiniamo il seguente cambiamento di base

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3 - c_3e_2.... \quad ...e'_n = e_n - c_ne_2.$$

Diciamo ancora C la matrice di cambiamento di base e determiniamo $X' = CX$, $Y' = CY$. A questo punto sostituiamo X', Y' nell'espressione della forma bilineare. La matrice associata a f dopo aver effettuato tali sostituzioni, avrá la seconda riga e la seconda colonna tutte nulle, eccetto eventualmente l'elemento a_{22}.

Ripetiamo tale iter per ogni riga, ogni volta che $f(e_i,e_i) \neq 0$. Alla fine otterremo la forma diagonale della matrice e quindi della forma bilineare e di quella quadratica associate.

Passo intermedio. Se dovessimo avere, nel i-esimo passo, il valore $f(e_i,e_i) = 0$, prima di procedere come giá esposto, dovremo effettuare un cambiamento di base da

$\{e_1, e_2, .., e_n\}$ a $\{e'_1, e'_2, .., e'_n\}$ che garantisca la condizione $f(e'_i, e'_i) \neq 0$. Per farlo, sará sufficiente individuare il primo indice di colonna j per il quale $f(e_i, e_j) \neq 0$. Quindi si effettua il cambiamento di base seguente:

$$e'_i = e_i + e_j, \quad e'_k = e_k \quad \text{per ogni altro indice} \quad k$$

che garantisce che la condizione sia soddisfatta. A questo punto si potrá riprendere come nei passi 1 e 2.

La matrice di cambiamento di base finale (cioé quella che trasforma i vettori dalle componenti rispetto alla base di partenza alle componenti rispetto all'ultima base, in cui la matrice é diagonale) é data dal prodotto di tutte le matrici utilizzate nei passaggi intermedi, moltiplicate nell'ordine in cui esse vengono utilizzate.

Esempio. Sia $f : \Re^3 \longrightarrow \Re$ la forma quadratica definita da $q(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ cioé

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Passo 1.

$$f(e_1, e_1) = 0 \quad f(e_1, e_2) \neq 0$$

$$e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3$$

La matrice di cambiamento di base é

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x'_1 = x_1, \quad x'_2 = x_1 + x_2, \quad x'_3 = x_3$$

e sostituendo la nuova espressione del vettore X otteniamo la forma quadratica espressa nella nuova base

$$q(X) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Passo 2.

$$f(e_1, e_1) \neq 0, \quad c_2 = \frac{f(e_1, e_2)}{f(e_1, e_1)} = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{f(e_1, e_3)}{f(e_1, e_1)} = 1$$

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - \frac{1}{2}e_1, \quad e_3' = e_3 - e_1$$

La matrice di cambiamento di base é

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1' = x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

e sostituendo la nuova espressione del vettore X otteniamo la forma quadratica espressa nella nuova base

$$q(X) = x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice finale del cambiamento di base é

$$C = C_1 \cdot C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ed infatti si ha che

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Sia $f : \Re^3 \longrightarrow \Re$ la forma quadratica definita da $q(X) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_3$ cioé

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Passo 1.

$$f(e_1, e_1) \neq 0, \quad c_2 = \frac{f(e_1, e_2)}{f(e_1, e_1)} = 0, \quad c_3 = \frac{f(e_1, e_3)}{f(e_1, e_1)} = -\frac{1}{10}$$

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 - \frac{1}{10}e_1$$

La matrice di cambiamento di base é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1' = x_1 - \frac{1}{10}x_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3$$

e sostituendo la nuova espressione del vettore X otteniamo la forma quadratica espressa nella nuova base

$$q(X) = 5x_1^2 + 3x_2^2 - \frac{1}{20}x_3^2 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice finale del cambiamento di base é data dalla sola C ed infatti si ha che

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{10} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{20} \end{bmatrix}.$$

Il metodo precedentemente esposto permette quindi di individuare una base B rispetto alla quale la forma quadratica assume una forma

$$q(X) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + ... + a_{rr}x_r^2$$

con $a_{ii} \in \Re$, dove r é il rango della matrice associata alla forma quadratica q, detto anche rango di q. Esso vale in qualsiasi caso, indipendentemente dal campo K sul quale V é spazio vettoriale, quindi non necessariamente per $K = \Re$.

