Terza prova intermedia

Nome ....

Cognome ....

Domanda	1	2	3	4	5	6	7	8
Risposta								

Domanda	9	10	11	12	13	14	15
Risposta							

Domanda N° 1

Qual è il valore medio della funzione

$$f(x) = e^x - 1$$

nell'intervallo $I = [-1, 1]$?

(A) $\frac{e^2+2e-1}{2e}$

(B) $\frac{e^2-2e-1}{4e}$

(C) $\frac{e^2-2e-1}{2e}$

(D) $\frac{e^2+2e-1}{4e}$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta

RISPOSTA C

Il valore medio integrale della funzione vale:

$$\frac{\int_{-1}^{1}(e^x-1)dx}{2} = \frac{[e^x - x]_{-1}^{1}}{2} = \frac{e - e^{-1} - 2}{2e} = \frac{e^2 - 2e - 1}{2e}$$

Domanda N°2

$\int_1^2 2x \ln x dx$ vale:

(A) $4\ln 2 - \frac{3}{2}$

(B) $-4\ln 2 + \frac{3}{2}$

(C) $4\ln 2 - \frac{1}{2}$

(D) $-4\ln 2 + \frac{1}{2}$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta A

$$\int_1^2 2x \ln x \quad dx = \left[x^2 \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 x dx = \left[x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= 4\ln 2 - 2 + \frac{1}{2} = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$$

Domanda N° 3

$\int x^3 \sin(x^4) dx$ vale:

(A) $-\frac{\cos(x^4)}{3} + c$

(B) $\frac{\cos(x^4)}{4} + c$

(C) $-\frac{\cos(x^4)}{4} + c$

(D) $-\frac{\sin(x^4)}{4} + c$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta C

Domanda n°4

Il valore minimo m e il valore massimo M della funzione $f(x) = |x^2 - 4x - 5|$ nell'intervallo $[2, 4]$ sono:

(A) $m = 5, M = 9$

(B) $m = 0, M = 16$

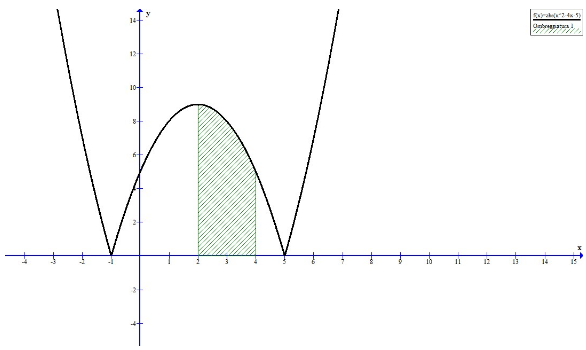
(C) $m = 7, M = 16$

(D) $m = 0, M = 9$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta A

Un metodo semplice per determinare il massimo e il minimo è rappresentare graficamente la funzione . Prima tracciare il grafico della parabola $y = x^2 - 4x - 5$, poi considerare la trasformazione $y = |x^2 - 4x - 5|$. Dal grafico si osserva subito che nell'intervallo considerato la funzione è decrescente, assume pertanto massimo in $x = 2$ e $M = 9$ e minimo in $x = 4$, con $m = 5$.



Domanda n°5

L'intervallo dove la funzione $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 + x - 1$ è strettamente convessa è:

(A) $(1, 3)$

(B) $(-2, 1)$

(C) $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

(D) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta D

$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x + 1$, $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x^2 - 3x + 2)$. $f''(x) > 0$ quando $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

Domanda N° 6

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + \cos x$, quali tra i seguenti punti è un punto di massimo relativo per la funzione?

(A) $\frac{3}{2}\pi$

(B) $\frac{\pi}{6}$

(C) $\frac{5}{6}\pi$

(D) $\frac{\pi}{2}$

(E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

Risposta B

$f'(x) = \cos 2x - \sin x = -2\sin^2 x - \sin x + 1$. Ponendo $t = \sin x$, otteniamo che la derivata si annulla per $t = -1$ oppure $t = \frac{1}{2}$. La derivata è positiva quando $-1 < \sin x \leq \frac{1}{2}$, è negativa altrimenti. Nell'intervallo $[0, 2\pi]$, la derivata si annulla in $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{6}$ e in $\frac{5\pi}{6}$. La derivata è positiva per $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \cup \frac{5\pi}{6} < x \leq 2\pi$. Pertanto il massimo relativo cercato è $x = \frac{\pi}{6}$.

