# **Soluzioni compito** $27 - 02 - 2012$

**Domanda N°1** Senza ricorrere al Teorema de l'Hospital ma utilizzando il principio di sostituzione degli infinitesimi o i limiti notevoli, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(3x+1) + x^3}{e^x - 1 + x^2}$$

**Risposta N°1**

Per il principio di sostituzione degli infinitesimi $\ln(1+3x) \approx 3x$, $e^x - 1 \approx x$, abbiamo che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(3x+1) + x^3}{e^x - 1 + x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x + x^3}{x + x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x}{x} = 3$$

**Domanda N°2** Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{2x + 5}$$

nell'intervallo $I = [-2, 0]$.

**Risposta N°2**

Poichè la funzione è continua in $I$, essa ammette massimo e minimo assoluti per il teorema di Weierstrass. Per prima cosa calcoliamo il valore della funzione agli estremi dell'intervallo:

$$f(-2) = 0 \quad f(0) = \frac{4}{5}.$$

Successivamente calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{-2x(2x+5) - 2(4 - x^2)}{(2x+5)^2} = -\frac{2(x^2 + 5x + 4)}{(2x+5)^2} = -\frac{2(x+1)(x+4)}{(2x+5)^2}$$

La funzione risulta crescente per $-4 \le x \le -1$, decrescente per $x \le -4 \vee x \ge -1$. In particolare $x = -4$ è un punto di minimo relativo per $f$, mentre $x = -1$ è punto di massimo relativo: osserviamo che però $-4 \notin I$. Perciò calcoliamo $f(-1)$ e lo confrontiamo con i valori agli estremi:

$$f(-1) = 1.$$

Perciò concludiamo che il punto di minimo è assunto in $x_m = -2$, mentre il punto di massimo in $x_M = -1$.

**Domanda N°3** Il peso $X$ del contenuto di certe confezioni di caffè è una variabile aleatoria normale con media $\mu = 250g$ e deviazione standard $\sigma = 3g$.Si calcoli la probabilità che una confezione:

- pesi più di $250g$;
- pesi meno di $245g$;

- abbia un peso tra $247g$ e $253g$.

**Risposta N°3** Per risolvere ai tre quesiti, è necessario considerare i valori della variabile standardizzata $Z = \frac{X-250}{3}$ e utilizzare la tabella per il calcolo di $G(t) = P(0 \leq Z \leq t)$, con $t \geq 0$.

- $P(X \geq 250) = P(Z \geq 0) = \frac{1}{2}$, poichè l'area sottesa al grafico della funzione gaussiana vale 1 e la funzione è simmetrica rispetto all'asse $y$.
- $P(X \leq 245) = P(Z \leq \frac{5}{3}) = \frac{1}{2} + G(\frac{5}{3}) = 0.5 + 0.4525 = 0.9525$
- $P(247 \leq X \leq 353) = P(-1 \leq Z \leq 1) = 2G(1) = 0.6826$

**Domanda N°4** Data la funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

1. determinare il campo di esistenza;
2. studiarne il comportamento agli estremi;
3. determinare le eventuali intersezioni con gli assi;
4. classificare gli eventuali punti di discontinuità;
5. studiarne le eventuali simmetrie;
6. determinare gli eventuali asintoti (suggerimento: sfruttare che $a - b = \frac{a^3-b^3}{a+b}$);
7. calcolare la derivata prima e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo.
8. determinarne la positività e le intersezioni con gli assi;
9. calcolare la derivata seconda e determinare gli eventuali punti di flesso;
10. darne un grafico approssimato.

**Risposta N°4** Il dominio di $f(x)$ è tutto $\mathbb{R}$, per cui la funzione non ha punti di discontinuità e perciò neppure asintoti verticali.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Vediamo le intersezioni con gli assi:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)(-x-1)^2} \neq \pm f(x),$$

ossia $f$ non è né pari né dispari. Cerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x})^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

Ricordando che $a - b = \frac{a^3-b^3}{a+b}$

$$q = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1)^2 - x^3}{(\sqrt[3]{x(x-1)^2})^2 + x^2 + x\sqrt[3]{x(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x - 2x^2 - x^3}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}} + x^2 + x^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 2x^2}{x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}} + x^2 + x^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x} - 2\right)}{x^2\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} + 1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{x} - 2\right)}{\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} + 1 + \left(\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right)} = -\frac{2}{3}$$