Poiché noi ci occupiamo prevalentemente di spazi vettoriali reali, possiamo ottenere risultati piú precisi:

Teorema 6.5.1 *Sia V uno spazio vettoriale reale, $dim(V) = n \geq 1$, $q : V \to \Re$ una forma quadratica reale su V. Esistono una base B di V, un numero intero $0 \leq p \leq r$, dove r é il rango di q, tali che la matrice associata alla q rispetto alla base B sia*

$$\begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (a)$$

dove I_p é il blocco costituito dalla matrice identica di ordine p, I_{r-p} é il blocco costituito dalla matrice identica di ordine $r-p$ e gli altri sono tutti blocchi nulli. In altre parole la forma quadratica si presenta nella forma

$$q(X) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_p^2 - x_{p+1}^2 - ... - x_r^2.$$

Si noti che in modo equivalente possiamo dire che ogni matrice simmetrica $A \in M_n(\Re)$ é congruente ad una matrice diagonale della forma (a).

Esempio. La forma quadratica in $\Re^3$, $q(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ ha una forma canonica $q(X) = x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2 - x_3^2$, costruita rispetto alla base

$$B = \{(1, 1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (-1, -1, 1)\}.$$

Poniamo allora $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$, $a_3 = -1$ e scegliamo

$$e_1' = \frac{(1, 0, 0)}{\sqrt{a_1}}, \quad e_2' = \frac{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)}{\sqrt{-a_2}}, \quad e_3' = \frac{(-1, -1, 1)}{\sqrt{-a_3}}$$

$$e_1' = (1, 1, 0), \quad e_2' = (-1, 1, 0), \quad e_3' = (-1, -1, 1).$$

Esprimiamo la forma quadratica rispetto a tale base, con matrice di passaggio

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

cioé con matrice associata $A' = C^T \cdot A \cdot C$,

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli interi p e $r - p$ sono detti rispettivamente indice di positivitá e indice di negativitá di q e la coppia $(p, r - p)$ é detta segnatura di q.

Una forma quadratica $q : V \rightarrow V$, con $dim(V) = n$, é detta definita positiva se $q(X) > 0$, per ogni $X \in V$ e la sua segnatura é $(n, 0)$; é detta definita negativa se $q(X) < 0$, per ogni $X \in V$, e la sua segnatura é $(0, n)$; é detta semidefinita positiva se $q(X) \geq 0$, per ogni $X \in V$, e la sua segnatura é $(r, 0)$ con $r \leq n$; é detta semidefinita negativa se $q(X) \leq 0$, per ogni $X \in V$, e la sua segnatura é $(0, r)$ con $r \leq n$. Nel caso la segnatura di q sia $(p, r - p)$ con $0 < p < r \leq n$, la forma quadratica é detta indefinita.

6.6 Esercizi svolti sulla diagonalizzazione.

Esercizio 6.6.1

Sia $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - \frac{-1}{1}e_1 = e_2 + e_1, \quad e_3' = e_3 - \frac{\frac{1}{2}}{1}e_1 = e_3 - \frac{1}{2}e_1$$

la cui matrice associata é

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1' + x_2' - \frac{1}{2}x_3', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 - \frac{1}{4}x_3^2 + x_2x_3$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Poiché $q(e_2) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 - \frac{\frac{1}{2}}{-1}e_2 = e_3 + e_2$$

la cui matrice associata é

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2' + \frac{1}{2}x_3', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2$$

con matrice associata

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice $C = C_1 \times C_2$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,\frac{1}{2},1)\}$ e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A'' =^T CAC$. □