Domanda N° 7

Il punto c che soddisfa la tesi del teorema di Lagrange per la funzione $f(x) = \frac{3-x^2}{x-2}$ nell'intervallo $I = [1, 3]$ vale:

(A) $1 - \sqrt{3}$

(B) $1 + \sqrt{3}$

(C) $2 - \sqrt{3}$

(D) $2 + \sqrt{3}$

(E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

Risposta E

Chiaramente il teorema di Lagrange non è applicabile nell'intevallo I, in quanto la funzione è discontinua in $x_0 = 2 \in I$.

Domanda N° 8

L'area della regione compresa tra le funzioni $f(x) = 2x^2 - 4x$ e dalla retta $g(x) = -x + 2$ vale:

(A) $\frac{125}{24}$

(B) $\frac{117}{24}$

(C) $\frac{225}{24}$

(D) $\frac{108}{24}$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

RISPOSTA A

Determiniamo le intersezioni tra la retta e la parabola: $A(2, 0)$ e $B(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ e osserviamo che nell'intervallo compreso tra A e B la parabola giace sotto la retta. Per cui, l'area richiesta vale:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{2} (-x + 2 - 2x^2 + 4x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} (2 - 2x^2 + 3x)dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-\frac{1}{2}}^{2} = -\frac{16}{3} + 6 + 4 - \frac{1}{12} - \frac{3}{8} + 1 = \frac{125}{24}$$

Domanda N° 9

Indicare il valore del seguente integrale: $\int x^2 e^{2x} dx$

(A) $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right) + c$

(B) $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + c$

(C) $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c$

(D) $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) + c$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta C

$\int x^2 e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + c$

Domanda N° 10

Indicare il valore del seguente integrale: $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

(A) $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$

(B) $(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$

(C) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$

(D) $\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + 2(x+1)^{\frac{1}{2}} + c$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta C

Compiamo la sostituzione $t = \sqrt{x+1}$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$, l'integrale diventa $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2tdt = \int 2(t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right) + c = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - 2(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + c$.

Domanda N° 11

Calcola il seguente integrale:

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+4} \quad dx$$

(A) $\ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + c$.

(B) $\ln|x-2| + \frac{1}{x-2} + c$.

(C) $\ln|x-2| + \frac{4}{x-2} + c$.

(D) $-\ln|x-2| + \frac{4}{x-2} + c$.

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta E

Osserviamo che $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$: determiniamo A e B tali che $\frac{B}{(x-2)^2} + \frac{A}{x-2} = \frac{x+2}{x^2-4x+4}$. Poiché $\frac{B}{(x-2)^2} + \frac{A}{x-2} = \frac{Ax-2A+B}{x^2-4x+4}$, A e B devono soddisfare il sistema:

$$\begin{cases} A &= 1 \\ -2A + B &= 2 \end{cases}$$

Otteniamo $A = 1$ e $B = 4$ e così

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+4} \quad dx = \int \frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} dx =$$

$$\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + c$$

Domanda N° 12

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\tan x}$ vale:

(A) 0

(B) e

(C) 1

(D) e^2

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta B

Applicando il teorema de l'Hopital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\tan x} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x \ln(1+\cos x)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cot x}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-\sin x}{1+\cos x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}} = e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}} = e$$

Domanda N°13

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx$ vale:

(A) 6

(B) $\sqrt{6}$

(C) 1

(D) diverge

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta E

$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}} dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{c^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Domanda N°14

$\int_4^5 \frac{3x-1}{\sqrt{x-2}} dx$ vale:

(A) 0

(B) 44

(C) $\ln 2$

(D) diverge

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta D

$\int_4^5 \frac{3x-1}{\sqrt{x}-2}dx = \int_4^5 \frac{(3x-1)(\sqrt{x}+2)}{x-4}dx$. Per $x \to 4$, si ha:

$$\frac{(3x-1)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \approx \frac{44}{x-4}$$

. Poiché dunque funzione considerata è un infinito di ordine $k = 1$, l'integrale diverge.

Domanda N°15

Data $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{\frac{t}{2}}}{t}dt$. Allora $F'(\sqrt{2})$ vale:

(A) $\sqrt{2}e$

(B) $2e$

(C) $\frac{\sqrt{2}}{2}e$

(D) $\frac{e}{2}$

(E) nessuna delle precedenti risposte è corretta.

Risposta A

$F'(x) = 2x \cdot \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{x^2} = \frac{2e^{\frac{x^2}{2}}}{x}$ per cui $F'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e$