L'asintoto obliquo ha equazione $y = x - \frac{2}{3}$. Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{3(x(x-1)^2)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left[(x-1)^2 + 2x(x-1)\right] = \frac{(x-1)(3x-1)}{3x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

In particolare

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty,$$

ossia $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale. Inoltre,

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x-1}{3x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}} = +\infty,$$

mentre

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty,$$

ossia $x = 1$ è una cuspide.
Per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{3x-1}{3x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}}$.

$$f'(x) > 0 \quad per \quad x < \frac{1}{3} \vee x > 1$$

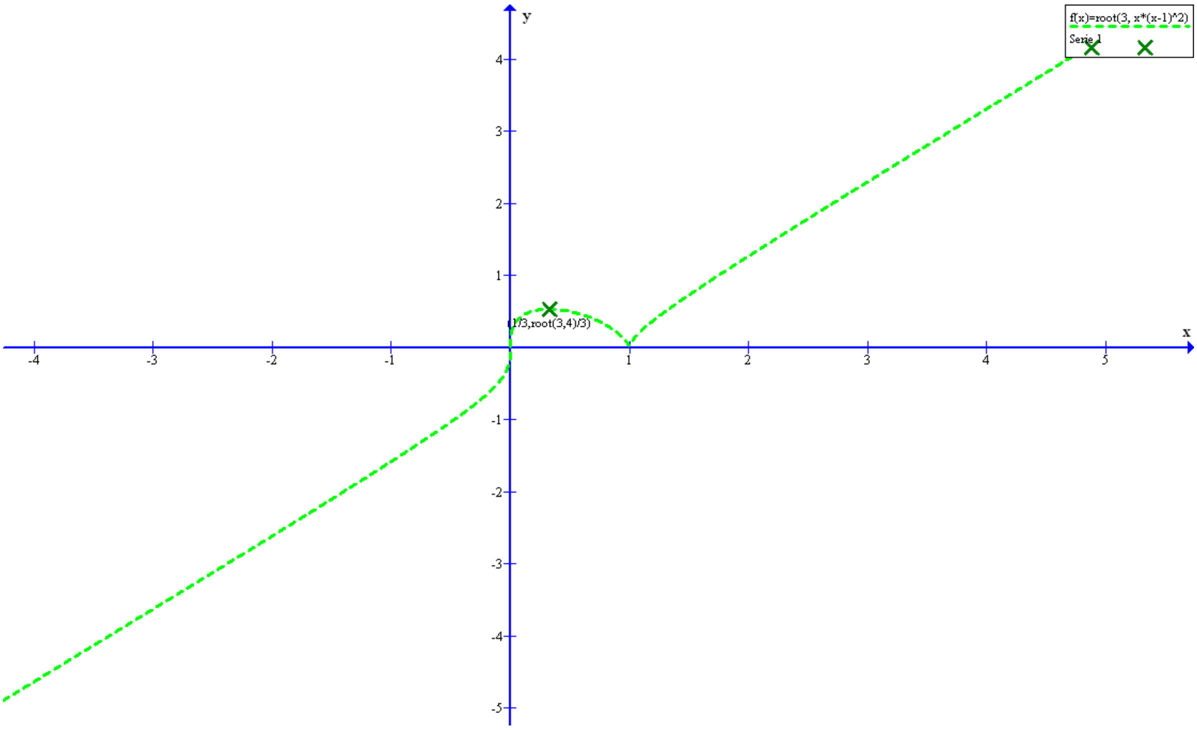
$$f'(x) < 0 \quad per \quad \frac{1}{3} < x < 1$$

In particolare $x_M = \frac{1}{3}$ è un punto di massimo relativo stazionario, mentre $x_m = 1$ è un punto di minimo non stazionario. Calcoliamo la derivata seconda per $x \neq 0$ e $x \neq 1$:

$$f''(x) = \frac{3x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} - (3x-1)\left[\frac{2(x-1)^{\frac{1}{3}}}{3x^{\frac{1}{3}}} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right]}{3x^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \frac{3x^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}} - (3x-1)\left[\frac{3x-2}{3x^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}}\right]}{3x^{\frac{4}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{9x(x-1) - (3x-1)(3x-2)}{9x^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}} = -\frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}(x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

Osserviamo che la funzione è convessa per $x < 0$ e concava per $x > 0$, ossia $x_0 = 0$ è un punto di flesso in cui non si annulla la derivata seconda. Ecco un grafico approssimato della funzione:


f(x)=root(3, x*(x-1)^2)
Serie 1
(1/3,root(3,4)/3)
y
x
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5