Esercizio 6.6.2

Sia $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = 2x_1^2 - x_1x_2 + 2x_1x_3$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - \frac{-\frac{1}{2}}{2} e_1 = e_2 + \frac{1}{4} e_1, \quad e_3' = e_3 - \frac{1}{2} e_1$$

la cui matrice associata é

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1' + \frac{1}{4} x_2' - \frac{1}{2} x_3', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - \frac{1}{8} x_2^2 - \frac{1}{2} x_3^2 + \frac{1}{2} x_2 x_3$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Poiché $q(e_2) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 - \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{8}} e_2 = e_3 + 2e_2$$

la cui matrice associata é

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2' + 2x_3', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - \frac{1}{8}x_2^2$$

con matrice associata

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice $C = C_1 \times C_2$:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per cui $B = \{(1,0,0), (\frac{1}{4}, 1, 0), (0,2,1)\}$ e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A'' =^T CAC$.

Per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale B'. Questa si ottiene dalla base ortogonale B, dividendo il vettore che occupa la colonna i nella matrice C, per la radice quadrata del valore assoluto dello scalare (se é non nullo) presente nella colonna i della matrice A'':

$$B' = \{\frac{(1,0,0)}{\sqrt{1}}, \frac{(\frac{1}{4}, 1, 0)}{\sqrt{\frac{1}{8}}}, (0,2,1)\} =$$

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}, 0), (0,2,1)\}.$$

Quindi la matrice ortonormale di cambiamento di base

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ci permette di ottenere la forma diagonale

$$A''' =^T C'AC' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 6.6.3

Sia $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_3^2$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) = 0$ allora dobbiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1 + e_2, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3$$

la cui matrice associata é

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_1' + x_2', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2 - x_1x_3 - 2x_3^2$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - \frac{1}{2}e_1, \quad e_3' = e_3 - \frac{1}{2}e_1$$

la cui matrice associata é

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui
$$x_1 = x_1' - \frac{1}{2}x_2' - \frac{1}{2}x_3', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'.$$
L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é
$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{5}{2}x_3^2 - x_2x_3$$
con matrice associata
$$A'' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Poiché $q(e_2) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:
$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2, \quad e_3' = e_3 - e_2$$
la cui matrice associata é
$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
da cui
$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2' - x_3', \quad x_3 = x_3'.$$
L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é
$$q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - 2x_3^2$$
con matrice associata
$$A''' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice $C = C_1 \times C_2 \times C_3$:
$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
per cui $B = \{(1, 1, 0), (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (0, -1, 1)\}$ e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A''' =^T CAC$.

Per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale B'. Questa si ottiene dalla base ortogonale B, dividendo il vettore che occupa la colonna

i nella matrice C, per la radice quadrata del valore assoluto dello scalare (se é non nullo) presente nella colonna i della matrice A''':

$$B' = \{\frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}, \frac{(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)}{\sqrt{\frac{1}{2}}}, \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}\} =$$

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

Quindi la matrice ortonormale di cambiamento di base

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ci permette di ottenere la forma diagonale

$$A^{iv} =^T C'AC' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 6.6.4

Sia $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_3^2$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e'_1 = e_1, \quad e'_2 = e_2, \quad e'_3 = e_3 - e_1$$

la cui matrice associata é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x'_1 - x'_3, \quad x_2 = x'_2, \quad x_3 = x'_3.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice C, cioé:

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A' =^T CAC$.

Per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale

B'. Questa si ottiene dalla base ortogonale B, dividendo il vettore che occupa la colonna i nela matrice C, per la radice quadrata del valore assoluto dello scalare (se é non nullo) presente nella colonna i della matrice A':

$$B' = \{(1,0,0), \frac{(0,1,0)}{\sqrt{2}}, (-1,0,1)\}.$$

Quindi la matrice ortonormale di cambiamento di base

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ci permette di ottenere la forma diagonale

$$A'' =^T C'AC' == \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che individua una forma quadratica semidefinita positiva di segnatura $(2,0)$.

Risolviamo adesso lo stesso esercizio con un metodo alternativo, tramite l'utilizzo degli autovalori della matrice A.

Dopo aver risolto l'equazione caratteristica associata alla matrice A, si ottengono come autovalori $\lambda_1 = 0$ con molteplicitá algebrica 1, $\lambda_2 = 2$ con molteplicitá algebrica 2.

L'autospazio relativo a λ_1 é generato dall'autovettore $(1,0,-1)$, il cui versore é $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

L'autospazio relativo a λ_2 é generato dagli autovettori $(1,0,1), (0,1,0)$, i cui versori sono rispettivamente $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(0,1,0)$.

La base rispetto a cui la forma quadratica é diagonalizzabile, con gli autovalori sulla diagonale principale della matrice ad essa associata, é formata proprio da tali autoversori:

$$B = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0)\}.$$

La matrice di cambiamento di base é allora

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

tale che

$${}^TCAC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al solito, per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale B' che si ottiene dalla base B, dividendo ogni vettore per la radice quadrata del valore assoluto dell'autovalore (se é non nullo) ad esso relativo:

$$B' = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}.$$

La matrice di cambiamento di base é allora

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

tale che

$$^{T}C'AC' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 6.6.5

Sia $q : \Re^2 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - \frac{2}{3}e_1$$

la cui matrice associata é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1' - \frac{2}{3}x_2', \quad x_2 = x_2'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + \frac{5}{3}x_2^2$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice C, cioé:

$$B = \{(1, 0), (-\frac{2}{3}, 1)\}$$

e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A' =^T CAC$.

Per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale B'. Questa si ottiene dalla base ortogonale B, dividendo il vettore che occupa la colonna

i nella matrice C, per la radice quadrata del valore assoluto dello scalare (se é non nullo) presente nella colonna i della matrice A':

$$B' = \{\frac{(1,0)}{\sqrt{3}}, \frac{(-\frac{2}{3},1)}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\} =$$

$$\{(\frac{1}{\sqrt{3}},0),(-\frac{2}{\sqrt{15}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})\}.$$

Quindi la matrice ortonormale di cambiamento di base

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

ci permette di ottenere la forma diagonale

$$A'' =^T C'AC' == \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che individua una forma quadratica definita positiva.

Risolviamo adesso lo stesso esercizio tramite l'utilizzo degli autovalori della matrice A.

Dopo aver risolto l'equazione caratteristica associata alla matrice A, si ottengono come autovalori $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 1$, entrambi con molteplicitá algebrica 1.

L'autospazio relativo a λ_1 é generato dall'autovettore $(1,1)$, il cui versore é $(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

L'autospazio relativo a λ_2 é generato dall'autovettore $(1,-1)$, il cui versore é $(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$.

La base rispetto a cui la forma quadratica é diagonalizzabile, con gli autovalori sulla diagonale principale della matrice ad essa associata, é formata proprio da tali autoversori:

$$B = \{(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}),(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

La matrice di cambiamento di base é allora

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

tale che

$$^TCAC = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al solito, per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale B' che si ottiene dalla base B, dividendo ogni vettore per la radice quadrata del valore assoluto dell'autovalore (se é non nullo) ad esso relativo:

$$B' = \{(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}.$$

La matrice di cambiamento di base é allora

$$C' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

tale che

$${}^{T}C'AC' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 6.6.6

Sia $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_1x_3 + x_3^2$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 - 2e_1, \quad e_3' = e_3$$

la cui matrice associata é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1' - 2x_2', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice C, cioé:

$$B = \{(1,0,0), (-2,1,0), (0,0,1)\}$$

e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A' =^T CAC$.

Per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale

B'. Questa si ottiene dalla base ortogonale B, dividendo il vettore che occupa la colonna i nella matrice C per la radice quadrata del valore assoluto dello scalare (se é non nullo) presente nella colonna i della matrice A':

$$B' = \{(1,0,0), \frac{(-2,1,0)}{\sqrt{2}}, (0,0,1)\}.$$

Quindi la matrice ortonormale di cambiamento di base

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ci permette di ottenere la forma diagonale

$$A'' =^T C'AC' == \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che individua una forma quadratica definita positiva di segnatura $(3,0)$, che in base B' si presenta in forma di prodotto scalare standard.

□

Esercizio 6.6.7

Sia $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ **la forma quadratica definita da** $q(X) = 4x_1x_2 - x_1^2 - 5x_2^2 - 4x_3^2$ **cioé**

$$q(X) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Determinarne una forma diagonale.

Svolg.

La matrice associata alla forma quadratica é

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Poiché $q(e_1) \neq 0$ allora possiamo effettuare il seguente cambiamento di base:

$$e_1' = e_1, \quad e_2' = e_2 + 2e_1, \quad e_3' = e_3$$

la cui matrice associata é

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$x_1 = x_1' + 2x_2', \quad x_2 = x_2', \quad x_3 = x_3'.$$

L'espressione della forma quadratica nelle nuove coordinate é

$$q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2$$

con matrice associata

$$A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

La base ortogonale B rispetto a cui la forma quadratica si esprime in forma diagonale é data dalle colonne della matrice C, cioé:

$$B = \{(1,0,0), (2,1,0), (0,0,1)\}$$

e la matrice associata alla forma quadratica in tale base é $A' =^T CAC$.

Per ottenere una forma diagonale in cui compaiano come coefficienti non nulli solamente $+1$ e -1 dobbiamo esprimere la forma quadratica rispetto ad una base ortonormale

B'. Questa si ottiene dalla base ortogonale B, dividendo il vettore che occupa la colonna i nella matrice C per la radice quadrata del valore assoluto dello scalare (se é non nullo) presente nella colonna i della matrice A':

$$B' = \{(1,0,0),(2,1,0),\frac{(0,0,1)}{\sqrt{4}}\} =$$

$$\{(1,0,0),(2,1,0),\frac{(0,0,1)}{2}\}.$$

Quindi la matrice ortonormale di cambiamento di base

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ci permette di ottenere la forma diagonale

$$A'' =^T C'AC' == \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

che individua una forma quadratica definita negativa di segnatura $(0,3)$.

$\square$

6.7 Esercizi.

Esercizio 6.7.1 *Sia* $f : \Re^2 \times \Re^2 \longrightarrow \Re$ *la forma bilineare definita da*

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1(y_1+y_2) + x_2(y_1-y_2).$$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 6.7.2 *Sia data la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. *Determinare la forma bilineare* $f : \Re^2 \times \Re^2 \longrightarrow \Re$ *associata a tale matrice rispetto alle basi canoniche di* $\Re^2$.

Esercizio 6.7.3 *Sia* $f : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma bilineare definita da*

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1 - x_3y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_1y_3.$$

Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche.

Esercizio 6.7.4 *Sia* $f : \Re^2 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma bilineare definita da*

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2, y_3)) = x_1(y_1 + y_2) + x_2(y_2 + y_3)$$

rispetto alle basi canoniche. Determinare la matrice associata rispetto alle basi $B_2 = \{(1, 1), (2, 1)\}$ *di* $\Re^2$ *e* $B_3 = \{(1, 1, 0), (1, 3, 1), (0, 0, 1)\}$ *di* $\Re^3$.

Esercizio 6.7.5 *Sia la matrice* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *associata alla forma bilineare* $f : \Re^2 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ *rispetto alle basi* $B_2 = \{(1, 1), (1, 0)\}$ *di* $\Re^2$ *e* $B_3 = \{(1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *di* $\Re^3$. *Determinare la matrice associata rispetto alle basi canoniche di* $\Re^2$ *e* $\Re^3$.

Esercizio 6.7.6 *Sia* $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *la matrice associata alla forma bilineare* $f : \Re^2 \times \Re^2 \longrightarrow \Re$ *rispetto alle basi canoniche di* $\Re^2$. *Determinare la matrice associata a* f *rispetto alla base* $\{(1, 3), (1, 5)\}$ *sia nel primo che nel secondo fattore* $\Re^2$ *del prodotto cartesiano.*

Esercizio 6.7.7 *Sia* $f : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma bilineare definita da*

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_1.$$

Determinare la forma quadratica associata alla f *e determinarne una forma diagonale.*

Esercizio 6.7.8 *Sia* $f : \Re^3 \times \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma bilineare definita da*

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + 2x_3y_1 + x_3y_2.$$

Determinare la forma quadratica associata alla f *e determinarne una forma diagonale.*

Esercizio 6.7.9 *Sia* $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma quadratica definita da*

$$f((x_1, x_2, x_3)) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 7x_2^2 - x_3^2.$$

Determinare la forma bilineare associata alla q *e determinarne una forma diagonale.*

Esercizio 6.7.10 *Sia* $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma quadratica definita da*

$$f((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3x_2x_3 + 4x_3^2.$$

Determinare la forma bilineare associata alla q *e determinarne una forma diagonale.*

Esercizio 6.7.11 *Sia* $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma quadratica definita da*

$$f((x_1, x_2, x_3)) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Determinare la forma bilineare associata alla q *e determinarne una forma diagonale.*

Esercizio 6.7.12 *Sia* $q : \Re^3 \longrightarrow \Re$ *la forma quadratica definita da*

$$f((x_1, x_2, x_3)) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + x_1x_3.$$

Determinare la forma bilineare associata alla q *e determinarne una forma diagonale.*

Capitolo 7

Prodotti scalari, spazi euclidei e basi ortonormali.

7.1 Introduzione.

Siano $f : \Re^n \times \Re^n \to \Re$ una forma bilineare simmetrica e $q : \Re^n \to \Re$ la forma quadratica associata. La f é detta definita positiva, quando lo é q. Una forma bilineare definita posotiva é anche chiamata prodotto scalare. Per quanto detto in precedenza, per ogni forma quadratica q definita positiva esiste una base B di $\Re^n$ rispetto alla quale q sia esprimibile

$$q(X) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$$

e quindi

$$f(X,Y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

il quale é detto prodotto scalare standard. Uno spazio vettoriale V in cui sia introdotto un prodotto scalare é detto spazio vettoriale euclideo.

In tuttoció che segue, siano V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n, e $f : V \times V \to \Re$ il prodotto scalare definito in V. Inoltre denoteremo $f(x,y) =< X,Y >$ e per non creare confusione denoteremo con $Span\{w_1,..,w_r\}$ il sottospazio di V generato dai vettori $w_1,..,w_r$.

Diciamo norma di un vettore $X \in V$: $||X|| = \sqrt{< X,X >}$. Si noti che $||X|| \geq 0$, per ogni vettore X di V, e $||X|| = 0$ solo se $X = 0$.

Inoltre, per ogni $a \in \Re$, $||aX|| = |a| \cdot ||X||$.

Diremo che i due vettori $X,Y \in V$ sono ortogonali in V se $< X,Y >= 0$.

Un insieme di vettori tutti non nulli $S = \{X_1,..,X_m\}$ é detto insieme ortogonale di vettori se $< X_i,X_j >= 0$, per ogni $X_i,X_j \in V$ con $i \neq j$.

S é detto insieme ortonormale di vettori se é un insieme ortogonale ed i suoi elementi sono tutti versori.

Si osservi che se $\{X_1, .., X_m\}$ é un insieme ortogonale di vettori, allora $\{\frac{X_1}{||X_1||}, ..., \frac{X_m}{||X_m||}\}$ é un insieme ortonormale di vettori.

Una base $B = \{e_1, .., e_n\}$ di V é una base ortonormale di V se essa é un insieme ortonormale di vettori. Grazie a quanto sappiamo sulle forme quadratiche possiamo enunciare il seguente:

Teorema 7.1.1 *Per ogni prodotto scalare $< .,. >$ in V esiste una base ortonormale di V rispetto alla quale $< .,. >$ si possa esprimere come prodotto scalare standard.*

7.2 Processo di ortonormalizzazione.

Siano $v, w \in V = \Re^n$ con prodotto scalare associato $f(X, Y) =< X, Y >$. Consideriamo il vettore $w - \frac{<v,w>}{<v,v>}v$, esso é ortogonale al vettore v infatti:

$$< v, w - \frac{< v, w >}{< v, v >}v >=< v, w > - \frac{< v, w >}{< v, v >} < v, v >= 0.$$

Definiamo allora $\frac{<v,w>}{<v,v>}v$ la proiezione ortogonale di w lungo la direzione del vettore v. Nel caso particolare v sia un versore, la proiezione ortogonale di w su v si riduce $< v, w > v$.

Teorema 7.2.1 *Siano $v_1, ..., v_m$ vettori dello spazio euclideo V. Allora esiste una successione di vettori $w_1, .., w_m$ di V tali che*
i) $Span\{v_1, .., v_m\} = Span\{w_1, .., w_m\}$;
ii) $\{w_1, .., w_m\}$ é un insieme di vettori a due a due ortogonali tra loro.
Inoltre se $\{u_1, .., u_m\}$ é un altro insieme di vettori che soddisfano le i) e ii) allora $u_i = a_i w_i$, per ogni i ed opportuni $a_i \in \Re$.

Osserviamo che nel teorema precedente non é detto che $\{w_1, .., w_m\}$ sia un insieme ortogonale di vettori, poiché qualche w_i potrebbe essere nullo.

Conseguenza. Se $\{v_1, .., v_n\}$ é una base di V allora esistono $w_1, .., w_m$ tali che
i) $\{w_1, .., w_m\}$ sia una base ortogonale di V;
ii) $\{\frac{w_1}{||w_1||}, ..., \frac{w_m}{||w_m||}\}$ sia una base ortonormale di V.

Ricordiamo che la convenienza di utilizzare basi ortonormali, anziché basi qualunque, risiede nel fatto che, in una base ortonormale, il prodotto scalare di due vettori si puó esprimere come il prodotto scalare standard e quindi i calcoli con le coordinate dei vettori sono notevolmente piú semplici.

Vediamo ora come costruire i vettori $\{w_1, .., w_m\}$ che soddisfino alle condizioni i) e ii) del teorema precedente.

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< w_1, v_2 >}{< w_1, w_1 >} w_1$$
$$w_3 = v_3 - \frac{< w_1, v_3 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< w_2, v_3 >}{< w_2, w_2 >} w_2$$
$$w_4 = v_4 - \frac{< w_1, v_4 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< w_2, v_4 >}{< w_2, w_2 >} w_2 - \frac{< w_3, v_4 >}{< w_3, w_3 >} w_3$$

ed in generale

$$w_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} \frac{< w_j, v_{i+1} >}{< w_j, w_j >} w_j$$

Esempio. Siano $V = \Re^4$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una sua base ortonormale con prodotto scalare standard. Siano $v_1 = (0,1,0,1)$, $v_2 = (2,1,0,1)$, $v_3 = (-1,0,0,1)$, $v_4 = (0,0,1,0)$.

$B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é una base di V ma non é ortogonale. A partire da essa costruiamo una base ortogonale.

$$w_1 = v_1$$
$$w_2 = v_2 - \frac{< w_1, v_2 >}{< w_1, w_1 >} w_1 = v_2 - v_1 = (2,0,0,0)$$
$$w_3 = v_3 - \frac{< w_1, v_3 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< w_2, v_3 >}{< w_2, w_2 >} w_2 = v_3 - \frac{1}{2} w_1 + \frac{1}{2} w_2 = (0, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$
$$w_4 = v_4 - \frac{< w_1, v_4 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< w_2, v_4 >}{< w_2, w_2 >} w_2 - \frac{< w_3, v_4 >}{< w_3, w_3 >} w_3 = v_4 = (0,0,1,0).$$

I vettori $w_1 = e_2 + e_4$, $w_2 = 2e_1$, $w_3 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_4$, $w_4 = e_3$ costituiscono una base ortogonale per V e quindi i vettori

$$\frac{w_1}{||w_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_4$$
$$\frac{w_2}{||w_2||} = e_1$$
$$\frac{w_3}{||w_3||} = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_4$$
$$\frac{w_4}{||w_4||} = e_3$$

costituiscono una base ortonormale per V.

Esempio. Siano $V = \Re^3$, $< X, Y >= x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$ il prodotto scalare definito in V, $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,0,1)$, $v_3 = (1,0,1)$ e $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V, che non é ortogonale rispetto al prodotto $< .,. >$. A partire da essa costruiamo una base ortogonale.

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{< w_1, v_2 >}{< w_1, w_1 >} w_1 = v_2 = (0, 0, 1)$$

$$w_3 = v_3 - \frac{< w_1, v_3 >}{< w_1, w_1 >} w_1 - \frac{< w_2, v_3 >}{< w_2, w_2 >} w_2 = v_3 - \frac{1}{3} v_1 - w_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0)$$

allora $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ é una base ortogonale. Inoltre

$$||w_1|| = \sqrt{< w_1, w_1 >} = \sqrt{3}$$

$$||w_2|| = \sqrt{< w_2, w_2 >} = 1$$

$$||w_3|| = \sqrt{< w_3, w_3 >} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

I vettori

$$\frac{w_1}{||w_1||} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$$

$$\frac{w_2}{||w_2||} = (0, 0, 1)$$

$$\frac{w_3}{||w_3||} = (\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$$

costituiscono una base ortonormale per V.

Definizione. Siano V uno spazio vettoriale euclideo con prodotto scalare $< X, Y >$ e $0 \neq W$ un suo sottospazio. Definiamo complemento ortogonale di W in V, il seguente sottospazio di V

$$W^o = \{v \in V \quad : \quad < v, w >= 0, \quad \forall w \in W\}.$$

Esempio. Siano $V = \Re^3$, $W = \{(a, b, 0), \quad a, b \in \Re\}$ e

$$W = Span\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}.$$

Consideriamo un generico $v = (x_1, x_2, x_3) \in V$ tale che $v \in W^o$ allora

$$< (x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0) >= 0 \quad \text{cioé} \quad x = 0$$

$$< (x_1, x_2, x_3), (0, 1, 0) >= 0 \quad \text{cioé} \quad y = 0$$

quindi

$$W^o = \{(0, 0, c), \quad c \in \Re\} = Span\{(0, 0, 1)\}.$$

Teorema 7.2.2 *Siano V uno spazio vettoriale euclideo e $0 \neq W$ un suo sottospazio di dimensione finita. Allora ogni elemento di $v \in V$ si puó esprimere in modo unico come $v = w + w'$, dove $w \in W$ e $w' \in W^o$. Quindi si ha $V = W \oplus W^o$ come somma diretta.*

Vediamo come costruire w e w': Sia $\{e_1, .., e_n\}$ una base ortonormale di V e sia $W = Span\{e_1, .., e_t\}$, con $t < n$. Poniamo

$$w =< v, e_1 > e_1+ < v, e_2 > e_2 + ...+ < v, e_t > e_t$$

e

$$w' = v - w.$$

Ovviamente $w \in W$ ed inoltre, per ogni $i = 1, 2, ..., t$

$$< w', e_i >=< v, e_i > - < w, e_i >=< v, e_i > - << v, e_i > e_i, e_i >=$$

$$< v, e_i > - < v, e_i >< e_i, e_i >=< v, e_i > - < v, e_i >= 0$$

quindi w' é ortogonale con ogni $e_1, .., e_t$ cioé é ortogonale con ogni vettore di W ed appartiene a W^o.

L'elemento w é detto proiezione ortogonale di v sullo spazio W.

Capitolo 8

Figure e disegni relativi ai capitoli precedenti.